ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΙΙ

ΔΙΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΚΡΙΒΗΣ ΕΠΙΛΥΣΙΜΟΤΗΤΑ.
ΓΕΝΙΚΗ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΚΑΙ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

(Από το βιβλίο Στ. Τραχανάς, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, ΠΕΚ 2005, σελ. 478-487)

Διβάθμιες ἐξισώσεις καί ἀκριβής ἐπιλυσιμότητα: Γενική συζήτηση καί βιβλιογραφικές ἀναφορές.

Διβάθμιες ἐξισώσεις: Ἡ προϊστορία μιᾶς ἁπλῆς ἰδέας

Ὅπως σημειώσαμε ἤδη στόν πρόλογο τοῦ βιβλίου, τά δύο τελευταῖα κεφάλαια τούτου τοῦ τόμου ἀποτελοῦν καρπό μιᾶς καθαρά προσωπικῆς ἀναζήτησης σέ μιά περιοχή τῶν κλασικῶν Μαθηματικῶν πού θεωρούνταν κλειστή, μέ τήν ὁποία ὅμως ὁ ἴδιος οὐδέποτε εἶχα αἰσθανθεῖ «εὐτυχής». (Καί οἱ λόγοι ἐκτέθηκαν νομίζω ἐπαρκῶς μέ ἀρκετές παρατηρήσεις σέ διάφορα μέρη τοῦ βιβλίου.) Ὅμως ὁ ἀναγνώστης πού μᾶς ἔχει παρακολουθήσει ὥς ἐδῶ θά ἔχει σίγουρα μιά ἀπορία πού ἦταν καί δικιά μου ἀπό τίς πρῶτες στιγμές πού αὐτή ἡ προσπάθεια ἄρχισε νά ἀποδίδει καρπούς. «Εἶναι δυνατόν μερικές τόσο ἁπλές ἰδέες νά μήν εἶχαν ἐπισημανθεῖ νωρίτερα;» Ἐρεύνησα μ' αὐτό τό μάτι τή βιβλιογραφία καί θἄθελα νά παρουσιάσω σέ τούτη τήν παράγραφο τά εὑρήματα καί τίς διαπιστώσεις μου.

Θά ἀναφερθῶ πρῶτα στό κλασικό δίτομο ἔργο τῶν Morse καί Feshbach *Methods of theoretical Physics* στό ὁποῖο ἡ θεωρία τῶν γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων —θέμα κεντρικῆς σημασίας στή θεωρητική Φυσική— ἀναπτύσσεται μέ πληρότητα πού σπανίως συναντᾶται σέ καθαρά μαθηματικά βιβλία. Ἐκεῖ θά βρεῖ κανείς καί τά βασικά στοιχεῖα μιᾶς ἀπό τίς ξεχασμένες σήμερα προσπάθειες τῶν Μαθηματικῶν τοῦ περασμένου αἰῶνα νά ἐντάξουν τίς εἰδικές διαφορικές ἐξισώσεις τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς σ' ἕνα ἑνοποιητικό σχῆμα μέ κεντρική ἔννοια τή φύση καί τίς θέσεις τῶν ἰδιόμορφων σημείων τους(*). Ὅπως θά ὑποστηρίξω ἐδῶ αὐτή ἀκριβῶς ἡ προσκόλληση στή σημασία τῆς «δομῆς τῶν ἰδιομορφιῶν» γιά τήν περιγραφή τῶν ἐξισώσεων μέ μεταβλητούς συντελεστές, προσφέρει ἕνα πρῶτο κλειδί γιά τήν ἀπάντηση στό ἐρώτημα πού θέσαμε πρίν. Πράγματι, οἱ Morse καί Feshbach στό βιβλίο τους συνειδητοποιοῦν σέ κάποιο σημεῖο τή σπουδαιότητα τοῦ νά ἔχει κανείς μιά ἀναδρομική σχέση μέ δύο ὅρους (ἄν καί δέν ἀποδίδουν σ' αὐτό τό γεγονός τήν κεντρική σημασία πού τοῦ ἀποδώσαμε ἐδῶ) καί ἀφιερώνουν μιά παράγραφο γιά νά ἐρευνήσουν ποιές διαφορικές ἐξισώσεις ὁδηγοῦν σέ ἀναδρομικές σχέσεις αὐτοῦ τοῦ τύπου. Ξέροντας ἤδη πόσο ἁπλή εἶναι ἡ ἀπάντηση σ' αὐτό τό ἐρώτημα σίγουρα θά ἐκπλαγεῖτε ἄν ἀκούσετε ὅτι οἱ Morse καί Feshbach προσπαθοῦν νά τό ἀπαντήσουν χρησιμοποιώντας ὡς διαγνωστικό ἐργαλεῖο τή δομή τῶν ἰδιομορφιῶν τῆς ἐξίσωσης! Καί προφανῶς ἀστοχοῦν. Δέν καταφέρνουν νά δώσουν μιά γενική περιγραφή τῶν ἐξισώσεων πού ἀναζητοῦν. Ἔχει κανείς ἐδῶ μιά κλασική περίπτωση ὅπου ἡ ἐμμονή σέ μιά ἀκατάλληλη ἰδέα μπορεῖ νά συσκοτίσει πλήρως ἕνα γεγονός πού γίνεται τελείως προφανές ἄν κυτταχτεῖ ἀπό μιά διαφορετική γωνία. Ὅμως ἡ ἔννοια τῶν ἰδιόμορφων σημείων εἶναι γενικότερα ἀπρόσφορη ὡς ἐργαλεῖο ταξινόμησης τῶν γραμμικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων. Καί ὁ λόγος εἶναι ἁπλός. Ἐνῶ

(*) Μιά πλήρης παρουσίαση αὐτοῦ τοῦ θέματος ὑπάρχει στό βιβλίο τοῦ Ince, Ordinary Differential equations, κεφ. 20.

