ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

(Από το βιβλίο Σ. Τραχανάς, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, ΠΕΚ 2005, σελ. 471-477)

1. Ἀφοῦ ἐξηγήσετε γιατί ὅλες οἱ παρακάτω ἐξισώσεις λύνονται μέσω συναρτήσεων Bessel βρεῖτε τίς λύσεις τους καί βεβαιωθεῖτε ὅτι ἔχουν τήν παρατιθέμενη μορφή. (Τό σύμβολο $Z_\nu(x)$ δηλώνει κατά τά γνωστά τόν τυχόντα γραμμικό συνδυασμό τῶν συναρτήσεων Bessel πρώτου καί δευτέρου εἴδους· εἶναι δηλαδή $Z_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$)

α) $y'' + x^2 y = 0$ $\qquad y = \sqrt{x}\, Z_{1/4}(x^2/2)$

β) $xy'' + y = 0$ $\qquad y = \sqrt{x}\, Z_1(2\sqrt{x})$

γ) $x^2 y'' + 2xy' + \big(x^2 - n(n+1)\big)y = 0$ $\qquad y = x^{-1/2}\, Z_{n+1/2}(x)$

δ) $x^2 y'' + (1-2\mu)xy' + (\mu^2 + x^n)y = 0$ $\qquad y = x^\mu Z_0\left(\frac{2}{n}\, x^{n/2}\right)$

ε) $x^2 y'' + (1 + x^n)y = 0$ $\qquad y = \sqrt{x}\, Z_{1/n}\left(\frac{2}{n}\, x^{n/2}\right)$

στ) $x^2 y'' + xy' + (x^n - 1)y = 0$ $\qquad y = Z_{2/n}\left(\frac{2}{n}\, x^{n/2}\right)$

ζ) $x^2 y'' - xy' + (x^2 - 3)y = 0$ $\qquad y = xZ_2(x)$

η) $x^4 y'' + y = 0$ $\qquad y = \sqrt{x}\, Z_{1/2}(1/x)$

θ) $x^2 y'' - xy' + (x^2 + 1 - n^2)y = 0$ $\qquad y = xZ_n(x)$

ι) $x^2 y'' + (x^2 - 2)y = 0$ $\qquad y = \sqrt{x}\, Z_{3/2}(x)$

2. Νά ἐκφραστοῦν οἱ λύσεις τῶν ἀκόλουθων διβάθμιων ἐξισώσεων μέσω τῶν κατάλληλων ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων.

α) $xy'' - 2(1 + x^2)y' + 2\left(\frac{1}{x} - 3x\right)y = 0$

β) $xy'' + 2xy' - \frac{2}{x}\, y = 0$

γ) $x^2(1-x)y'' - \left(\frac{3}{2}\, x + x^2\right)y' + \left(\frac{3}{2} + x\right)y = 0$

δ) $x^2(x+3)y'' + \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{4}\right)y = 0$

ε) $xy'' + \left(\frac{1}{2} - x^3\right)y' - x^2 y = 0$

στ) $x^2(x^2+1)y'' + \left(\frac{3}{2}\, x - 2x^3\right)y' - \frac{1}{2}\, y = 0$

ζ) $x^2(1 - x^n)y'' - 2y = 0$

η) $x^2(1 - x^n)y'' + 2x^n y = 0$

θ) $xy'' - x^n y' - x^{n-1}y = 0$

ι) $x^4 y'' - xy' - y = 0$

3. Ἀφοῦ ἐξηγήσετε γιά ποιό λόγο θά ἰσχύει μιά σχέση τῆς μορφῆς

$$\Phi(\alpha; c; x) = x^{1-c}\, \Phi(\alpha'; c'; x)$$

χρησιμοποιεῖστε τή μέθοδο τῆς ἀσυμπτωτικῆς σύγκρισης γιά νά δείξετε ὅτι θά εἶναι

$$\alpha' = \alpha + 1 - c \qquad , \qquad c' = 2 - c$$

καί νά συμπεράνετε ἔτσι ὅτι ἡ δεύτερη λύση τῆς συμβάλλουσας ὑπεργεωμετρικῆς ἐξίσωσης θά δίδεται ἀπό τή συνάρτηση

