ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ I

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΠΟΥ ΔΙΑΤΗΡΟΥΝ ΤΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΑΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ
(ΚΑΙ Η ΧΡΗΣΗ ΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΗ ΕΠΙΛΥΣΗ
ΤΩΝ ΒΑΣΙΚΩΝ «ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ» ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΟΥ ΣΥΝΑΝΤΩΝΤΑΙ ΣΤΟ ΒΙΒΛΙΟ)

Περιεχομενα

Εισαγωγη

Σκοπός τούτου του συμπληρώματος είναι να παρουσιάσουμε με κάπως μεγαλύτερη άνεση και σχετική αυτονομία, ως προς το βιβλίο, τη βασική μεθοδολογία χειρισμού και επίλυσης των βασικών «παράπλευρων» εξισώσεων που συναντούμε εκεί ώστε να δοθεί η δυνατότητα στον αναγνώστη να εξοικειωθεί με έναν *τρόπο σκέψης* που πιστεύουμε ότι είναι πιο σημαντικός και από τα επιμέρους ευρήματα που αναφέρονται σε αυτό.
Οι εξισώσεις για τις οποίες θα μιλήσουμε θα είναι, κατά σειράν, οι εξής:

A. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$: Η γενική, γραμμική και ομογενής εξίσωση δευτέρας τάξεως

B. $u_t + \beta(x,t)u_x + \gamma(x,t)u = 0$: Η γενική, γραμμική και ομογενής, μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

C. $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$: Η γενική εξίσωση Ricatti

Το ενοποιητικό πλαίσιο της παρουσίασης θα είναι αυτό που αναφέρεται στον τίτλο του συμπληρώματος με μοναδική εξαίρεση τον μετασχηματισμό που θα δείτε στην αρχή της «παραγράφου» C και ο οποίος όχι μόνο δεν διατηρεί τη μορφή της εξίσωσης Ricatti αλλά κάνει ακριβώς το αντίθετο! Την μετατρέπει σε κάτι τελείως διαφορετικό. Την μετατρέπει σε μια γραμμική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Με την εξαίρεση αυτού του μετασχηματισμού το μοναδικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι πράγματι οι αλλαγές εξαρτημένης (κυρίως) μεταβλητής, που διατηρούν το βασικό μορφολογικό χαρακτηριστικό της θεωρούμενης εξίσωσης και που εξειδικεύονται μετά έτσι ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή απλοποίηση και ενδεχομένως η επίλυσή της. Σε κατοπινές «συνέχειες» τούτου του συμπληρώματος θα συζητήσουμε επίσης τις δυνατότητες που μας παρέχει η χρήση των αλλαγών ανεξάρτητης μεταβλητής και οι οποίες μόνο «παρεμπιπτόντως» αναφέρονται εδώ. Και αρχίζουμε με τις εξισώσεις του τύπου A.

Α. Η γενική γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως: Ο μετασχηματισμός $y{=}gY$ και οι χρήσεις του

Σύμφωνα με το γενικό πλαίσιο που περιγράψαμε πριν, αφετηρία μας εδώ θα είναι η παρατήρηση ότι, αν θέλουμε να διατηρήσουμε το γραμμικό και ομογενή χαρακτήρα μιας εξίσωσης, τότε οι αλλαγές εξαρτημένης μεταβλητής που μπορούμε να κάνουμε πρέπει να είναι και αυτές γραμμικές και ομογενείς. Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται, προφανώς, από έναν μετασχηματισμό της μορφής

$$y(x) = g(x)\,Y(x), \tag{1}$$

όπου y, Y η παλιά και η νέα εξαρτημένη μεταβλητή αντίστοιχα, και $g(x)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση. Ας κάνουμε τώρα τον μετασχηματισμό (1) στην εξίσωση

$$y'' + Py' + Qy = 0 \tag{2}$$

για να δούμε ποιες μπορεί να είναι οι πιθανές χρήσεις του. Θα έχουμε

$$y' = gY' + g'Y, \qquad y'' = gY'' + 2g'Y' + g''Y \tag{3}$$

και, εισάγοντας τις (1) και (3) στη (2), παίρνουμε

$$gY'' + (Pg + 2g')Y' + (g'' + Pg' + Qg)Y = 0, \tag{4}$$

απ' όπου αναφαίνονται αμέσως οι εξής δύο δυνατότητες:

α) Να διαλέξουμε το g έτσι ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής του όρου της πρώτης παραγώγου της νέας εξίσωσης. Δηλαδή να απαιτήσουμε όπως

$$Pg + 2g' = 0$$

οπότε θα είναι

$$g = e^{-\frac{1}{2}\int P dx} \tag{5}$$

και η μετασχηματισμένη εξίσωση θα έχει έρθει τότε στη λεγόμενη *κανονική μορφή*

$$Y'' + I(x)Y = 0 \qquad \text{με} \qquad I(x) = Q(x) - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}p^2.$$

β) Να διαλέξουμε το $g(x)$ έτσι ώστε να μηδενίζεται ο συντελεστής τού Y της νέας εξίσωσης, οπότε αυτή θα παίρνει τη μορφή

$$Y'' + \widetilde{P}Y' = 0, \qquad \widetilde{P} = P + 2\frac{g'}{g},$$

η οποία γίνεται αμέσως πρωτοτάξια με την προφανή αντικατάσταση $Y' = u$. Αυτή η *ελάττωση τάξης* πραγματοποιείται όταν το g ικανοποιεί την εξίσωση

$$g'' + Pg' + Qg = 0,$$

όταν δηλαδή συμπίπτει με μία από τις λύσεις της αρχικής.

Έχοντας τώρα σκιαγραφήσει τις δύο δυνατές χρήσεις του μετασχηματισμού $y = gY$, ας εξετάσουμε καθεμιά από αυτές χωριστά.

1. ΤΟ ΠΕΡΑΣΜΑ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

Ορισμός: *Κανονική μορφή μιας δευτεροτάξιας εξίσωσης*

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

ονομάζεται εκείνη που προκύπτει από αυτήν με απαλοιφή του όρου της πρώτης παραγώγου της μέσω ενός γραμμικού και ομογενούς μετασχηματισμού της εξαρτημένης μεταβλητής της.