γιά ἐξισώσεις τύπου Fuchs —ἐκεῖνες δηλαδή πού ἔχουν μόνο ὁμαλά ἰδιόμορφα σημεῖα— ὁ χαρακτηρισμός τους μέσω τῆς δομῆς τῶν ἰδιομορφιῶν τίς ὁρίζει μονοσήμαντα, δέν ἰσχύει τό ἴδιο γιά τίς ἐξισώσεις πού ἔχουν ἐπιπλέον καί ἀνώμαλα ἰδιόμορφα σημεῖα. Ἐδῶ στόν ἴδιο χαρακτηρισμό ἀντιστοιχοῦν ἄπειρες διαφορετικές ἐξισώσεις καί γιά νά πειστεῖτε δέν ἔχετε παρά νά προσπαθήσετε νά κατασκευάσετε ἐξισώσεις πού ἔχουν, ἄς ποῦμε, τό $x = 0$ ὡς ὁμαλό ἰδιόμορφο σημεῖο καί τό $x = \infty$ ὡς ἀνώμαλο. Ἐκτός ἀπό τήν Bessel πού εἶναι ἕνα γνωστό παράδειγμα τέτοιας ἐξίσωσης καί ὅλες ὅσες προκύπτουν ἀπ᾽ αὐτήν μέ προσθήκη ἑνός τυχόντος πολυωνύμου στόν συντελεστή τοῦ y ἀνήκουν στήν ἴδια κατηγορία. Ἡ θεμελιώδης διαφορά μεταξύ τῆς Bessel καί ὅλων αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων ἔχει τελείως χαθεῖ σ᾽ ἕνα τέτοιο ταξινομητικό πλαίσιο. Δέν εἶναι νά ἀπορεῖ κανείς κατόπιν αὐτοῦ γιατί τό ἑνοποιητικό σχῆμα στό ὁποῖο ἀναφερθήκαμε πρίν κατέληξε σέ μία ἐντελῶς τεχνητή κατασκευή πού γρήγορα ξεχάστηκε.

Θά περάσομε τώρα στήν καθαυτό μαθηματική βιβλιογραφία ἀφοῦ σημειώσομε πρῶτα ὅτι καί σέ κανένα ἄλλο βιβλίο Μαθηματικῶν Μεθόδων Φυσικῆς (καί εἶναι πολλά) δέν ἐπισημάναμε μιά ὁποιαδήποτε ἀναφορά στήν ἔννοια τῶν διβάθμιων ἐξισώσεων. Ἀκόμα κι ἄν αὐτή ἡ ἰδέα εἶχε δεῖ κάποτε τό φῶς, σίγουρα οἱ κατ᾽ ἐξοχήν ἐνδιαφερόμενοι —οἱ Φυσικοί— δέν τό εἶχαν πληροφορηθεῖ. Κι ὅμως ἡ ἰδέα εἶχε πράγματι προϋπάρξει ἀλλά οὔτε καί οἱ Μαθηματικοί —πλήν τῶν ἐξαιρέσεων πού θά ἀναφέρομε— τό εἶχαν πληροφορηθεῖ! Δέν ὑπάρχει καμμιά σχετική μνεία γι᾽ αὐτήν οὔτε στό κλασικό γιά τόν πλοῦτο τῶν ἰδεῶν του, καί τή λιτότητα τῆς παρουσίασης, ἔργο τοῦ Ince (Ordinary Differential Equations) ἀλλά οὔτε καί στήν παιδαγωγικότερη —τόσο φτωχότερη ὅμως σέ ἐκλάμψεις— πανεπιστημιακή βιβλιογραφία τῶν ἡμερῶν μας. Ἐν τούτοις τό βασικό ἐρώτημα «ποιές διαφορικές ἐξισώσεις ὁδηγοῦν σέ ἀναδρομικές σχέσεις μέ δύο ὅρους» εἶχε τεθεῖ πρό πολλοῦ καί ἡ σωστή του ἀπάντηση ὑπάρχει ἤδη στό κλασικό ἔργο τῶν ἀρχῶν τοῦ αἰῶνα, Forsyth: *Theory of Differential Equations* (Τομ. 4). Στή νεώτερη βιβλιογραφία ἡ ἴδια ἰδέα ἐμφανίζεται μόνο στό βιβλίο τοῦ Kaplan: *Ordinary Differential Equations,* ἐνῶ μιά διεξοδική παρουσίασή της ὑπάρχει καί στήν Ἑλληνική βιβλιογραφία στό βιβλίο τοῦ Γ. Δάσιου *Συνήθεις Διαφορικές Ἐξισώσεις.* Παρ᾽ ὅλ᾽ αὐτά ἡ ἰδέα παρέμεινε πρακτικά ἄγνωστη, καί οὐσιαστικά ἀναξιοποίητη, ἐξ αἰτίας —πιστεύομε— τοῦ γεγονότος ὅτι διατυπώθηκε σέ μιά τόσο ἀδιαφανή μορφή ὥστε νά συσκοτίζεται τελείως ἡ βασική της προφάνεια. Συγκεκριμένα: Σύμφωνα μέ τούς συγγραφεῖς πού προαναφέραμε οἱ ἐξισώσεις μέ τή ζητούμενη ἰδιότητα εἶναι ἐκεῖνες τῶν ὁποίων ὁ διαφορικός τελεστής μπορεῖ νά γραφεῖ στή λεγόμενη *θήτα μορφή*

