ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦ. 1

- *Κανονικές μορφές*

1. Δείξτε ότι όλες οι εξισώσεις (πάντα γραμμικές δευτέρας τάξεως) που προκυπτουν η μία από την άλλη με μια αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής $y = gY$ έχουν την ίδια g-κανονική μορφή. Το ίδιο για τις εξισώσεις που συνδέονται με μια αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής $t = t(x)$. Έχουν και εδώ την ίδια t-κανονική μορφή. Όπου, βέβαια, οι όροι g-κανονική και t-κανονική μορφή αναφέρονται στις κανονικές μορφές που προκύπτουν με αλλαγές εξαρτημένης και ανεξάρτητης μεταβλητής αντίστοιχα. Επομένως οι δυο παραπάνω κανονικές μορφές αποτελούν ένα είδος *αναλλοιώτου* των αντίστοιχων κλάσεων γραμμικών εξισώσεων.

2. Αποδείξτε ότι η σβαρτσιανή μιας συνάρτησης $f(x)$

$$\{f, x\} = \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

παραμένει αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς Möbius της συνάρτησης f. Είναι δηλαδή

$$\left\{\frac{af+b}{cf+d}, x\right\} = \{f, x\}.$$

Πώς σχετίζεται αυτό με το γεγονός ότι η έκφραση της σβαρτσιανής περιέχει μέχρι και παραγώγους τρίτης τάξης; Τι θα κάνατε αν σας ζητούσαν να λύσετε μια διαφορική εξίσωση, όπως π.χ. η $\{f, x\} = -1$, και είχατε διαπιστώσει πρώτα ότι η $f(x) = e^{2x}$ είναι μια λύση της;

3. Υπολογίστε τις ακόλουθες σβαρτσιανές που εμφανίζονται συχνά στους υπολογισμούς

α) $\{x^\nu, x\}$, β) $\{e^{\lambda x}, x\}$, γ) $\{\tanh x, x\}$, δ) $\{\tan x, x\}$

Τι λέτε ειδικότερα για τις περιπτώσεις (γ) και (δ); Μπορείτε να επικαλεστείτε την προηγούμενη ιδιότητα για να απλοποιήσετε τον υπολογισμό.

4. Δείξτε ότι η τυχούσα εξίσωση Ricatti

$$y' = ay^2 + by + c$$

–όπου a, b, c συναρτήσεις του x– μπορεί πάντα να αναχθεί σε μια γραμμική δευτεροτάξια εξίσωση με τον μετασχηματισμό

$$y = -\frac{1}{a}\frac{u'}{u}$$

και η εξίσωση που προκύπτει είναι τότε η

$$u'' - \left(\frac{a'}{a} + b\right)u' + acu = 0.$$

5. Εφαρμόστε την απεικόνιση

$$y'' + qy = 0 \to Y = y' - (u'/u)yY'' + QY = 0$$

–όπου u μια λύση της εξίσωσης $u'' + (q+c)u = 0$ και $Q = q + 2(u'/u)'$– στην ειδική περίπτωση της εξίσωσης $y'' + y = 0$ και επαληθεύστε τα αποτελέσματα που βρήκατε. Διαλέξτε την τιμή της σταθεράς c όπως εσείς κρίνετε απλούστερο.

6. Για να εκτιμήσετε περαιτέρω τη σημασία της κανονικής μορφής –ειδικότερα της g-κανονικής μορφής– κάντε τον σχετικό μετασχηματισμό στην *εξίσωση Bessel*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{1}$$

και δείξτε βάσει αυτού ότι για x λίγο μεγαλύτερα από τη μονάδα η λύση $y(x)$ της (1) –δηλαδή η *συνάρτηση Bessel* $J_\nu(x)$– θα προσεγγίζεται πολύ καλά από την έκφραση

$$J_\nu(x) \sim \frac{\sin(x+\phi)}{\sqrt{x}},$$

θα έχει δηλαδή τη μορφή ενός αποσβεννύμενου ημιτόνου με νόμο απόσβεσης $1/\sqrt{x}$. Δείξτε επίσης ότι για $\nu = 1/2$ οι αντίστοιχες συναρτήσεις Bessel μπορούν να υπολογιστούν ακριβώς

- *Μετασχηματισμός Darboux*

7. Όπως σημειώσαμε στο κείμενο, ο αριθμητικός συντελεστής του δυναμικού $V(x) = 2/x^2$ που βρήκαμε εκεί, φαίνεται να είναι της μορφής $n(n+1)$ για $n = 1$, δηλαδή της μορφής που είναι γνωστή από τον φυγόκεντρο όρο $(\hbar^2/2m)\ \ell(\ell+1)/r^2$ που εμφανίζεται στην τριδιάστατη κίνηση σε ένα κεντρικό δυναμικό $V(r)$. (Και, βέβαια, το $\hbar^2/2m$ είναι μονάδα στην περίπτωσή μας, που αντιστοιχεί σε ένα σύστημα μονάδων με $\hbar = 2m = 1$.) Είναι εύλογο λοιπόν να υποθέσουμε ότι με κατάλληλη διαδοχική εφαρμογή του μετασχηματισμού Darboux μπορούν να προκύψουν το ένα μετά το άλλο τα δυναμικά $V_n(x) = n(n+1)/x^2$ με $n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$. Δείξτε ότι αυτό πράγματι ισχύει, αρκεί να κρατήσουμε σταθερή την τιμή της παραμέτρου μ ($\mu = 0$) και να επιλέξουμε την κατάλληλη δεύτερη λύση της σχετικής εξίσωσης για τη συνάρτηση u. Η οποία, για την τιμή του n που έχουμε ήδη επιτύχει, θα γράφεται ως