Όπως είδαμε, ο κατάλληλος παράγοντας μετασχηματισμού $g(x)$ είναι ο

$$g(x) = e^{-\frac{1}{2}\int P(x)dx}, \tag{6}$$

για τον οποίο η νέα εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$gY'' + (g'' + Pg' + Qg)Y = 0$$

ή, ισοδύναμα, την

$$Y'' + \left(Q + P\frac{g'}{g} + \frac{g''}{g}\right)Y = 0$$

η οποία, για $g = \exp(-\int P(x)dx/2)$, γράφεται τελικά ως

$$Y'' + I(x)Y = 0, \tag{7}$$

όπου

$$I(x) = Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2. \tag{8}$$

Η θεμελιώδης σημασία της κανονικής μορφής φαίνεται τώρα από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση: *Όλες οι δευτεροτάξιες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που συνδέονται με γραμμικούς και ομογενείς μετασχηματισμούς εξαρτημένης μεταβλητής έχουν την ίδια κανονική μορφή.*

Απόδειξη: Όπως είδαμε νωρίτερα, η μετασχηματισμένη μορφή της εξίσωσης

$$y'' + Py' + Qy = 0 \tag{9}$$

κάτω από έναν *τυχόντα* μετασχηματισμό $y = gY$, είναι

$$Y'' + \widetilde{P}Y' + \widetilde{Q}Y = 0, \tag{10}$$

όπου

$$\widetilde{P} = P + 2\frac{g'}{g}, \qquad \widetilde{Q} = Q + P\frac{g'}{g} + \frac{g''}{g}.$$

Για να δείξουμε ότι οι (9) και (10) έχουν την ίδια κανονική μορφή πρέπει να δείξουμε ότι

$$\widetilde{I}(x) = I(x),$$

δηλαδή ότι

$$\widetilde{Q} - \frac{1}{2}\widetilde{P}' - \frac{1}{4}\widetilde{P}^2 = Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2$$

πράγματι είναι

$$\widetilde{I} = \widetilde{Q} - \frac{1}{2}\widetilde{P}' - \frac{1}{4}\widetilde{P}^2 = \left(Q + P\frac{g'}{g} + \frac{g''}{g}\right) - \frac{1}{2}\left(P + 2\frac{g'}{g}\right)' - \frac{1}{4}\left(P + 2\frac{g'}{g}\right)^2$$

και παίρνοντας υπ' όψιν ότι $(g'/g)' = (g''/g) - (g'/g)^2$ θα έχουμε τελικά

$$\widetilde{I} = Q + P\frac{g'}{g} + \frac{g''}{g} - \frac{1}{2}P' - \left(\frac{g''}{g} - \left(\frac{g'}{g}\right)^2\right) - \frac{1}{4}P^2 - P\frac{g'}{g} - \left(\frac{g'}{g}\right)^2,$$

απ' όπου φαίνεται αμέσως πως όλοι οι όροι που περιέχουν το g απαλείφονται, και ό,τι απομένει δεν είναι παρά το $I = Q - P'/2 - P^2/4$ της αρχικής εξίσωσης.

Δείξαμε λοιπόν ότι η παράσταση

$$I = Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2,$$

που κατασκευάζεται από τους συντελεστές P και Q μιας δευτεροτάξιας γραμμικής εξίσωσης, παραμένει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς $y = gY$. Είναι δηλαδή η ίδια για όλη την οικογένεια των εξισώσεων που συνδέονται μεταξύ τους με γραμμικές και ομογενείς αλλαγές εξαρτημένης μεταβλητής.

Η πρακτική και θεωρητική σημασία αυτού του αποτελέσματος είναι σχεδόν προφανής. Αν κάποιος έχει πάρει μια γνωστή επιλύσιμη εξίσωση –π.χ., την $y'' + y = 0$– και της έχει κάνει μια αυθαίρετη αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής –π.χ., την $y = \exp(x^2/2)Y$– τότε η *κρυμμένη επιλυσιμότητα* της νέας εξίσωσης μπορεί να αποκαλυφθεί αμέσως, πηγαίνοντάς την στην κανονική μορφή. Με άλλα λόγια, η μετάβαση στην κανονική μορφή *αναιρεί* τους αυθαίρετους μετασχηματισμούς εξαρτημένης μεταβλητής και αποκαλύπτει την τυχόν επιλυσιμότητα της εξίσωσης. Αυτή η σύντομη συζήτηση ας είναι και μια πρώτη εισαγωγή του αναγνώστη στα «μυστήρια» της *κρυπτοεπιλυσιμότητας* περί των οποίων θα γίνει μια αναφορά σε ένα άλλο μέρος αυτού του *Μαθηματικού Συμπληρώματος*.

2. ΕΛΑΤΤΩΣΗ ΤΑΞΗΣ

Ας επιστρέψουμε τώρα στη δεύτερη δυνατή χρήση του γραμμικού και ομογενούς μετασχηματισμού $y = gY$. Όπως είπαμε νωρίτερα, από τη γενική μορφή της μετασχηματισμένης εξίσωσης

$$gY'' + (Pg + 2g')Y' + (g'' + Pg' + Qg)Y = 0$$

φαίνεται αμέσως ότι μπορούμε να μηδενίσουμε τον συντελεστή του Y αρκεί να διαλέξουμε το g έτσι ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση

$$g'' + Pg' + Qg = 0,$$

δηλαδή να ταυτίζεται με μία από τις λύσεις y_1, y_2 της αρχικής. Με αυτή την εκλογή η νέα εξίσωση περιέχει μόνο τους όρους δευτέρας και πρώτης παραγώγου και, επομένως, με την αντικατάσταση $Y' = u$, μετατρέπεται αμέσως σε πρωτοτάξια. Ποιοτικά, αυτή η *ελάττωση τάξης* είναι κάτι που θα έπρεπε να αναμένεται. Πρόκειται για τον ίδιο ακριβώς μηχανισμό που μας επιτρέπει να ελαττώσουμε το βαθμό μιας αλγεβρικής εξίσωσης όταν συμβαίνει να γνωρίζουμε μία από τις ρίζες της. Εν πάση περιπτώσει, εδώ η ελαττωμένης τάξης εξίσωση έχει τη μορφή

$$u' + \left(P + 2\frac{g'}{g}\right)u = 0, \tag{11}$$

όπου
$$g = y_1 \text{ ή } y_2, \qquad u = Y', \qquad y = gY.$$
Υπενθυμίζουμε τώρα στον αναγνώστη ότι μια γραμμική και ομογενής πρωτοτάξια εξίσωση της γενικής μορφής
$$y' + Py = 0$$
ολοκληρώνεται αμέσως γράφοντάς την ως
$$\frac{y'}{y} = -P \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\ln y = -P \;\Rightarrow\; \ln y = -\int P\,dx$$
$$\Rightarrow\; y = e^{-\int P(x)dx}.$$
Έτσι, για την (11), θα έχουμε
$$u = e^{-\int (P + 2\frac{g'}{g})dx} = e^{-\int P dx} e^{-2\ln g}$$
$$\Rightarrow\; u = \frac{1}{g^2} e^{-\int P dx} = \frac{W}{g^2}, \tag{12}$$
όπου $W = W(x)$ η βρονσκιανή της αρχικής εξίσωσης
$$W = W(y_2, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{-\int P(x)dx} \qquad \text{(τύπος του Abel)}$$
και $g(x)$ μία από τις λύσεις της. Συγκεκριμένα, αν $g = y_1$ τότε η (12) γράφεται ως
$$u = Y' = \frac{W}{y_1^2} \;\Rightarrow\; Y = \int \frac{W}{y_1^2}\,dx$$
και, δεδομένου ότι $y = gY = y_1 Y$, θα έχουμε τελικά
$$y = y_1 \int \frac{W}{y_1^2}\,dx \tag{13}$$
που είναι, βέβαια, ο πολύ γνωστός τύπος
$$y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2}\,dx, \tag{14}$$
βάσει του οποίου υπολογίζουμε μια δεύτερη λύση όταν η μία είναι ήδη γνωστή. Βασικά –λόγω του αόριστου χαρακτήρα του ολοκληρώματος και του γεγονότος ότι η βρονσκιανή ορίζεται με απροσδιοριστία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς– τόσο ο (13) όσο και ο (14) μας δίνουν τη γενική λύση ως γραμμικό συνδυασμό της y_1 και μιας γραμμικά ανεξάρτητης δεύτερης λύσης y_2.