$$L = A(\theta) + x^m B(\theta) \tag{1}$$

ὅπου θ ὁ διαφορικός τελεστής

$$\theta = x\frac{d}{dx} \equiv xD \tag{2}$$

καί A, B πολυωνυμικές συναρτήσεις τοῦ θ βαθμοῦ ἀντίστοιχου μέ τήν τάξη τῆς θεωρούμενης ἐξίσωσης. Γιά τόν ἀναγνώστη τούτου τοῦ βιβλίου θά πρέπει νά εἶναι προφανές ὅτι κάθε τελεστής τῆς μορφῆς (1) εἶναι διβάθμιος μέ μονοβάθμιες συνιστῶσες τίς $L_1 = A(\theta)$, βαθμοῦ μηδέν, καί $L_2 = x^m B(\theta)$ βαθμοῦ m. Κι ὅλ' αὐτά ἀπορρέουν βεβαίως ἀπό τό γεγονός ὅτι ὁ τελεστής θ εἶναι βαθμοῦ μηδέν ὅπως τό ἴδιο θά εἶναι καί κάθε πολυωνυμική του συνάρτηση. Δεδομένου ἀκόμα ὅτι ἔχομε $\theta x^\mu = \mu x^\mu$, θἄναι καί

$$A(\theta)x^\mu = A(\mu)x^\mu \quad , \quad B(\theta)x^\mu = B(\mu)x^\mu$$

τό ὁποῖο βέβαια σημαίνει ὅτι οἱ A καί B εἶναι —ὅπως εἴπαμε— μονοβάθμιοι τελεστές βαθμοῦ μηδέν. Τό βῆμα τῆς ἐξίσωσης πού ἔχει ὡς διαφορικό τελεστή τόν (1) θά ἰσοῦται, προφανῶς, μέ $\ell = m$.

Ποῦ βρίσκεται τότε τό πρόβλημα τῆς «ἀδιαφάνειας» γιά τό ὁποῖο μιλήσαμε νωρίτερα; Μά ἁπλούστατα στό γεγονός ὅτι ὁ (1) δέν εἶναι ὁ φυσικός τρόπος γραφῆς τοῦ διαφορικοῦ τελεστῆ μιᾶς ἐξίσωσης, ὁπότε ἀπαιτεῖται μιά σειρά τεχνικῶν μετατροπῶν γιά νά μπορέσει νά ἀντιληφθεῖ κανείς ἄν ἡ θεωρούμενη ἐξίσωση εἶναι τοῦ τύπου (1) ἤ ὄχι. Πάρτε γιά παράδειγμα τήν ἐξίσωση τοῦ Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

τῆς ὁποίας ὁ διαφορικός τελεστής εἶναι

$$L = (1 - x^2)D^2 - 2xD + \lambda \tag{3}$$

Μπορεῖτε νά καταλάβετε κυττάζοντας τόν (3) ἄν εἶναι τῆς μορφῆς (1); Εἶμαι σίγουρος πώς ὄχι. Καί ὁ λόγος εἶναι ἁπλός. Μέ ἐξαίρεση τό ὅρο $-2xD = -2\theta$ ποῦ εἶναι ἄμεσα γραμμένος στή θήτα μορφή, δέν συμβαίνει τό ἴδιο γιά τούς ὅρους D^2 καί x^2D^2 ἐκτός κι ἄν ἴσχυε ἡ σχέση $x^2D^2 = (xD)^2$ ὁπότε θά γράφαμε

$$x^2D^2 = (xD)^2 = \theta^2 \qquad \text{καί} \qquad D^2 \equiv x^{-2}x^2D^2 = x^{-2}\theta^2$$

καί θά ἀρκοῦσε νά πολλαπλασιάσομε τήν ἐξίσωση μέ x^2 γιά νά ἔλθει στή μορφή (1) μέ $m = 2$. Ξέρετε ὅμως ἤδη ὅτι οἱ τελεστές x καί D δέν μετατίθενται καί συνεπῶς ἡ σχέση $(xD)^2 \equiv (xD)\,(xD) = x^2D^2$ δέν εἶναι σωστή. Γιά νά βροῦμε τή σωστή *θήτα γραφή* τοῦ τελεστή x^2D^2 θά πρέπει νά ξεκινήσομε ἀπό τό γινόμενο $\theta^2 = xD \cdot xD$ καί νά ἐναλλάξομε τή σειρά τῶν δύο μεσαίων παραγόντων του, χρησιμοποιώντας τή σχέση $Dx = xD + 1$, ὁπότε καταλήγομε στήν