$$x^{1-c}\, F(\alpha + 1 - c; 2 - c; x)$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο δεῖξτε ὅτι ἡ δεύτερη λύση τῆς ὑπεργεωμετρικῆς ἐξίσωσης θά γράφεται σάν

$$x^{1-c}F(\alpha+1-c;\ b+1-c;\ 2-c;\ x)$$

Ὑπενθυμίζομε ὅτι τά σύμβολα $\Phi(\alpha;\ b;\ c;\ x)$ καί $\Phi(\alpha;\ c;\ x)$ δηλώνουν τίς γενικές λύσεις τῶν ὑπεργεωμετρικῶν ἐξισώσεων πρώτου καί δευτέρου εἴδους μέ παραμέτρους α, b, c καί α, c ἀντίστοιχα. Θἆναι δηλαδή

$$\Phi(\alpha;\ b;\ c;\ x)=c_1F(\alpha,\ b;\ c;\ x)+c_2x^{1-c}F(\alpha+1-c,\ b+1-c;\ 2-c;\ x)$$

καί

$$\Phi(\alpha;\ c;\ x)=c_1F(\alpha;\ c;\ x)+c_2x^{1-c}\ F(\alpha+1-c;\ 2-c;\ x)$$

4. Στό τέλος τῆς §I.3 τούτου τοῦ κεφαλαίου εἴχαμε συζητήσει πώς ὑπολογίζει κανείς τήν *πολλαπλασιάζουσα δύναμη* μιᾶς ἐκθετικῆς συμπεριφορᾶς στό ἄπειρο καί εἴχαμε ἐφαρμόσει αὐτή τήν τεχνική στήν ἐξίσωση τοῦ Hermite. Ἡ βασική ἰδέα ἦταν νά «ἀφαιρέσομε» ἀπό τήν ἀρχική συνάρτηση τήν ἐκθετική της συμπεριφορά στό ἄπειρο ἐκτελώντας τήν ἀλλαγή ἐξαρτημένης μεταβλητῆς

$$y=y_\infty(x)=e^{\mu x^\rho}Y(x)$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωση πού ἱκανοποιεῖ ἡ νέα συνάρτηση Y θἄχει σίγουρα μία δυναμοσυμπεριφορά στό ἄπειρο πού δέν θἆναι παρά ἡ πολλαπλασιάζουσα δύναμη τῆς ἐκθετικῆς συμπεριφορᾶς τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης. Ἐν πάση περιπτώσει γιά τήν ἐξίσωση τοῦ Hermite —ὅπου τό ἀσυμπτωτικό ἐκθετικό ἔχει τή μορφή $y_\infty \sim e^{x^2}$— ἡ παραπάνω διαδικασία —δηλαδή ἡ ἀντικατάσταση $y=e^{x^2}Y$— μᾶς εἶχε ὁδηγήσει στή νέα ἐξίσωση (ἐξ. (9) τῆς §I.3)

$$Y''+2xY'+(2\nu+2)Y=0$$

ἡ ὁποία παρατηροῦμε ὅτι εἶναι διβάθμια ὅπως καί ἡ ἀρχική $(y''-2xy'+2\nu y=0)$. Δεδομένου τώρα ὅτι ὁ μετασχηματισμός $y=e^{x^2}Y$ δέν ἀνήκει στήν κατηγορία $y=x^\mu Y$ πού ξέρομε ὅτι διατηρεῖ τό διβάθμιο χαρακτήρα μιᾶς ἐξίσωσης, εἶναι λογικό νά διερωτηθοῦμε ἄν κρύβεται κάποια γενικότερη ἰδιότητα πίσω ἀπ' αὐτό τό εὕρημα. Ὕστερα ἀπό κάποια σκέψη καί τήν ἐξέταση μερικῶν παραδειγμάτων καταλήγει κανείς στήν εὔλογη ὑπόθεση ὅτι:

Ὅλες οἱ διβάθμιες ἐξισώσεις δευτέρου καί τρίτου εἴδους παραμένουν διβάθμιες καί μετά τήν «ἀφαίρεση» τῆς ἐκθετικῆς τους συμπεριφορᾶς στό ἄπειρο.