Δείξαμε λοιπόν ότι η γνώση μιας λύσης μας επιτρέπει να μειώσουμε κατά μονάδα την τάξη μιας δευτεροτάξιας εξίσωσης, και ολοκληρώνοντας την πρωτοτάξια εξίσωση που προκύπτει, να υπολογίσουμε και μια δεύτερη λύση.

B. Η γενική γραμμική και ομογενής μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης: Ο μετασχηματισμός $u{=}gU$ και οι χρήσεις του

Πρόκειται για την εξίσωση

$$u_t + \beta(x,t)u_x + \gamma(x,t)u = 0, \tag{1}$$

που είναι προφανώς η πιο γενική πρωτοτάξια μερική διαφορική εξίσωση που έχει και την επιπλέον ιδιότητα της γραμμικότητας και της ομογένειας. Όπως και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις έτσι και εδώ τα μόνα *συστηματικά* εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας για τη λύση αυτής της εξίσωσης είναι οι αλλαγές εξαρτημένης ή/και ανεξάρτητης μεταβλητής(-ών) και εδώ θα περιοριστούμε κυρίως στο πρώτο από αυτά τα οποίο επαρκεί πλήρως για το σκοπό μας. Η βασική παρατήρηση τώρα –όπως και προηγουμένως– είναι ότι αφού η (1) είναι γραμμική και ομογενής, και θέλουμε να παραμείνει τέτοια, η μόνη αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής που έχει νόημα να χρησιμοποιήσουμε είναι η γραμμική και ομογενής σχέση

$$u = gU, \tag{2}$$

όπου u, U η παλιά και η νέα εξαρτημένη μεταβλητή και $g(x,t)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση που θα πρέπει να επιλεγεί κατάλληλα. Για να δούμε ποια μπορεί να είναι μια τέτοια «κατάλληλη επιλογή» αντικαθιστούμε τη (2) στην (1) και παίρνουμε

$$gU_t + g\beta U_x + (g_t + \beta g_x + \gamma g)U = 0, \tag{3}$$

απ' όπου είναι φανερό ότι αν η g ικανοποιεί την εξίσωση

$$g_t + \beta g_x + \gamma g = 0 \tag{4}$$

–είναι δηλαδή μια λύση της αρχικής εξίσωσης (1)– τότε η (3) θα καταλήγει στην

$$U_t + \beta U_x = 0, \tag{5}$$

δηλαδή στην ίδια την αρχική εξίσωση αλλά χωρίς τον τελευταίο όρο της. Φτάσαμε έτσι σε ένα αποτέλεσμα τελείως ανάλογο με εκείνο της προηγούμενης «παραγράφου», όπου και εκεί η ταύτιση του g με μία από τις λύσεις (y_1 ή y_2) της αρχικής εξίσωσης οδήγησε στην απαλοιφή του όρου χωρίς παράγωγο και, λόγω αυτού, σε μείωση της τάξης της εξίσωσης. Και η μόνη διαφορά με την τωρινή περίπτωση είναι ότι εδώ δεν προκύπτει μείωση τάξης, για τον πολύ απλό λόγο ότι η εξίσωση είναι ήδη πρωτοτάξια και επιπλέον όχι συνήθης αλλά μερική διαφορική εξίσωση.

Όσον αφορά τώρα την εξίσωση (5), θα δείξουμε αμέσως –στην πραγματικότητα είναι *σχεδόν προφανές*– ότι η γενική της λύση θα μπορεί πάντα να γραφεί υπό τη μορφή

$$U = f(\xi), \tag{6}$$

όπου $\xi = \xi(x,t)$ μια οποιαδήποτε ειδική λύση της (5) και $f(\xi)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση του ξ. Πράγματι, δεδομένου ότι

$$U_t = \frac{\partial f}{\partial t} = f'(\xi)\xi_t, \qquad U_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(\xi)\xi_x$$

η αντικατάσταση της (6) στην (5) θα δώσει

$$f'(\xi)(\xi_t + \beta\xi_x) = 0 \;\Rightarrow\; \xi_t + \beta\xi_x = 0, \tag{7}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Απομένει να δούμε αν υπάρχουν κάποιες σημαντικές ειδικές περιπτώσεις για τις οποίες είναι δυνατή η εύρεση μιας ειδικής λύσης g της (1), οπότε θα είναι σίγουρα δυνατή και η αναγωγή της στην απλούστερη μορφή (5). Ύστερα από λίγη σκέψη βλέπει κανείς ότι μια σημαντική τέτοια περίπτωση –που εμφανίζεται συχνότατα στις εφαρμογές– είναι η

$$\gamma(x,t) = \gamma(t) \tag{8}$$

για την οποία είναι αμέσως φανερό ότι η (1) θα διαθέτει μια ειδική λύση επίσης της μορφής $g(x,t) = g(t)$, βάσει της οποίας η (1) καταλήγει στη συνήθη διαφορική εξίσωση

$$\dot{g} + \gamma(t) g = 0,$$

που λύνεται αμέσως με αποτέλεσμα

$$g(t) = e^{-\int \gamma(t)dt}. \tag{9}$$

Θα είναι λοιπόν σε αυτή την περίπτωση

$$u(x,t) = e^{-\int \gamma(t)dt} f(\xi), \tag{10}$$

όπου ξ μια οποιαδήποτε ειδική λύση της (5) και $f(\xi)$ μια αυθαίρετη συνάρτηση του ξ. Σημειώστε επ' ευκαιρία ότι η εμφάνιση *αυθαίρετων συναρτήσεων* είναι ένα αναμενόμενο χαρακτηριστικό της γενικής λύσης των μερικών διαφορικών εξισώσεων, ακριβώς όπως η εμφάνιση *αυθαίρετων σταθερών* είναι επίσης ένα τυπικό χαρακτηριστικό της γενικής λύσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Και όπως στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις το πλήθος των εμφανιζόμενων αυθαίρετων σταθερών είναι ίσο με την τάξη της εξίσωσης, το ίδιο ισχύει και για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις: Το πλήθος των αυθαίρετων συναρτήσεων που εμφανίζονται στη γενική λύση είναι ίσο με την τάξη της εξίσωσης. Είναι λογικό λοιπόν ότι στην περίπτωσή μας –όπου η επιλυόμενη εξίσωση είναι πρωτοτάξια– το πλήθος των εμφανιζόμενων αυθαίρετων συναρτήσεων θα είναι ίσο με *ένα*, όπως και συμβαίνει. Αντίθετα, στην περίπτωση μιας δευτεροτάξιας εξίσωσης όπως, π.χ., η γνωστή *κυματική εξίσωση* στη μία διάσταση

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0,$$

η γενική λύση –όπως μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε– γράφεται ως

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

και όντως περιέχει δύο αυθαίρετες συναρτήσεις –τις f και g–, όσες δηλαδή και η τάξη της εξίσωσης.