$$x^2D^2 = \theta(\theta - 1)$$

καί μέ παρόμοιο τρόπο στή γενικότερη σχέση

$$x^nD^n = \theta(\theta - 1)\,(\theta - 2)\,....\,(\theta - n + 1)$$

βάσει τῆς ὁποίας ἡ θήτα μορφή μιᾶς διαφορικῆς ἐξίσωση τυχούσας τάξης μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ ἀρκετά εὔκολα. Εἶναι φανερό παρ' ὅλ' αὐτά ὅτι ἡ θήτα μορφή ὄχι μόνο δέν προσφέρει κάποιο πρακτικό πλεονέκτημα ἀλλά καί καταφέρνει νά συσκοτίσει τό προφανές. Νά χρειαζόμαστε δηλαδή κάποιες τυφλές μηχανικές κινήσεις γιά νά ἀντιληφθοῦμε κάτι πού ἦταν ἐξώφθαλμα φανερό ἀπό τήν ἀρχική μορφή τῆς ἐξίσωσης. Κι ὄχι μόνο φανερό ἀλλά καί ἄμεσα κατανοητό. Διότι —ὅπως ἔχομε τονίσει τόσο συχνά— τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀναδρομικῆς σχέσης δέν ἐκφράζει τίποτε ἄλλο παρά τό πλῆθος τῶν διαφορετικῶν μετατοπίσεων πού ὑφίσταται ὁ ἐκθέτης μιᾶς τυχούσας δύναμης ὅταν αὐτή εἰσαχθεῖ στήν ἐξίσωση. Καί δέν χρειαζόμαστε βεβαίως τή θήτα μορφή γιά νά ἀντιληφθοῦμε ἀμέσως ὅτι ἡ μετατόπιση πού προκαλεῖ ὁ τυχών ὅρος $x^m y^{(n)}$ εἶναι $m - n$, καί βάσει αὐτοῦ νά δοῦμε πόσες διαφορετικές μετατοπίσεις προκαλοῦν οἱ διάφοροι ὅροι τῆς ἐξίσωσης καί νά προβλέψομε ἔτσι πόσους ὅρους θά ἔχει ἡ ἀντίστοιχη ἀναδρομική σχέση. Ἡ ἔννοια τοῦ βαθμοῦ καί τῶν διβάθμιων, τριβάθμιων κλπ. ἐξισώσεων, δίνει ἁπλῶς ἕνα ὄνομα σ' αὐτή τή διαφανέστατη διαδικασία. Ὅπως καί νἄχουν τά πράγματα ἡ μελέτη τῶν ἐξισώσεων τῆς θήτα μορφῆς στίς πηγές πού ἀναφέραμε δέν προχωράει πέραν τοῦ σημείου νά διαπιστωθεῖ ὁ *ἁλματικός ἀριθμός* τῆς σειρᾶς —τό δικό μας *βῆμα*— καί μέσω αὐτοῦ νά διατυπωθεῖ σωστά τό θεώρημα τῆς λογαριθμικῆς ἀνωμαλίας. (Ὅτι δηλαδή ἡ ἀνωμαλία ἐμφανίζεται ὅταν ἡ διαφορά τῶν ἐναρκτήριων δυνάμεων εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ βήματος κι ὄχι ἁπλῶς ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός). Ὅμως ἐπεξεργασίες ὅπως αὐτές τοῦ παρόντος κεφαλαίου δέν εἶχαν, ἀπ' ὅσο γνωρίζω, τό ἀντίστοιχό τους στό φορμαλισμό τῆς θήτα μορφῆς. Ἔτσι μιά βασικά καλή ἰδέα παρέμεινε ἀνενεργός καί πρακτικά χάθηκε.

Θά ἦταν ὅμως ὑπερβολή ἄν ἰσχυριζόμουνα ὅτι ἡ ἀδιαφανής διατύπωση εὐθύνεται ἀποκλειστικά γιά τό γεγονός ὅτι αὐτή ἡ ἰδέα ἔμεινε ἀναξιοποίητη. Τό σημαντικότερο ἴσως εἶναι ὅτι διατυπώθηκε ἐρήμην ἑνός γενικότερου πλαισίου πού θά ἀναδείκνυε τή σημασία της. Πράγματι σ' ὅλες τίς παρουσιάσεις τοῦ θήτα φορμαλισμοῦ τῶν διβάθμιων (στή δικιά μας ὁρολογία) ἐξισώσεων ἡ σημασία πού ἀποδίδεται στίς ἀναδρομικές σχέσεις μέ δύο ὅρους εἶναι πολύ περιορισμένη. Θεωροῦνται ἁπλῶς πιό «βολικές» —γι' αὐτό καί πιό «ἐπιθυμητές»— ἀπ' ἐκεῖνες μέ περισσότερους ὅρους. Ὅμως πουθενά δέν ἀποδίδεται θεμελιώδης χαρακτήρας σ' αὐτή τή διάκριση ὥστε νά δοθεῖ τό ἔναυσμα γιά μιά συστηματική τοποθέτηση τοῦ προβλήματος τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας στά πλαίσια τοῦ ὁποίου διάφορα ἐπιμέρους εὑρήματα θά ἀποκτοῦσαν μιά πολύ διαφορετική σημασία.