Ἀφοῦ βεβαιωθεῖτε ὅτι ἡ παραπάνω ἰδιότητα —πού θά ἀποκαλεῖται στό ἑξῆς *ἰδιότητα Kummer*(*)— εἶναι σωστή γιά τίς ἀκόλουθες εἰδικές μορφές διβάθμιων ἐξισώσεων, ἀποδεῖξτε την κατόπιν στή γενική περίπτωση: Δηλαδή γιά τήν τυχούσα διβάθμια ἐξίσωση δευτέρου ἤ τρίτου εἴδους.

α) $xy''+(1-x)y'+ny=0$ (ἐξίσωση Laquerre)

β) $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ (ἐξίσωση Bessel)

γ) $xy''+cy'-y=0$ (ὑπεργεωμετρική ἐξίσωση τρίτου εἴδους)

(*) Στόν Kummer ὀφείλεται ἡ διαπίστωση ὅτι ὁ μετασχηματισμός $y=e^xY$ μετατρέπει μιά συμβάλλουσα ὑπεργεωμετρική ἐξίσωση μέ παραμέτρους α καί c σέ μιά ἐξίσωση τοῦ ἴδιου τύπου μέ παραμέτρους $\alpha'=\alpha-c$ καί $c'=c$.

5. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐφαρμογή τῆς ἰδιότητας Kummer στήν συμβάλλουσα ὑπεργεωμετρική ἐξίσωση ὁδηγεῖ στό ἀποτέλεσμα

$$\Phi(\alpha;\, c;\, x) = e^x \Phi(c-\alpha;\, c;\, -x) \tag{1}$$

ὅπου τό σύμβολο Φ στά δύο μέλη δηλώνει τή γενική λύση τῆς συμβάλλουσας ὑπεργεωμετρικῆς ἐξίσωσης μέ τίς ἀντίστοιχες παραμέτρους. Ἐπικαλεστεῖτε τήν (1) γιά νά συμπεράνετε ὅτι ἡ δύναμη πού πολλαπλασιάζει τό ἀσυμπτωτικό ἐκθετικό e^x τῆς συμβάλλουσας ἐξίσωσης εἶναι ἡ $x^{\alpha-c}$. Θά ἰσχύει ἑπομένως ἡ ἀσυμπτωτική σχέση

$$\Phi(\alpha;\, c;\, x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} Ax^{-\alpha} + Bx^{\alpha-c}\, e^x$$

6. Πολύ ἐνδιαφέρουσες συνέπειες ἔχει καί ἡ ἐφαρμογή τῆς ἰδιότητας Kummer στήν ἐξίσωση Bessel. Σύμφωνα μ' αὐτή τήν ἰδιότητα ἄν ἐκτελέσομε στήν ἐξίσωση Bessel μιά ὁποιαδήποτε ἀπό τίς ἀντικαταστάσεις

$$y = e^{\pm ix} Y$$

θά καταλήξομε πάλι σέ μιά διβάθμια ἐξίσωση πού ὅμως θά εἶναι τώρα δευτέρου εἴδους ἀφοῦ ἡ ἀφαίρεση τοῦ ἐκθετικοῦ παράγοντα στό ἄπειρο συνεπάγεται ἀναγκαστικά ὅτι ἡ μία συμπεριφορά τῆς νέας ἐξίσωσης στό ἄπειρο θά εἶναι δύναμη τοῦ x. Δεῖξτε κατόπιν ὅλων αὐτῶν ὅτι οἱ συναρτήσεις Bessel $J_\nu(x)$ μποροῦν νά ἐκφραστοῦν μέσω ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων δευτέρου εἴδους ὡς ἀκολούθως

$$J_\nu(x) \sim x^\nu e^{ix}\, F\left(\nu + \frac{1}{2}\,;\, 2\nu+1;\, -2ix\right) \tag{1}$$

Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμητικός συντελεστής πού μετατρέπει αὐτή τήν ἀναλογία σέ ἰσότητα; Δεῖξτε πρῶτα ὅτι οἱ γενικές λύσεις τῶν δύο ἐξισώσεων (ἀρχικῆς καί τελικῆς) συνδέονται μέ τή σχέση

$$Z_\nu(x) = x^\nu e^{ix}\, \Phi\left(\nu + \frac{1}{2}\,;\, 2\nu+1;\, -2ix\right) \tag{2}$$