Για να πάμε ένα βήμα πιο πέρα θα χρειαστεί τώρα να «σκύψουμε» λίγο πάνω στην εξίσωση (5) για να δούμε αν υπάρχουν και εδώ κάποιες ειδικές –αλλά μη τετριμμένες– μορφές του συντελεστή $\beta = \beta(x,t)$ για τις οποίες μπορεί επίσης να βρεθεί μια ειδική λύση $\xi = \xi(x,t)$ που θα εισαχθεί μετά στον τύπο (10) για να μας δώσει τη ζητούμενη γενική λύση της αρχικής εξίσωσης (1). Η απλούστερη τέτοια περίπτωση που μπορούμε να εξετάσουμε είναι όταν το $\beta(x,t)$ έχει την κλειστή μορφή ενός πολυωνύμου ως προς x –με συντελεστές που είναι συναρτήσεις του t– οπότε είναι εύλογο να περιμένουμε ότι και η λύση θα έχει μια ανάλογη πολυωνυμική μορφή. Ύστερα από λίγο βλέπει όμως κανείς –αποδείξτε το παρ' όλα αυτά– ότι αυτό είναι δυνατό μόνο όταν το β είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Δηλαδή όταν

$$\beta(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t) \tag{11}$$

όπου, βέβαια, η συνάρτηση $\beta(t)$ του δεύτερου μέλους δεν έχει καμιά σχέση με τη $\beta(x,t)$ του πρώτου. Με $\beta(x,t)$ όπως στην (11) η (5) γράφεται ως

$$U_t + (\alpha x + \beta)U_x = 0, \tag{12}$$

απ' όπου γίνεται γρήγορα αντιληπτό ότι η ζητούμενη ειδική λύση $\xi(x,t)$ θα μπορεί να αναζητηθεί στη μορφή

$$\xi = A(t)x + B(t), \tag{13}$$

της οποίας η αντικατάσταση στη (12) δίνει αμέσως

$$\dot{A}x + \dot{B} + (\alpha x + \beta)A = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{A} + \alpha A = 0, \qquad \dot{B} + \beta A = 0,$$

απ' όπου οι συναρτήσεις A και B προσδιορίζονται πολύ εύκολα συναρτήσει των α και β που θεωρούνται γνωστές. Θα είναι συγκεκριμένα

$$A(t) = e^{-\int \alpha(t)dt}, \qquad B(t) = -\int \beta e^{-\int \alpha(t)dt} dt.$$

Σε ένα άλλο μέρος τούτου του *Μαθηματικού Συμπληρώματος* θα εξετάσουμε και κάποιες ακόμα ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όπου η εξίσωση (1) είναι ακριβώς επιλύσιμη και θα μελετήσουμε επίσης τις δυνατότητες που μας παρέχει το άλλο βασικό εργαλείο που έχουμε στη διάθεσή μας: Οι αλλαγές των ανεξάρτητων μεταβλητών t και x, που η γενική τους μορφή είναι

$$s = s(t,x), \qquad z = z(t,x), \tag{14}$$

όπου s και z ο νέος «χρόνος» και η νέα «θέση» αντίστοιχα. Όπου βέβαια η κατάλληλη «κίνηση» και εδώ –όπως και στην αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής που εξετάσαμε πριν– είναι να αντικαταστήσουμε τις (14) στην (1) ώστε να διερευνήσουμε τι δυνατότητες παρεμβάσεων στη μορφή της εξίσωσης προκύπτουν λόγω αυτών των αλλαγών. Δεν θα προχωρήσουμε αυτή τη διερεύνηση εδώ γιατί δεν είναι αναγκαία για τους περιορισμένους σκοπούς τούτου του πρώτου μέρους του *Μαθηματικού Συμπληρώματος*. Αναφερθήκαμε όμως και σε αυτή τη δυνατότητα ώστε να αναδειχθεί με απόλυτη σαφήνεια η βασική «φιλοσοφία» μας σχετικά με τη λύση διαφορικών εξισώσεων όπως αυτές που συζητάμε εδώ. Το ουσιώδες είναι να γνωρίζουμε τα «εργαλεία» που έχουμε στη διάθεσή μας και να γνωρίζουμε επίσης, σε γενικές γραμμές, τι μπορεί να κάνει το καθένα από αυτά. Ώστε να είμαστε σε θέση τουλάχιστον να αντιμετωπίσουμε *μεθοδικά* την κάθε συγκεκριμένη περίπτωση, και ό,τι καταφέρουμε. Στη λύση διαφορικών εξισώσεων –το γνωρίζουμε όλοι αυτό– η επιτυχία δεν είναι ποτέ εξασφαλισμένη. Η αποτυχία όμως είναι σίγουρη αν αρχίσουμε να δοκιμάζουμε στα τυφλά κάθε πιθανό ή απίθανο τέχνασμα ελπίζοντας στην… καλή μας τύχη.

C. Η εξίσωση Ricatti

Πρόκειται για τη «διασημότερη» από όλες τις μη γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξεως που περιγράφονται από το γενικό τύπο $y' = f(x,y)$, όπου $f(x,y)$ μια τυχούσα συνάρτηση των x και y. Η εξίσωση Ricatti είναι εκείνη η πρωτοτάξια εξίσωση της οποίας το δεύτερο μέλος έχει την ηπιότερη δυνατή μη γραμμική εξάρτηση από την εξαρτημένη μεταβλητή y. Είναι ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς y με συντελεστές που είναι τυχούσες συναρτήσεις του x. Θα είναι δηλαδή

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad \text{[εξίσωση Ricatti]} \tag{1}$$

Εκείνο που κάνει την εξίσωση Ricatti σημαντική από μαθηματικής πλευράς –αλλά και από πλευράς εφαρμογών– είναι το γεγονός ότι μπορεί να αναχθεί σε γραμμική με έναν κατάλληλο (αν και ανορθόδοξο) μετασχηματισμό. Για να φτάσουμε γρήγορα στο στόχο μας ας πούμε αμέσως ότι ο μετασχηματισμός αυτός έχει τη μορφή

$$y = -\frac{1}{a}\frac{u'}{u} \tag{2}$$

και ας τον… επαληθεύσουμε (δάσκαλε που εδίδασκες!) στην ειδική περίπτωση $a(x) = 1$,[(1)] οπότε η (1) γράφεται ως

$$y' = y^2 + by + c. \tag{3}$$

Θα έχουμε τότε

$$y' = -\left(\frac{u'}{u}\right)' = -\frac{u''u - u'^2}{u^2} = -\frac{u''}{u} + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = -\frac{u''}{u} + y^2. \tag{4}$$