7.2 Ἀκριβής ἐπιλυσιμότητα: Εἶναι ἕνα πραγματικό μαθηματικό πρόβλημα;

Φτάσαμε ἔτσι στό δεύτερο θέμα τούτης τῆς γενικῆς συζήτησης· στό *πρόβλημα τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας*. Πρόκειται ὅμως στ' ἀλήθεια γιά ἕνα μαθηματικό πρόβλημα μέ καλά ὁρισμένο περιεχόμενο ἤ ὄχι; Σάν πρῶτο βῆμα ἄς δοῦμε τί ἐννοοῦμε στήν πράξη ὅταν λέμε ὅτι μιά συγκεκριμένη ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ἐπιλύσιμη. Μιά περίπτωση ὅπου ὅλοι συμφωνοῦμε εἶναι ὅταν ἡ λύση της ἐκφράζεται μέσω στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Ὅμως ἡ χρήση τοῦ ὅρου δέν περιορίζεται ἐκεῖ. Χαρακτηρίζομε ἐπίσης ὡς ἀκριβῶς ἐπιλύσιμη καί κάθε ἐξίσωση πού ἡ λύση της ἐκφράζεται μέσω τῶν λεγόμενων *εἰδικῶν συναρτήσεων τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς*, ἤ —πού εἶναι τελικά μιά ἰσοδύναμη διατύπωση— μέσω *συναρτήσεων καταχωρημένων σέ πίνακες* (tabulated functions).

Καί ἐδῶ ἀκριβῶς εἶναι πού ἀρχίζει τό πρόβλημα. Διότι ἄν γιά τίς στοιχειώδεις συναρτήσεις μπορεῖ νά ἐπικαλεστεῖ κανείς μιά γενική συμφωνία γιά τήν καθαρά μαθηματική σημασία αὐτοῦ τοῦ συναρτησιακοῦ συνόλου, δύσκολα μπορεῖ νά ἰσχυριστεῖ τό ἴδιο γιά τίς εἰδικές συναρτήσεις τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς. Ἔχουν πράγματι κάτι τό εἰδικό αὐτές οἱ συναρτήσεις ἤ εἶναι «εἰδικές» ἁπλῶς καί μόνο ἐπειδή ἐμφανίζονται συχνά στά φυσικά προβλήματα καί λόγω αὐτοῦ ἔχουν γίνει ἀντικείμενο ἐξαντλητικῆς μελέτης; Ἄν αὐτή ἡ δεύτερη εἶναι ἡ ἐπικρατούσα ἄποψη (κι αὐτή πράγματι εἶναι, ἔστω κι ἄν σπανίως δηλώνεται ρητά) τότε εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας στερεῖται ἀντικειμενικῆς βάσης. Μιά ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ἐπιλύσιμη, ἤ ὄχι, ἀνάλογα μέ τά ἑκάστοτε περιεχόμενα τοῦ καταλόγου τῶν εἰδικῶν συναρτήσεων. Τά ὁποῖα, βεβαίως, εἶναι ἱστορικά προσδιορισμένα. Ἄν αὔριο μιά νέα ἐξίσωση προσελκύσει τό ἐνδιαφέρον μας καί ἡ λύση της μελετηθεῖ συστηματικά τότε σίγουρα μιά νέα εἰδική συνάρτηση θά ἔχει γεννηθεῖ καί θά πάρει τή θέση της στόν κατάλογο. Κι ἀπ᾽ αὐτό τό σημεῖο καί μετά, βεβαίως, κάθε διαφορική ἐξίσωση πού ἀνάγεται σ᾽ αὐτήν, καί ἑπομένως οἱ λύσεις της θά μποροῦν νά ἐκφραστοῦν μέσω τῆς νέας εἰδικῆς συνάρτησης, θά θεωρεῖται ἀκριβῶς ἐπιλύσιμη. Προφανῶς καμμιά θεωρία τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας δέν μπορεῖ νά οἰκοδομηθεῖ πάνω σέ μιά τέτοια... κινητή βάση. Τό πρόβλημα τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας δέν εἶναι μαθηματικό πρόβλημα.