7. Σύμφωνα μέ τήν εἰσαγωγική συζήτηση τοῦ προηγούμενου προβλήματος ἡ ἐφαρμογή τῆς ἰδιότητας Kummer στήν ἐξίσωση Bessel ὁδηγεῖ ἀμέσως στό συμπέρασμα ὅτι θά ἰσχύει ὑποχρεωτικά μιά σχέση τῆς μορφῆς

$$Z_\nu(x) = e^{ix} x^\mu \Phi(\alpha;\, c;\, \lambda x)$$

Χρησιμοποιεῖστε τή μέθοδο τῆς ἀσυμπτωτικῆς σύγκρισης γιά νά ὑπολογίσετε «στά γρήγορα» τίς τιμές τῶν παραμέτρων α, c, μ και λ. Δεῖξτε συγκεκριμένα ὅτι θἄναι

$$\mu = \nu \quad , \quad \alpha = \nu + \frac{1}{2} \quad , \quad c = 2\nu + 1 \quad , \quad \lambda = -2i$$

ἐπιβεβαιώνοντας ἔτσι τό ἀποτέλεσμα τοῦ προηγούμενου προβλήματος.

8. Στήν διατύπωση τῶν δύο προηγούμενων προβλημάτων δώσαμε τήν ἔμφαση στό γεγονός ὅτι οἱ συναρτήσεις Bessel δέν εἶναι τελικά ἀνεξάρτητες βασικές συναρτήσεις ἀφοῦ μποροῦν νά ἐκφραστοῦν μέσω τῶν ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων τοῦ συμβάλλοντος τύπου. Ὅμως ἡ σχέση (2) τοῦ προβλήματος 6 ἐμπεριέχει καί τό ἀντίθετο μήνυμα. Ὅτι δηλαδή ὁρισμένες ὑπεργεωμετρικές συναρτήσεις δευτέρου εἴδους μποροῦν νά ἐκφραστοῦν μέσω τῶν πολύ γνωστότερων συναρτήσεων Bessel. Στήν πραγματικότητα δέν ἀπαιτεῖται τίποτε περισσότερο ἀπό μιά μετονομασία τῶν παραμέτρων καί τῆς μεταβλητῆς γιά νά συναγάγει κανείς ἀπό τήν (2) τή σχέση

$$\Phi(\alpha; 2\alpha; x) = e^{x/2} x^{1/2-\alpha} Z_{\alpha-1/2}\left(\frac{ix}{2}\right) \tag{1}$$

τῆς ὁποίας τό μήνυμα συμπυκνώνεται στήν πρόταση ὅτι: Οἱ συμβάλλουσες ὑπεργεωμετρικές συναρτήσεις μέ $c = 2\alpha$ ἐκφράζονται μέσω συναρτήσεων Bessel. Χρησιμοποιεῖστε τήν (1) γιά νά δείξετε ὅτι οἱ συναρτήσεις Bessel ἡμιακέραιας τάξης εἶναι στοιχειώδεις συναρτήσεις. (Λάβετε ὑπ' ὄψη σας ὅτι γιά $\alpha = -n$ ἡ μία λύση τῆς ὑπεργεωμετρικῆς ἐξίσωσης ἔχει πολυωνυμική μορφή, καθώς ἐπίσης καί τό γεγονός ὅτι τά σύμβολα Z_ν καί $Z_{-\nu}$ παριστάνουν τήν ἴδια γενική λύση).

9. Χρησιμοποιεῖστε τό συμπέρασμα τοῦ προηγούμενου προβλήματος γιά νά δείξετε ὅτι οἱ ἐξισώσεις πού ἀκολουθοῦν —παρ' ὅτι δευτέρου εἴδους— ἔχουν λύσεις πού ἐκφράζονται μέσω συναρτήσεων Bessel κατά τόν παρατιθέμενο τρόπο

α) $x^2y'' + 2x^2y' - 2y = 0$ $\qquad y = x^{1/2}e^{-x} Z_{3/2}(ix)$

β) $xy'' + (1 + x^2)y' + \left(\frac{1}{x} - x\right)y = 0$ $\qquad y = x^{1/2}e^{-x/4} Z_{1/2}(ix/4)$