οπότε είναι φανερό ότι η αντικατάσταση της (4) στην (3) θα οδηγήσει στην απαλοιφή του όρου y^2 και η προκύπτουσα εξίσωση θα είναι η

$$-\frac{u''}{u} + \cancel{\left(\frac{u'}{u}\right)^2} = \cancel{\left(\frac{u'}{u}\right)^2} + b\left(-\frac{u'}{u}\right) + c$$

$$\Rightarrow \quad u'' - bu' + cu = 0, \tag{5}$$

ενώ με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δείξει μόνος του ο αναγνώστης ότι και η γενικότερη αντικατάσταση (2) στην αρχική εξίσωση (1) θα δώσει την επίσης γραμμική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$u'' - \left(b + \frac{a'}{a}\right)u' + acu = 0. \tag{6}$$

Η μετατροπή μιας μη γραμμικής εξίσωσης σε γραμική είναι σίγουρα ένα πολύ θετικό αποτέλεσμα αν ληφθεί υπ' όψιν ότι για τις γραμμικές εξισώσεις διαθέτουμε μια συστηματική μεθοδολογία επίλυσης (βλ. και Κεφ. 2 του βιβλίου) που έχει ως ακρογωνιαίο λίθο της την *αρχή της υπέρθεσης των λύσεων*: Το οποίο σημαίνει πρακτικά ότι μας αρκεί να βρούμε δύο (γραμμικά ανεξάρτητες) λύσεις y_1 και y_2 της δεδομένης εξίσωσης $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ για να κατασκευάσουμε μετά και τη γενική της λύση ως τον τυχόντα γραμμικό τους συνδυασμό $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Κάτι που ασφαλώς δεν ισχύει στις μη γραμμικές εξισώσεις για τις οποίες η γνώση οσωνδήποτε ειδικών λύσεων δεν αρκεί

---

(1) που δεν είναι στην πραγματικότητα πολύ ειδική αφού το $a(x)$ μπορεί πάντοτε να γίνει μονάδα με κατάλληλη αλλαγή εξαρτημένης ή ανεξάρτητης μεταβλητής. (Δείτε πιο κάτω.)

για τον προσδιορισμό της γενικής τους λύσης. Όμως η αναγωγή μιας *πρωτοτάξιας εξίσωσης* σε μια *εξίσωση δευτέρας τάξεως*, όπως στην περίπτωσή μας, θέτει ένα βασικό ερώτημα. Πώς είναι δυνατή μια τέτοια αναγωγή όταν γνωρίζουμε ότι η γενική λύση των πρωτοτάξιων εξισώσεων περιέχει μία μόνο αυθαίρετη σταθερά c ενώ για τις δευτεροτάξιες εξισώσεις το πλήθος αυτών των σταθερών είναι ίσο με δύο; Η απάντηση είναι πολύ απλή. Αν $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$ είναι η γενική λύση της γραμμικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης (6), τότε η αντικατάστασή της στον τύπο (2) θα δώσει

$$y = -\frac{1}{a}\,\frac{c_1 u_1' + c_2 u_2'}{c_1 u_1 + c_2 u_2} = -\frac{1}{a}\,\frac{u_1' + c u_2'}{u_1 + c u_2} \qquad (c = c_2/c_1)$$

δηλαδή μια έκφραση που περιέχει μία μόνο αυθαίρετη σταθερά c. Και η έκβαση αυτή είναι βεβαίως προφανής εκ των υστέρων, αφού στο πηλίκον u'/u μόνο ο λόγος των δύο σταθερών c_1 και c_2 θα έχει σημασία.

Όσο για τη δικαιολόγηση –έστω «εκ των υστέρων»– του μετασχηματισμού (2) η μόνη που μπορώ να προσφέρω –πέραν της εμπειρικής διαπίστωσης ότι η παραγώγιση της έκφρασης (u'/u) εμφανίζει και το τετράγωνό της $(u'/u)^2$– αφορά την αντίστροφη διαδικασία, που είναι η (ανεπιθύμητη όμως!) μετατροπή μιας δευτεροτάξιας γραμμικής και ομογενούς εξίσωσης σε μια πρωτοτάξια εξίσωση που προκύπτει να έχει τη μορφή Ricatti.

Τέτοιο *υποβιβασμοί τάξεως* είναι πάντα δυνατοί όταν η δεδομένη εξίσωση έχει κάποια συμμετρία –π.χ., μετατόπισης ή ανακλιμάκωσης του x ή του y– η οποία και υπαγορεύει μονοσήμαντα τον κατάλληλο μετασχηματισμό που θα επιτύχει αυτό τον υποβιβασμό. Η περίπτωση των δευτεροτάξιων, γραμμικών και ομογενών εξισώσεων ανήκει σε αυτή την κατηγορία, αφού οι εξισώσεις αυτές παραμένουν αναλλοίωτες στην αλλαγή $y \to \lambda y$: έχουν δηλαδή *συμμετρία κλίμακας* ως προς y. Πώς εκμεταλλευόμαστε αυτό το γεγονός θα το δει ο αναγνώστης ως ειδική περίπτωση μιας γενικότερης συζήτησης υπό τον τίτλο «Συμμετρία και ελάττωση τάξης», στο Σ. Τραχανάς, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, σελ. 93-108 και ειδικότερα στη σελ. 104, όπου δείχνεται ότι πράγματι η ελάττωση τάξης που γίνεται δυνατή χάρις στην παραπάνω συμμετρία, μετατρέπει μια δευτεροτάξια γραμμική (και ομογενή) εξίσωση σε μια πρωτοτάξια εξίσωση Ricatti. Επειδή όμως το επιθυμητό στην πράξη είναι ακριβώς το αντίθετο, ο τρόπος να το επιτύχει κανείς είναι να εκτελέσει τον αντίστροφο μετασχηματισμό που είναι τελικά ο (2). Για όσους έχουν αφεθεί να πιστεύουν στη «μεταφυσική των τεχνασμάτων» –δηλαδή στην άποψη ότι η ακριβής επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι ζήτημα «έμπνευσης» και όχι οργανωμένης σκέψης– ούτε η εξίσωση Ricatti προσφέρεται ως καλό παράδειγμα.

Όμως η ιδιαίτερη σημασία που έχει αυτή η εξίσωση στο πλαίσιο τούτου του βιβλίου μας επιβάλλει να αναφέρουμε και έναν διαφορετικό τρόπο μελέτης και επίλυσής της, που βασίζεται όμως στην προηγούμενη γνώση μιας ειδικής λύσης $y = y_0$. Αν αφηνόμαστε κι εμείς στη μεταφυσική των τεχνασμάτων θα μπορούσαμε να αναφέρουμε «απλώς» ότι τότε η λύση θα δίνεται από τον μετασχηματισμό

$$y = y_0 + \frac{1}{u}, \tag{7}$$

ο οποίος –για ανερώτητους άρα και ανεξήγητους λόγους– μετατρέπει την (1) σε μια πρωτοτάξια γραμμική εξίσωση που όντως λύνεται αμέσως, κ.λπ., κ.λπ. . . .