Τά παραπάνω ἀποτελοῦν, πιστεύω, ἀντικειμενική περιγραφή μιάς ἄποψης πού εἶναι εὐρύτατα διαδεδομένη ἔστω κι ἄν δέν διατυπώνεται ρητά. Ἀντέχει ὅμως αὐτή ἡ τοποθέτηση σ᾽ ἕνα πιό αὐστηρό ἔλεγχο; Νομίζω πώς ὄχι. Ἀνεξάρτητα ἀπό τίς διαπιστώσεις πού ἔχομε ἤδη κάνει γιά τήν καθαρά μαθηματική σπουδαιότητα τῶν εἰδικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς (εἶναι ὅλες τους διβάθμιες) κάθε σοβαρός χρήστης τῶν λύσεών τους —τῶν εἰδικῶν συναρτήσεων δηλαδή— ξέρει πολύ καλά ὅτι δέν πρόκειται καθόλου γιά τυχαῖες συναρτήσεις. Διαθέτουν ἕνα τόσο πλούσιο σύνολο ἰδιοτήτων ἀλγεβρικῆς φύσεως ὥστε μπορεῖ νά τίς χειρίζεται κανείς μ᾽ ἕνα καθαρά συμβολικό τρόπο χωρίς νά ἀναφέρεται ποτέ στίς ἀριθμητικές τους τιμές. Γιά ἕναν ἔμπειρο χρήστη ἡ συνάρτηση Bessel εἶναι σχεδόν τόσο ἁπλή ὅσο καί τό συνημίτονο. Παραδείγματος χάρη μιά τεράστια ποικιλία ὁλοκληρωμάτων μέ συναρτήσεις Bessel μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν συμβολικά καί νά ἐκφραστεῖ τό ἀποτέλεσμα πάλι μέσω γνωστῶν συναρτησιακῶν συμβόλων. Ἀνεξάρτητα ἀπό θεωρητικές τοποθετήσεις ἕνας ἔμπειρος χρήστης ξέρει πολύ καλά γιατί πρέπει νά αἰσθάνεται εὐτυχής ὅταν βρεῖ ὅτι ἡ λύση ἑνός προβλήματος ἐκφράζεται μέσω συναρτήσεων Bessel. Εἶναι σίγουρος, μ᾽ ἕνα πολύ πρακτικό τρόπο, ὅτι πρόκειται γιά μιά γνώση τῆς λύσης ἀσύγκριτα πλουσιότερη σέ πληροφορία καί δυνατότητες ἀπ᾽ αὐτήν πού θά ἔδινε μιά ἀριθμητική της κατασκευή.

Ἐπανερχόμαστε ἔτσι σέ κάποιες ἐπισημάνσεις πού εἴχαμε κάνει ἀπό πολύ νωρίς σχετικά μέ τή φύση τῶν συναρτήσεων πού δικαιοῦνται νά χαρακτηριστοῦν ὡς *ἀκριβῶς γνωστές* καί νά ἀποτελέσουν τό σημεῖο ἐκκίνησής μας γιά μιά συστηματική θεωρία τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας. Χωρίς νά εἴμαστε σέ θέση ἀκόμα νά προσδιορίσομε μέ ἀκρίβεια τά «προσόντα» αὐτῶν τῶν συναρτήσεων εἴμαστε ὅμως βέβαιοι ὅτι ἡ γνώση τους δέν μπορεῖ νά εἶναι ἁπλῶς ἀριθμητικῆς φύσεως. Μιά ἀκριβῶς γνωστή συνάρτηση εἶναι κάτι περισσότερο ἀπό τόν πίνακα τιμῶν της. Εἶναι μιά ἀλγεβρική ὀντότητα ἐπιδεκτική καθαρά συμβολικῶν χειρισμῶν. Τό κεντρικό ἐρώτημα τοῦ προβλήματος τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας μπορεῖ λοιπόν νά διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς: *Ὑπάρχει ἕνας ἀντικειμενικός τρόπος νά φτάσομε σ' ἕνα σύνολο συναρτήσεων πού θά μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς ἀκριβῶς γνωστές καί ἄρα νόμιμες νά ἐκφράσουν τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων πού (σά ζήτημα ὁρισμοῦ πιά) θά θεωροῦνται ἀκριβῶς ἐπιλύσιμες;*

Ἄς δοῦμε πώς ἀντιμετωπίστηκε αὐτό τό κρίσιμο ἐρώτημα μέχρι τώρα. Ὅπως θυμάστε, ὅλη μας ἡ προσπάθεια γιά τή συστηματική τοποθέτηση τοῦ προβλήματος τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας βασίστηκε στήν πολύ λογική πρώτη σκέψη ὅτι μιά μαθηματική συνάρτηση μπορεῖ νά θεωρηθεῖ *ἀκριβῶς γνωστή* μόνο ἄν δίδεται ἀπό μιά δυναμοσειρά μέ *ἐκπεφρασμένα γνωστό* γενικό συντελεστή. Σημειώσαμε ὅμως ἀμέσως ὅτι αὐτός ὁ ὁρισμός εἶναι κενός περιεχομένου ἐφ' ὅσον δέν ἔχει συμφωνηθεῖ τό ποιές συναρτήσεις ἐπί τῶν ἀκεραίων θά θεωροῦνται γνωστές καί ἑπομένως δεκτές νά ἐκφράσουν τήν ἐξάρτηση τοῦ γενικοῦ συντελεστῆ τῆς σειρᾶς ἀπό τόν ἀκέραιο δείκτη k. Ὑπενθυμίζομε ἀκόμα ὅτι αὐτό τό σοβαρότατο ἐννοιολογικό πρόβλημα μπῆκε ἀμέσως στό «ψυγεῖο» καί ὡς ἀκριβῶς ἐπιλύσιμες ὁρίστηκαν, σέ πρώτη φάση, ἐκεῖνες οἱ ἐξισώσεις τῶν ὁποίων ὁ γενικός συντελεστής τῆς δυναμοσειρᾶς-λύσης προσδιορίζεται ἀπό μιά ἀναδρομική σχέση μέ δύο ὅρους. Ἔμμεσα θεωρήσαμε λοιπόν ὡς γνωστές ἐκεῖνες τίς συναρτήσεις πού ὁ γενικός συντελεστής τῆς δυναμοσειρᾶς τους ὁρίζεται μέσω μιᾶς ἀναδρομικῆς σχέσης δύο ὅρων καί ἀναδρομικό παράγοντα πού εἶναι μιά ρητή συνάρτηση τοῦ k. (Τέτοιοι εἶναι οἱ ἀναδρομικοί παράγοντες πού προκύπτουν ἀπό τίς διβάθμιες ἐξισώσεις). Οἱ συναρτήσεις πού ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτές τίς προδιαγραφές εἶναι, βέβαια, οἱ γνωστές μας *ὑπεργεωμετρικές συναρτήσεις* ${}_pF_q(x)$ μέσω τῶν ὁποίων ἐκφράζονται οἱ λύσεις τῶν διβάθμιων ἐξισώσεων. Ὅμως ἄν ὁρισμένες συναρτήσεις θεωροῦνται γνωστές θά πρέπει νά θεωρηθοῦν ἐπίσης γνωστές καί ὅλες ὅσες παράγονται ἀπ' αὐτές μέ ρητούς ἤ ἀλγεβρικούς τους συνδυασμούς καθώς καί συναρτησιακή σύνθεση, ὅπου ὡς μεταβλητή μιᾶς γνωστῆς συνάρτησης εἶναι μιά ἄλλη γνωστή συνάρτηση. Αὐτός ὁ τρόπος κατασκευῆς τοῦ συνόλου τῶν συναρτήσεων πού θά θεωροῦμε γνωστές εἶναι, βέβαια, ὁ ἴδιος μέ ἐκεῖνον πού χρησιμοποιεῖται γιά τό σύνολο τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων τό ὁποῖο παράγεται ἐπίσης ἀπό ὁρισμένες *βασικές συναρτήσεις* (τριγωνομετρικές, ἐκθετικό, λογάριθμος) μέ ἀλγεβρικές πράξεις(*) καί συναρτησιακή τους σύνθεση.