γ) $xy'' - (1 + 2x)y' + \left(1 - \frac{3}{x}\right)y = 0$ $\qquad y = xe^x Z_2(ix)$

Δεῖξτε μ' αὐτή τήν εὐκαιρία ὅτι οἱ συναρτήσεις Bessel μέ φανταστικό ὄρισμα μποροῦν πάντα νά θεωρηθοῦν πραγματικές (τό μιγαδικό τους μέρος περιορίζεται σέ μιά πολλαπλασιαστική σταθερά πού ἀπορροφᾶται ἀπό τίς σταθερές τῆς γενικῆς λύσης) ἐνῶ ἡ ἀλλαγή προσήμου στή μεταβλητή τους δέν ἔχει καμμιά σημασία. Δηλαδή τά σύμβολα $Z_\nu(x)$ καί $Z_\nu(-x)$ παριστάνουν τήν ἴδια γενική λύση.

10. Ὅλες οἱ ὑπεργεωμετρικές συναρτήσεις πού ἀκολουθοῦν εἶναι στοιχειώδεις συναρτήσεις. Βρεῖτε τις

α) $F(\alpha; \alpha; x)$ $\qquad$ γ) $F(1, b; b; x)$

β) $F(1; 2; x)$ $\qquad$ δ) $F(\alpha, -2; c; x)$

11. Ἀποδεῖξτε τίς ταυτότητες

α) $(1 - x)^\nu = F(-\nu, b; b; x)$ $\qquad$ γ) $\tan^{-1}x = xF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right)$

β) $\ln(1 - x) = -xF(1, 1; 2; x)$ $\qquad$ d) $\sin^{-1}x = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$

12. Χρησιμοποιεῖστε τή δυναμοσειρά

$$F(\alpha; c; x) = 1 + \frac{\alpha}{c}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$$

γιά νά δείξετε ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συμβάλλουσας ὑπεργεωμετρικῆς συνάρτησης εἶναι πάλι μιά συνάρτηση τοῦ ἴδιου τύπου. Δεῖξτε συγκεκριμένα ὅτι ἰσχύει ἡ

$$\frac{d}{dx}F(\alpha; c; x) = \frac{\alpha}{c}F(\alpha+1; c+1; x)$$

καί ἑπομένως ἡ

$$\frac{d^m}{dx^m}F(\alpha; c; x) = \frac{(\alpha)_m}{(c)_m}F(\alpha+m; c+m; x)$$

13. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἀποδείξτε ὅτι

$$\frac{d^m}{dx^m} F(\alpha;\, c;\, x) = \frac{(\alpha)_m (b)_m}{(c)_m} F(\alpha + m,\, b + m;\, c + m;\, x)$$

14. Ὅπως ἐξηγήσαμε στό κείμενο —καί πρέπει νά σᾶς εἶναι πιά προφανές— γιά $\alpha = -n$ καί τά δύο εἴδη ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων —οἱ $F(\alpha;\, c;\, x)$ καί οἱ $F(\alpha,\, b;\, c;\, x)$— παριστάνουν πολυώνυμα βαθμοῦ n πού εἶναι γνωστά ὡς *ὑπεργεωμετρικά πολυώνυμα.* (Γιά τήν ὑπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου εἴδους αὐτό ἰσχύει καί γιά $b = -n$ ἀφοῦ εἶναι πάντα $F(\alpha,\, b;\, c;\, x) = F(b,\, \alpha;\, c;\, x)$). Κατασκευάστε ἐκπεφρασμένα τά ὑπεργεωμετρικά πολυώνυμα πού ἀντιστοιχοῦν στά παρακάτω «σύμβολα».