Πιστεύοντας όμως περισσότερο στον ορθό λόγο παρά στη μεταφυσική ή την καλή τύχη επιλέγουμε να εφαρμόσουμε μια πολύ γενική μεθοδολογία που βασίζεται στην ίδια βασική ιδέα που χρησιμοποιήσαμε και πριν. Ας την επαναλάβουμε: Για κάθε κατηγορία εξισώσεων που μας ενδιαφέρει, να σκεφτόμαστε πρώτα ποιοι είναι *οι μετασχηματισμοί που διατηρούν τη μορφή της* και, αφού εκτελέσουμε έναν τέτοιο γενικό μετασχηματισμό, να δούμε αν οι αυθαίρετες συναρτήσεις που περιέχει μπορούν να επιλεγούν κατάλληλα ώστε αυτή η γενική μορφή να απλοποιηθεί σημαντικά και ενδεχομένως να γίνει επιλύσιμη. Παραδείγματος χάριν, για τη *γραμμική και ομογενή* εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{8}$$

είδαμε λίγο πριν ότι η μόνη αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής που διατηρεί τη μορφή της είναι η επίσης *γραμμική και ομογενής σχέση*

$$y = gY, \tag{9}$$

όπου y η παλιά και Y η νέα εξαρτημένη μεταβλητή και $g(x)$ η *συνάρτηση μετασχηματισμού* για την οποία είδαμε επίσης πώς μπορεί να εκλεγεί ώστε η (8) να απλοποιηθεί σημαντικά ή, ενδεχομένως, και να λυθεί.

Όσον αφορά τώρα την εξίσωση Ricatti, γρήγορα επίσης αντιλαμβάνεται κανείς ότι θα διατηρεί τη μορφή της κάτω από το μετασχηματισμό

$$y = gY + h, \tag{10}$$

που είναι η πιο γενική *γραμμική* (αλλά μη ομογενής) *σχέση* μεταξύ της παλιάς (y) και της νέας (Y) εξαρτημένης μεταβλητής και με $g(x)$ και $h(x)$ αυθαίρετες συναρτήσεις που απομένει να εκλεγούν κατάλληλα.

Το ότι ο (10) πράγματι διατηρεί τη μορφή της εξίσωσης Ricatti είναι μάλλον φανερό, αφού η παραγώγιση στο πρώτο μέλος θα δώσει έναν γραμμικό συνδυασμό των Y και Y', ενώ το δεύτερο μέλος θα διατηρήσει τη μορφή ενός δευτεροβάθμιου τριωνύμου ως προς Y.

Ας περιοριστούμε τώρα, για λόγους απλότητας, στην ειδικότερη περίπτωση που είναι $g = 1$, δηλαδή

$$y = Y + h, \tag{11}$$

οπότε η (1) θα μετατραπεί στην

$$Y' = aY^2 + (b + 2ah)Y + (ah^2 + bh + c - h'), \tag{12}$$

που είναι πάλι μια εξίσωση Ricatti, όπως το περιμέναμε, η οποία όμως μπορεί να απλοποιηθεί δραστικά αν θέσουμε

$$h' = ah^2 + bh + c, \tag{13}$$

αν δηλαδή η συνάρτηση h ισούται με κάποια ειδική λύση $h = y_0$ της αρχικής εξίσωσης. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η (12) παίρνει τη μορφή

$$Y' = AY^2 + BY \qquad (A = a,\ B = b + 2ah) \tag{14}$$

που είναι μια ειδική περίπτωση της λεγόμενης *εξίσωσης Bernoulli*

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\nu}, \tag{15}$$

η οποία επιλύεται ακριβώς, αν σκεφτούμε και εδώ ότι η (15) διατηρεί τη μορφή της κάτω από το μετασχηματισμό

$$y = u^{\mu} \tag{16}$$

του οποίου η αντικατάσταση στην (15) δίνει

$$u' = \frac{a}{\mu}u + \frac{b}{\mu}u^{\mu\nu-\mu+1} \tag{17}$$

που είναι πάλι μια εξίσωση Bernoulli αλλά με ένα νέο εκθέτη

$$\nu' = \mu\nu - \mu + 1.$$

Έχοντας όμως το μ στη διάθεσή μας ως ελεύθερη παράμετρο μπορούμε να το διαλέξουμε ώστε να είναι

$$\nu' = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 1/1 - \nu, \tag{18}$$

οπότε η (17) καταλήγει σε μια γραμμική εξίσωση που λύνεται ακριβώς όπως γνωρίζουμε. Για την εξίσωση (14) είναι προφανώς $\nu = 2 \Rightarrow \mu = -1$, οπότε –ξαναγυρνώντας στην (11) με $h = y_0$ όπως δείξαμε– φτάνουμε στο αποτέλεσμα (7) χωρίς ίχνος... μεταφυσικής. Επιπλέον μάθαμε καθ' οδόν και για μια άλλη μη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξεως –την εξίσωση Bernoulli– η οποία επίσης ανάγεται σε γραμμική (της ίδιας τάξεως) με έναν ορθολογικό τρόπο. Δηλαδή πάλι με μελέτη των μετασχηματισμών –εξ. (16)– που διατηρούν τη μορφή της και επιλογή κατόπιν εκείνου του ειδικού μετασχηματισμού που επιτυγχάνει τη μέγιστη απλοποίηση αυτής της μορφής και ενδεχομένως την καθιστά επιλύσιμη.

Ως άλλα σχετικά παραδείγματα αυτής της γενικής μεθοδολογίας ας δούμε τι απλοποιήσεις μπορούν να γίνουν στην εξίσωση Ricatti με τον ένα ή τον άλλο από τους μετασχηματισμούς[(1)]

$$y = gY \ \ (\alpha), \qquad\qquad t = t(x) \ \ (\beta), \tag{19}$$

εκ των οποίων ο πρώτος είναι μια ειδική περίπτωση του (10) για $h = 0$. Εισαγάγοντας τον (19α) στην (1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} gY' + g'Y &= ag^2Y^2 + bgY + c \\ \Rightarrow \quad Y' &= agY^2 + \left(b - \frac{g'}{g}\right)Y + \frac{c}{g} \end{aligned} \tag{20}$$

και είναι τώρα δική μας επιλογή να επιλέξουμε το g έτσι ώστε η (20) να έλθει σε μια «πρότυπη μορφή» που εμείς θα αποφασίσουμε ποια είναι. Αν, παραδείγματος χάριν, θεωρήσουμε ως πρότυπη μορφή εκείνη στην οποία ο συντελεστής του Y^2 έχει γίνει μονάδα, τότε θα πρέπει να θέσουμε $g = 1/a$, ενώ αν η επιθυμητή πρότυπη μορφή είναι εκείνη χωρίς γραμμικό όρο ως προς Y το g θα πρέπει να επιλεγεί βάσει της

$$b - (g'/g) = 0 \quad \Rightarrow \quad g = e^{\int b dx}. \tag{21}$$

Σημειώστε επίσης ότι η απαλοιφή του γραμμικού όρου μπορεί να επιτευχθεί και μέσω του μετασχηματισμού (11) και συγκεκριμένα –δείτε εξ. (12)– με την εκλογή $h = -b/2a$.