Ἔχοντας τώρα στή διάθεσή μας ἕναν ἱκανοποιητικό ὁρισμό τοῦ συνόλου τῶν (ἀκριβῶς) γνωστῶν συναρτήσεων (ὑπεργεωμετρικές ὅλων τῶν τάξεων καί οἱ ἀλγεβρικοί ἤ συναρτησιακοί τους συνδυασμοί) μποροῦμε νά ὁρίσομε ὡς ἀκριβῶς ἐπιλύσιμες ἐκεῖνες τίς ἐξισώσεις τῶν ὁποίων οἱ λύσεις ἀνήκουν σ' αὐτό τό σύνολο· εἶναι, δηλαδή, ὑπεργεωμετρικές συναρτήσεις ἤ ἀλγεβρικοί καί συναρτησιακοί συνδυασμοί τους.

(*) Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, ἐξαγωγή ρίζας ὁποιασδήποτε τάξης ἤ γενικότερα ὕψωση σέ τυχοῦσα δύναμη.

Βλέπετε τό διπλό ρόλο πού καλοῦνται νά παίξουν οἱ διβάθμιες ἐξισώσεις στό πρόβλημα τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας; Ἀπό τή μιά μεριά εἶναι ἐκεῖνες οἱ ἐξισώσεις τῶν ὁποίων ἡ ἐπιλυσιμότητα εἶναι ἐμφανής κι ἀπό τήν ἄλλη χρησιμεύουν γιά νά ὁρίσουν, μ' ἕνα τελείως φυσιολογικό τρόπο, τίς βασικές συναρτήσεις μέσω τῶν ὁποίων πρέπει νά ἐκφράζονται οἱ λύσεις ὅλων τῶν ἄλλων ἐπιλύσιμων ἐξισώσεων. Εἶναι σαφές, ὕστερ' ἀπ' αὐτή τή διαπίστωση, ποιά θά εἶναι ἡ στρατηγική ἐπίλυσης τῶν ἐξισώσεων πού εἶναι πάνω ἀπό διβάθμιες. Προφανῶς, ἡ προσπάθεια ἀναγωγῆς τους σέ διβάθμια μορφή μέσω ἀλλαγῶν ἐξαρτημένης καί ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς πού θά πρέπει, βεβαίως, νά ἐκφράζονται κι αὐτές μέσω τῶν συναρτήσεων πού συμφωνήσαμε νά θεωροῦμε γνωστές.