α) $F(-1;\, c;\, x)$ γ) $F(-1,\, b;\, c;\, x)$

β) $F(-2;\, c;\, x)$ δ) $F(-2,\, b;\, c;\, x)$

15. Σ' ἕνα ὁποιοδήποτε βιβλίο μέ θέμα τίς εἰδικές συναρτήσεις τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς θά δεῖτε ὅτι τά πολυώνυμα Legendre ἄρτιας καί περιττῆς τάξης ἐκφράζονται μέσω τῶν ὑπεργεωμετρικῶν πολυωνύμων πρώτου εἴδους ὡς ἀκολούθως

$$P_{2n}(x) \sim F\left(-n,\, n + \frac{1}{2};\, \frac{1}{2};\, x^2\right) \quad , \quad P_{2n+1}(x) \sim xF\left(-n,\, n + \frac{3}{2};\, \frac{3}{2};\, x^2\right) \qquad (1)$$

ὅπου τό σύμβολο τῆς ἀναλογίας χρησιμοποιήθηκε ἀντί τοῦ ἴσον ὥστε νά μήν χρειαστεῖ νά νοιαστοῦμε γιά θέματα κανονικοποίησης. Ἀφοῦ ἐξηγήσετε γιατί τά γενικά χαρακτηριστικά τῶν σχέσεων (1) εἶναι προφανή καί ἐκ τῶν προτέρων ἀναμενόμενα, χρησιμοποιεῖστε τή μέθοδο τῆς ἀσυμπτωτικῆς σύγκρισης γιά μιά γρήγορη ἐξαγωγή τους. Αὐτή θἄναι καί ἄλλη μιά εὐκαιρία γιά νά πειστεῖτε ὅτι οἱ διάφορες σχέσεις συγγένειας μεταξύ τῶν εἰδικῶν συναρτήσεων εἶναι πιό εὔκολο νά παραχθοῦν ἐκ τῶν ἐνόντων παρά νά ἀναζητηθοῦν ἕτοιμες σέ κάποιο βιβλίο.

16. Ὅμως στή βιβλιογραφία θά δεῖτε ἐπίσης ὅτι τά πολυώνυμα Legendre (ἄρτια καί περιττά μαζί) συνδέονται μέ τά ἀντίστοιχα ὑπεργεωμετρικά καί μέσω τῆς σχέσης

$$P_n(x) \sim F\left(-n,\, n + 1;\, 1;\, \frac{1 - x}{2}\right)$$

Τί ἔχετε νά πεῖτε γι' αὐτό τό ἀποτέλεσμα; Ἦταν κι αὐτό ἀναμενόμενο ἤ ὄχι; Σέ κάθε περίπτωση ἀποδεῖξτε το.

17. Ὅπως εἴχαμε δεῖ στό 8ο κεφάλαιο τό παραγοντικό σύμβολο $n!$ ἐπεκτείνεται καί σέ μή ἀκέραια n μέσω τῆς σχέσης

$$\nu! \equiv \Pi(\nu) = \Gamma(\nu + 1)$$

Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀνάλογη ἐπέκταση γιά τό σύμβολο Pochammer —πού δέν εἶναι παρά μιά ἁπλή γενίκευση τοῦ παραγοντικοῦ συμβόλου— δίδεται ἀπό τή σχέση

$$(\alpha)_\nu = \frac{\Gamma(\alpha + \nu)}{\Gamma(\alpha)}$$

18. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς ἀνάμειξης τῆς §I.3 ἡ συμβάλλουσα ὑπεργεωμετρική συνάρτηση $F(\alpha;\, c;\, x)$ ἔχοντας μιά ἀμιγή συμπεριφορά στή γειτονιά τοῦ μηδενός (κατασκευάζεται μέ τή μέθοδο τῶν δυναμοσειρῶν μέ ἀφετηρία τή *μία* ἐναρκτήρια δύναμη) θά συμπεριφέρεται στό ἄπειρο ὡς ἕνα μεῖγμα τῶν δύο τοπικῶν συμπεριφορῶν αὐτοῦ τοῦ σημείου. Θἄναι δηλαδή

$$F(\alpha; c; x) \xrightarrow[x\to\infty]{} A(\alpha, c)x^{-\alpha} + B(\alpha, c)x^{\alpha-c}\, e^x \tag{1}$$

ὅπου οἱ *συντελεστές ἀνάμειξης* A καί B θἄναι ἀπόλυτα καθορισμένοι ἀφοῦ ἀπόλυτα καθορισμένη εἶναι καί ἡ συνάρτηση τοῦ πρώτου μέλους. Προσδιορῖστε τά A καί B (ὡς συναρτήσεις τῶν παραμέτρων α καί c) ἀκολουθώντας τίς παρακάτω ὑποδείξεις.