$$\mathcal{U}_n'' - \frac{n(n+1)}{x^2}\mathcal{U}_n = 0$$

και έχει ως δύο λύσεις της –εξηγήστε γιατί– τις x^{-n} και x^{n+1}, για τις οποίες είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι η μεν πρώτη μας επαναφέρει στο προηγούμενο δυναμικό $V_{n-1}(x) = (n-1)n/x^2$ ενώ η δεύτερη (η x^{n+1}) μας πάει στο αμέσως επόμενο· το $V_{n+1} = (n+1)(n+2)/x^2$.

8. Αν ως αρχικό δυναμικό πάρουμε τώρα το απειρόβαθο πηγάδι $V(x) = 2/\sin^2 x$ που βρήκαμε στο κείμενο και ως συνάρτηση $\mathcal{U}(x)$, για τη συνέχιση του αλγορίθμου, την ιδιοσυνάρτηση της βασικής του κατάστασης –δηλαδή την $Y_2 = \sin^2 x$ αν την είχαμε βρει σωστά– τότε:

(α) Το νέο δυναμικό $U(x)$ θα είναι το

$$U(x) = \frac{6}{\sin^2 x} = \frac{2\cdot 3}{\sin^2 x} \equiv \left.\frac{n(n+1)}{\sin^2 x}\right|_{n=2}$$

και ο τρόπος που το γράψαμε υπονοεί, βεβαίως, ότι η συνέχιση του αλγορίθμου με τον ίδιο τρόπο θα δίνει την ακολουθία απειρόβαθων πηγαδιών $V_n(x)$ με

$$V_1(x) \equiv V = \frac{2}{\sin^2 x}, \quad V_2(x) \equiv U(x) = \frac{2\cdot 3}{\sin^2 x}, \cdots, V_n(x) = \frac{n(n+1)}{\sin^2 x}.$$

Αποδείξτε το αφού δείτε πρώτα και τα ακόλουθα ερωτήματα.

(β) Οι νέες ιδιοσυναρτήσεις ψ_n θα δίνονται από τον τύπο

$$\Psi_n = Y_n' - 2\frac{\cos x}{\sin x} Y_n \qquad n \geqq 3 \tag{1}$$

ενώ οι νέες ιδιοτιμές θα είναι πάντα οι $\lambda_n = n^2$ αλλά τώρα με $n \geqq 3$, αφού έχει αφαιρεθεί και εκείνη με $n = 2$.

(γ) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του προηγούμενού σας υπολογισμού για την πρώτη διεγερμένη στάθμη του δυναμικού $V(x) \equiv V_1(x)$ ($Y_3 = \cos x \sin^2 x$ αν το είχατε κάνει σωστά) για να βρείτε την κυματοσυνάρτηση της βασικής κατάστασης του νέου δυναμικού $U \equiv V_2(x) = 6/\sin^2 x$. Θα σας εξέπληττε αν βρίσκατε ότι $\Psi_3 = \sin^3 x$; Τι περιμένετε στο τυχόν βήμα n του παραπάνω αλγορίθμου;

9. Αν η διαδικασία της *αφαίρεσης της χαμηλότερης ιδιοτιμής* που εφαρμόσαμε προηγουμένως είναι τελείως γενική (όπως σας ζητήσαμε να δείξετε) τότε εφαρμόστε την στον αρμονικό ταλαντωτή τουλάχιστον στα δύο πρώτα της βήματα, όπως κάναμε στα δύο προηγούμενα προβλήματα. Για υποβοήθησή σας υπενθυμίζουμε ότι η σχετική εξίσωση Schrödinger για τον αρμονικό ταλαντωτή ($v = x^2$) γράφεται ως

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0 \tag{1}$$

και οι ιδιοτιμές της –δηλαδή οι τιμές του λ για τις οποίες η λύση μηδενίζεται στο $\pm\infty$– είναι οι

$$\lambda = \lambda_n = 2n + 1 \tag{2}$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις τις

$$y_n(x) \sim e^{-x^2/2} H_n(x),$$

όπου $H_n(x)$ πολυώνυμα βαθμού n –γνωστά ως *πολυώνυμα Hermite*– άρτια ή περιττά ανάλογα με το βαθμό τους. Για τις ανάγκες του παρόντος προβλήματος θα χρειαστείτε μόνο τα

$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = x, \qquad H_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Δείξτε ότι ειδικά στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή ο αλγόριθμος Darboux –με τον ειδικό τρόπο που εφαρμόζεται τώρα (αφαίρεση της χαμηλότερης ιδιοτιμής)– καταλήγει στη λεγόμενη *αλγεβρική μέθοδο* όπως αυτή είναι (αν είναι) γνωστή από ένα μάθημα κβαντομηχανικής.