Όσον αφορά τώρα την αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής (19β), η εκτέλεσή της στην (1) θα δώσει

$$\dot{y}t' = ay^2 + by^2 + c, \tag{22}$$

απ' όπου φαίνεται αμέσως ότι το μόνο που μπορούμε να επιτύχουμε με αυτήν είναι να κάνουμε μονάδα τον συντελεστή τού y^2, θέτοντας

$$t' = a \quad \Rightarrow \quad t(x) = \int a(x)\, dx,$$

οπότε η (22) θα γράφεται ως

$$\dot{y}(t) = y^2 + By + C,$$

όπου $B(t) = (b(x)/a(x))_{x=x(t)}$ και $C(t) = (c(x)/a(x))_{x=x(t)}$.

---

(1) Σημειώστε ότι ο όρος «μετασχηματισμοί» είναι απολύτως ισοδύναμος με τον όρο «αλλαγές μεταβλητής» και θα χρησιμοποιείται κατά καιρούς για λόγους συντομίας.

D. Και μια εύκολη άσκηση: Βρείτε μόνοι σας όλα τα χρονεξαρτημένα δυναμικά $V(x,t)$ που μπορούν να επιλυθούν ακριβώς με τη μέθοδο των πολικών μεταβλητών

Λύση: Κάνοντας στην χρονεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger

$$i\Psi_t + \frac{1}{2}\Psi_{xx} - V\Psi = 0 \qquad (\hbar = m = 1) \tag{1}$$

την αντικατάσταση

$$\Psi = Re^{i\phi}, \tag{2}$$

παίρνουμε αμέσως το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$R_t + \phi_x R_x + \frac{1}{2}\phi_{xx}R = 0 \tag{3}$$

και

$$R_{xx} - \left(\phi_x^2 + 2\phi_t + 2V\right)R = 0, \tag{4}$$

εκ των οποίων η πρώτη –αν η συνάρτηση ϕ θεωρηθεί γνωστή– έχει τη μορφή της γενικής γραμμικής και ομογενούς πρωτοτάξιας μερικής διαφορικής εξίσωσης της προηγούμενης «παραγράφου» με το R στο ρόλο της άγνωστης συνάρτησης και με συντελεστές

$$\beta(x,t) = \phi_x, \qquad \gamma(x,t) = \frac{1}{2}\phi_{xx}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με τα προηγούμενα, η (3) θα είναι σίγουρα επιλύσιμη αν

$$\gamma = \phi_{xx}/2 = \text{συνάρτηση μόνο του } t,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\phi(x,t) = \alpha(t)x^2 + \beta(t)x + \gamma(t) \tag{5}$$

και έτσι η (3) θα παίρνει τη μορφή

$$R_t + (2\alpha x + \beta)R_x + \alpha(t)R = 0$$

με γενική λύση –σύμφωνα με όσα είπαμε πριν– την

$$R(x,t) = e^{-\int \alpha(t)dt} f(\xi), \tag{6}$$

όπου $\xi = \xi(x,t)$ μια οποιαδήποτε ειδική λύση της

$$\xi_t + (2\alpha x + \beta)\xi_x = 0 \tag{7}$$

και η απλούστερη τέτοια λύση θα είναι της μορφής

$$\xi = Ax + B \tag{8}$$

που η αντικατάστασή της στην (7) δίνει

$$\dot{A} + 2\alpha A = 0 \tag{9}$$

$$\dot{B} + \beta A = 0 \tag{10}$$

ενώ η εισαγωγή της (6) στην (4) –μετά και τη διαίρεση με A^2– θα δώσει

$$f'' - \left(\frac{2\dot{\alpha} + 4\alpha^2}{A^2} x^2 + \frac{4\alpha\beta + 2\dot{\beta}}{A^2} x + \frac{\beta^2 + 2\dot{\gamma} + 2V}{A^2} \right) f = 0. \tag{11}$$

Σε αυτό το σημείο –και χωρίς απώλεια γενικότητας– μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$V(x,t) = \frac{1}{2} k(t) x^2 - F(t) x + v(x,t), \tag{12}$$

ότι δηλαδή το δυναμικό μας αποτελείται από έναν εξαναγκασμένο παραμετρικό ταλαντωτή (οι δύο πρώτοι όροι) συν ένα πρόσθετο δυναμικό $v(x,t)$ που απομένει να προσδιοριστεί. Βάσει της (12) η (11) γράφεται τώρα ως

$$f'' - \left(\frac{2\dot{\alpha} + 4\alpha^2 + k}{A^2} x^2 + \frac{4\alpha\beta + 2\dot{\beta} - 2F}{A^2} x + \frac{\beta^2 + 2\dot{\gamma} + 2v}{A^2} \right) f = 0, \tag{13}$$

όπου η εντός παρενθέσεως ποσότητα (πλην του όρου $2v/A^2$) –όντας ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς x– θα μπορεί πάντα να γραφτεί ως $c\xi^2 - \mu$ ενώ, για να είναι και ο όρος $2v(x,t)/A^2$ συνάρτηση μόνο του ξ, θα πρέπει το δυναμικό $v(x,t)$ να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι

$$\frac{2v(x,t)}{A^2} = U(\xi) \;\Rightarrow\; v(x,t) = \frac{1}{2} A^2 U(\xi). \tag{14}$$

Έτσι η (13) θα παίρνει τελικά τη μορφή

$$f'' - \big(c\xi^2 - \mu + U(\xi) \big) f = 0, \tag{15}$$

δηλαδή την

$$f'' - \big(cA^2 x^2 + 2cABx + cB^2 - \mu + U(\xi) \big) f = 0 \tag{16}$$

της οποίας η αντιπαραβολή με τη (13) θα δώσει

$$\frac{2\dot{\alpha} + 4\alpha^2 + k}{A^2} = cA^2 \;\Rightarrow\; 2\dot{\alpha} + 4\alpha^2 + k = cA^2 \tag{17}$$

$$\frac{4\alpha\beta + 2\dot{\beta} - 2F}{A^2} = 2cAB \;\Rightarrow\; \dot{\beta} + 2\alpha\beta - cA^3 B = F \tag{18}$$

$$\frac{\beta^2 + 2\dot{\gamma}}{A^2} = cB^2 - \mu \;\Rightarrow\; \dot{\gamma} = \frac{1}{2} \big\{ A^2 (cB^2 - \mu) - \beta^2 \big\}. \tag{19}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (17), (18) με τις (9), (10) παίρνουμε τα δύο διαφορικά συστήματα