α) Δεδομένου ὅτι ἡ «ἀφαίρεση τοῦ ἐκθετικοῦ παράγοντα» e^x ἐναλλάσσει τούς ρόλους τῶν δυνάμεων $x^{-\alpha}$ καί $x^{\alpha-c}$, διατηρώντας ταυτόχρονα τόν ὑπεργεωμετρικό χαρακτήρα τῆς ἐξίσωσης, εἶναι μιά εὔλογη προσδοκία ὅτι οἱ συντελεστές A καί B δέν θά εἶναι ἄσχετοι μεταξύ τους ἀλλά θά συνδέονται μέ μιά ἁπλή σχέση. Βρεῖτε ποιά εἶναι αὐτή ἡ σχέση ἐφαρμόζοντας τήν ἰδιότητα Kummer

$$F(\alpha; c; x) = e^x\, F(c-\alpha; c; -x)$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει ἀκριβῶς τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀφαίρεσης τοῦ ἐκθετικοῦ παράγοντα. Δεῖξτε συγκεκριμένα ὅτι θἄναι

$$B(\alpha, c) = (-1)^{\alpha-c}\, A(c-\alpha, c) \tag{2}$$

ὅπου τό σύμβολο $(-1)^z$ ἀποκτᾶ νόημα γιά τυχόν z (πραγματικό ἤ μιγαδικό) μέσω τῆς σχέσης $(-1)^z = (e^{i\pi})^z = e^{i\pi z}$.

β) Μιά ἁπλούστατη μέθοδος γιά τόν προσδιορισμό τοῦ συντελεστῆ A ἔχει ὡς ἀφετηρία της τήν παρατήρηση ὅτι γιά $\alpha = -n$ ἡ συνάρτηση τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) γίνεται ἕνα πολυώνυμο, ὁπότε σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἐκθετικό τοῦ δευτέρου μέλους θά πρέπει νά ἀπουσιάζει καί νά παραμένει μόνο ἡ δυναμοσυμπεριφορά $x^{-\alpha}$ ἡ ὁποία καί θά ταυτίζεται τότε μέ τή μέγιστη δύναμη τοῦ πολυωνύμου τοῦ πρώτου μέλους. Γιά $\alpha = -n$ λοιπόν ὁ συντελεστής A θά συμπίπτει μέ τόν συντελεστή τῆς μέγιστης δύναμης τοῦ ὑπεργεωμετρικοῦ πολυωνύμου $F(-n; c; x)$ κι ἑπομένως θά ἰσοῦται μέ

$$A(\alpha, c)\Big|_{\alpha=-n} = \frac{(\alpha)_n}{(c)_n}\,\frac{1}{n!}\Big|_{\alpha=-n} \tag{3}$$

Δεῖξτε βάσει τῆς (3) ὅτι θἄναι

$$A(-n, c) = (-1)^n \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)} \tag{4}$$

καί παρατηρώντας ὅτι αὐτή ἡ ἔκφραση ἰσχύει καί γιά μή ἀκέραιο n θέστε ξανά $n = -\alpha$ γιά νά καταλήξετε στόν τύπο

$$A(\alpha, c) = (-1)^{-\alpha} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-\alpha)} \tag{5}$$

ὁ ὁποῖος σέ συνδυασμό μέ τούς (1) καί (2) ὁδηγεῖ στό τελικό ἐξαγόμενο

$$F(\alpha; c; x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-\alpha)}(-x)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-c}\, e^x \tag{6}$$

Ὑπάρχουν κάποιοι ἁπλοί ἔλεγχοι αὐτοῦ τοῦ ἀποτελέσματος; Ἄν ναί ὑποδεῖξτε τους.

19. Ὁ ἀναγνώστης ἄς δοκιμάσει νά ἀποδείξει τώρα μόνος του ὅτι γιά τήν ὑπεργεωμετρική συνάρτηση πρώτου εἴδους ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἀσυμπτωτικές σχέσεις

$$F(\alpha, b; c; x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-\alpha-b)}{\Gamma(c-\alpha)\,\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\alpha+b-c)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(b)}(1-x)^{c-\alpha-b} \quad (1)$$

καί

$$F(\alpha, b; c; x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(b-\alpha)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-\alpha)}(-x)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\alpha-b)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(c-b)}(-x)^{-b} \quad (2)$$

᾿Εξηγεῖστε πρῶτα τό νόημα καί τά βασικά χαρακτηριστικά αὐτῶν τῶν σχέσεων καί ὑποβάλλετέ τις σέ κάποιους ἁπλούς ἐλέγχους. Γιά τήν ἀπόδειξη θά χρειαστεῖτε μεταξύ ἄλλων καί τή σχέση

$$\Phi(\alpha, b; c; x) = (1-x)^{c-\alpha-b}\,\Phi(c-\alpha, c-b; c; x) \quad (3)$$

ἡ ὁποία ἰσχύει βεβαίως καί ἄν στή θέση τῶν γενικῶν λύσεων βάλομε τίς ἀντίστοιχες ὑπεργεωμετρικές συναρτήσεις $F(\alpha, b; c; x)$ καί $F(c-\alpha, c-b; c; x)$. ῾Η (3) γίνεται ἀρκετά εὔλογη ἄν σκεφτοῦμε ὅτι στήν ὑπεργεωμετρική ἐξίσωση ὁ ρόλος τῶν σημείων $x=0$ καί $x=1$ εἶναι ἐναλλάξιμος (πᾶμε ἀπό τό ἕνα στό ἄλλο μέ τή μετατόπιση $t=1-x$) καί λάβομε ταυτόχρονα ὑπ᾿ ὄψιν ὅτι ὁ παράγοντας $(1-x)^{c-\alpha-b}$ δέν εἶναι παρά ἡ μία τοπική συμπεριφορά στή γειτονιά τοῦ σημείου $x=1$. (῾Η ἄλλη εἶναι —ὅπως καί στό $x=0$— ἡ $(1-x)^0 =$ σταθερά). ῎Αν ἡ γενική μορφή τῆς σχέσεως (3) θεωρηθεῖ προφανής ἀπό τά παραπάνω τότε οἱ παράμετροι τῆς ὑπεργεωμετρικῆς συνάρτησης τοῦ δευτέρου μέλους προκύπτουν ἀμέσως μέ τή μέθοδο τῆς ἀσυμπτωτικῆς σύγκρισης. Κάντε τό σχετικό ὑπολογισμό. Συζητεῖστε γιατί ἡ (3) μπορεῖ νά ἰδωθεῖ καί ὡς ἡ ἰδιότητα Kummer τῆς ὑπεργεωμετρικῆς ἐξίσωσης πρώτου εἴδους.

20. Δεδομένου ὅτι οἱ συναρτήσεις Bessel συνδέονται μέ τίς ὑπεργεωμετρικές δευτέρου εἴδους μέσω τῆς σχέσης

$$J_\nu(x) \sim x^\nu e^{ix} F\left(\nu + \frac{1}{2}; 2\nu+1; -2ix\right)$$

ἡ ἀσυμπτωτική τους μορφή γιά μεγάλα x Μπορεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἐφαρμόζοντας τό ἀποτέλεσμα (6) τοῦ προβλήματος **18**. Δεῖξτε μ᾿ αὐτό τόν τρόπο ὅτι θἄναι

$$J_\nu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

πού συμπίπτει μέ τό γνωστό μας ἤδη ἀποτέλεσμα

$$J_\nu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x+\varphi)$$

μόνο πού ἡ φάση φ δέν εἶναι πλέον ἀπροσδιόριστη ἀλλά παίρνει μία συγκεκριμένη τιμή. Σέ ἐφαρμογές τῶν συναρτήσεων Bessel σέ προβλήματα κυματικῆς σκέδασης ἡ τιμή αὐτῆς τῆς φάσης εἶναι ἡ κρίσιμη παράμετρος τῆς λύσης ἀπό τήν ὁποία προκύπτουν οἱ πειραματικά ἐνδιαφέρουσες ποσότητες. ᾿Ανάλογη φυσική σημασία, σέ προβλήματα σκέδασης πού λύνονται μέσω ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων, ἔχουν καί οἱ συντελεστές ἀνάμειξης A καί B τῶν δύο προηγούμενων ἀσκήσεων.