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{A} + 2\alpha A = 0 & (\alpha) \\ 2\dot{\alpha} + 4\alpha^2 + k = cA^2 & (\beta) \end{array} \right\} \tag{20}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{B} + \beta A = 0 & (\alpha) \\ \dot{\beta} + 2\alpha\beta - cA^3 B = F & (\beta) \end{array} \right\} \tag{21}$$

εκ των οποίων το πρώτο αφορά το ζεύγος των συναρτήσεων α και A ενώ το δεύτερο τις β και B υπό τον όρο ότι οι α και A έχουν υπολογιστεί από το πρώτο. Λόγω της «μορφής Ricatti» του πρώτου μέλους της η δεύτερη από τις (20) μας υποβάλει αμέσως την αντικατάσταση $\alpha = \dot{\ell}/2\ell$ λόγω της οποίας η (20α) δίνει $A = 1/\ell$, οπότε η (20β) θα καταλήγει στην εξίσωση Νεύτωνα για το ℓ

$$\ddot{\ell} = -k\ell + \frac{c}{\ell^3}. \tag{22}$$

Πηγαίνοντας τώρα στο σύστημα (21) θα έχουμε από την πρώτη του εξίσωση $\beta = -\dot{B}/A = -\ell\dot{B}$, οπότε η δεύτερη από τις (21) θα παίρνει τη μορφή

$$-(\ell\dot{B})^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{\dot{\ell}}{\ell}(-\ell\dot{B}) - \frac{c}{\ell^3}B = F$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{B} + 2\frac{\dot{\ell}}{\ell}\dot{B} + \frac{c}{\ell^4}B = -F/\ell, \tag{23}$$

που είναι μια γραμμική –αλλά μη ομογενής τώρα– εξίσωση δευτέρας τάξεως που ανάγεται σε κανονική (μη ομογενή) μορφή με το γνωστό μετασχηματισμό

$$B = e^{-\frac{1}{2}\int P(t)dt}\mathcal{B} = e^{-\int(\dot{\ell}/\ell)dt}b = \sigma\frac{b}{\ell},$$

όπου η σταθερά σ είναι σκόπιμο να τεθεί ίση με *μείον ένα* (αντί του «προφανούς» $+1$) διότι τότε στην έκφραση για το ξ

$$\xi = Ax + B = \frac{1}{\ell}x - \frac{b}{\ell} = \frac{x-b}{\ell} \tag{24}$$

αυτό το b θα παίζει το ρόλο μιας «μετατόπισης» του κέντρου των κυματοσυναρτήσεων δίπλα στην «αλλαγή κλίμακας» που αντιπροσωπεύεται από τον «παράγοντα κλίμακας», όπως είναι εύλογο να αποκληθεί το ℓ. Στο πνεύμα μιας τέτοιας ερμηνείας του b είναι επίσης σκόπιμο να μετονομαστεί σε u, οπότε θα έχουμε $B = -u/\ell$ και η εκτέλεση αυτής της αντικατάστασης στην (23) –που διευκολύνεται πολύ αν την πολλαπλασιάσουμε με ℓ^2 οπότε γράφεται ως $(\ell^2\dot{B})^{\boldsymbol{\cdot}} - (c/\ell^2)B = -\ell F$– δίνει

$$\ddot{u} + k(t)u = F, \tag{25}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε βέβαια και η εξίσωση κίνησης (22) που ικανοποιεί το ℓ.

Βάζοντας τα «κομματάκια» μαζί μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματά μας ως εξής.

Τα επιλύσιμα χρονεξαρτημένα δυναμικά θα περιγράφονται κατ' αρχάς από τη γενική έκφραση (12) με $v(x,t)$ που θα δίνεται από τη (14), όπου $A = 1/\ell(t)$ και $U(\xi)$ τέτοιο ώστε η εξίσωση Schrödinger (15) γραμμένη πιο «ορθόδοξα» ως

$$\psi'' + \big(\mu - c\xi^2 - U(\xi)\big)\psi = 0 \qquad (\psi \equiv f) \tag{26}$$

να είναι ακριβώς επιλύσιμη. Με γνωστή την $\psi(\xi)$ και με $\alpha = \dot{\ell}/2\ell$ η (6) θα δώσει $R(x,t) = \psi(\xi)/\sqrt{\ell(t)}$, ενώ για τη φάση (5) που χρειαζόμαστε στη (2) θα είναι

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\ell}}{\ell}x^2 + \left(\dot{u} - \frac{\dot{\ell}}{\ell}u\right)x + \gamma(t), \tag{27}$$

όπου το β προσδιορίστηκε από τη σχέση $\beta = -\ell\dot{B} = \ell(u/\ell)^{\cdot}$. Όσο για το γ θα έχουμε, σύμφωνα με τη (19),

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\ell^2}\left(c\frac{u^2}{\ell^2} - \mu\right) - \left(\dot{u} - \frac{\dot{\ell}}{\ell}u\right)^2\right\} \tag{28}$$

ενώ, βέβαια, η νέα μεταβλητή ξ –ως προς την οποία η νέα εξίσωση Schrödinger (26) γίνεται τυπικά χρονανεξάρτητη– θα ισούται με

$$\xi = \frac{x - u(t)}{\ell(t)} \tag{29}$$

όπου $u(t)$ και $\ell(t)$ οι λύσεις των νευτώνειων εξισώσεων (22) και (25). Σημειώστε ακόμα ότι οι τιμές της παραμέτρου c μπορούν να περιοριστούν πρακτικά στο *μηδέν* ή το *ένα* ($c = 0$ ή 1) αφού κάθε μη μηδενική τιμή μπορεί πάντα να γίνει μονάδα με κατάλληλη ανακλιμάκωση του ξ. Τα αποτελέσματα της «άσκησής» μας μπορούν λοιπόν να δοθούν συγκεντρωμένα στον πίνακα που ακολουθεί.

Τα χρονεξαρτημένα επιλύσιμα δυναμικά

Γενική έκφραση : $V(x,t) = \frac{1}{2}k(t)x^2 - F(t)x + \frac{1}{\ell^2}U(\xi)$ (A)

Λύση : $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\ell(t)}}\psi(\xi)e^{i\phi(x,t)}$ $\quad(*)$ (B)

όπου $\psi(\xi)$ λύση της «χρονανεξάρτητης» εξίσωσης Schrödinger

$$\psi'' + \big(\mu - c\xi^2 - U(\xi)\big)\psi = 0 \quad (\dagger) \tag{C}$$

και

$$\xi = \frac{x - u(t)}{\ell(t)} \tag{D}$$

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\ell}}{\ell}x^2 + \left(\dot{u} - \frac{\dot{\ell}}{\ell}u\right)x + \gamma(t) \tag{E}$$

όπου $u(t)$ και $\ell(t)$ λύσεις των νευτώνειων εξισώσεων

$$\ddot{\ell} = -k\ell + \frac{c}{\ell^3}, \qquad \ddot{u} + k(t)u = F(t) \tag{F}$$

και

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\ell^2}\left(c\frac{u^2}{\ell^2} - \mu\right) - \left(\dot{u} - \frac{\dot{\ell}}{\ell}u\right)^2\right)dt \tag{G}$$