Ἡ μελέτη τῶν *ὑπερδιβάθμιων ἐξισώσεων* πάνω σ' αὐτές τίς γραμμές ἀποτελεῖ λοιπόν τή φυσική συνέχεια τούτης τῆς ἑνότητας ἡ ὁποία ὅμως δέν πρόκειται νά δοθεῖ ἐδῶ. Μια σύντομη περιγραφή τῶν σχετικῶν ἰδεῶν κρίνεται ὅμως ἀναγκαία γιά νά ἀποκτήσει ὁ ἀναγνώστης μιά αἴσθηση τῶν προβλημάτων πού βρίσκονται μπροστά μας. Εὐτυχῶς ἡ πρώτη ἔξοδος ἀπό τόν κόσμο τῶν διβάθμιων ἐξισώσεων εἶναι ἀπροσδόκητα ἁπλή. Διότι, ὅπως ἀποδεικνύεται, ὑπάρχει μιά κατηγορία τριβάθμιων ἐξισώσεων (*συναφεῖς τριβάθμιες* θά τίς ἀποκαλέσομε) οἱ ὁποῖες μποροῦν νά ἀναχθοῦν σέ διβάθμιες μέ μία ἁπλούστατη «κίνηση» πού ἔχει ἐσωτερική σχέση πρός τήν ἐξίσωση πού πᾶμε νά λύσομε. Πρόκειται γιά τήν *«ἀφαίρεση» τῆς ἀσυμπτωτικῆς συμπεριφορᾶς στά ἰδιόμορφα σημεῖα* τήν ὁποία εἴδαμε ἤδη νά δουλεύει κατά τήν ἐπίλυση τῶν (τριβάθμιων) ἐξισώσεων Schrödinger τοῦ προηγούμενου κεφαλαίου. Ἀκόμα πιό σημαντικό: Οἱ συναφεῖς τριβάθμιες ἐξισώσεις εἶναι ἐποπτικά ἀναγνωρίσιμες. Κάθε ἐξίσωση αὐτοῦ τοῦ τύπου προκύπτει ἀπό μία διβάθμια μέ τήν προσθήκη, στόν συντελεστή τοῦ y, ἑνός νέου ὅρου τέτοιου ὥστε ἡ νέα ἐξίσωση νά εἶναι *τριβάθμια μέ ἰσαπέχοντες βαθμούς* καί νά ἔχει τή δομή τῶν ἰδιομορφιῶν(*) τῆς ἀρχικῆς. Ἀπό πρακτική ἄποψη οἱ συναφεῖς τριβάθμιες ἐξισώσεις εἶναι ἰδιαίτερα σημαντικές διότι ἕνα μεγάλο μέρος ἐφαρμοσμένων προβλημάτων ὁδηγεῖ σέ ἐξισώσεις αὐτοῦ τοῦ τύπου. Ἔτσι ἔχει κανείς τή δυνατότητα κατ' ἀρχάς νά ἀναγνωρίσει ἀμέσως ὅτι ἔχει μπροστά του μιά ἐπιλύσιμη ἐξίσωση καί κατόπιν νά τή λύσει μέ μιά τετριμμένη ἐπέκταση τῆς μεθόδου τῆς ἀσυμπτωτικῆς σύγκρισης πού εἴχαμε ἐφαρμόσει στίς διβάθμιες ἐξισώσεις.

Δυστυχῶς τά εὔκολα πράγματα τελειώνουν ἐδῶ. Μετά τίς συναφεῖς τριβάθμιες ἐξισώσεις μπαίνει κανείς στά βαθειά νερά τοῦ προβλήματος τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας. Πῶς μποροῦμε νά ξέρομε γιά κάθε δεδομένη ἐξίσωση ἄν ἔχει

(*) Ἄς σημειώσομε μ' αὐτή τήν εὐκαιρία ὅτι ἡ ἐπιλογή τοῦ ὅρου *ἰδιόμορφο σημεῖο* γιά τήν Ἑλληνική ἀπόδοση τοῦ singular point εἶναι σχεδόν ἐπιβεβλημένη ἀπό τό γεγονός ὅτι θά πρέπει νά ἀποδοθοῦν ταυτόχρονα καί οἱ πολύ κοινοί ὅροι *singularity* καί *singularity structure* οἱ ὁποῖοι ἀπαιτοῦν νά σχηματίζεται καί ἀντίστοιχο ἀφηρημένο οὐσιαστικό ὅπως ἡ *ἰδιομορφία*. Αὐτή ἡ πρόσθετη ἀπαίτηση εἶναι πού κάνει ἀκατάλληλο τόν πολύ ἐπιτυχή κατά τά ἄλλα ὅρο *ἰδιάζον σημεῖο*. Ὅσο γιά τούς ὅρους *ἀνώμαλο*, *κανονικό ἀνώμαλο* καί *μή κανονικό ἀνώμαλο σημεῖο* (*singular*, *regular*, *singular* καί *irregular singular point* ἀντίστοιχα), οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐπίσης χρησιμοποιηθεῖ, δέν θεωρῶ ὅτι εἶναι ἰδιαίτερα εὐτυχεῖς ἐπιλογές.

προέλθει ἀπό μιά διβάθμια, μέ ἀλλαγές ἐξαρτημένης καί ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς, ὁπότε θά μπορεῖ καί νά ἀναχθεῖ σ' αὐτήν; Πῶς δηλαδή θά μποροῦμε νά ξέρομε ἄν ἡ κάθε δεδομένη ἐξίσωση εἶναι ἀκριβῶς ἐπιλύσιμη ἤ ὄχι; Ἡ μελέτη ἐκείνων ἀκριβῶς τῶν ἐξισώσεων τῶν ὁποίων ἡ ἐπιλυσιμότητα δέν εἶναι ἐμφανής ἀλλά πρέπει νά ἀποκαλυφθεῖ (*κρυπτοεπιλύσιμες ἐξισώσεις*) ἀποτελεῖ τό κατ' ἐξοχήν δύσκολο ἀντικείμενο μιᾶς θεωρίας τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας. Καί ὅπως θἄπρεπε νά ἀναμένεται, ἡ ἀπάντηση στό κεντρικό ἐρώτημα αὐτῆς τῆς ἀναζήτησης παραμένει ἀκόμα ζητούμενη. Ἡ ἐπίμονη μελέτη του ὁδήγησε ἐν τούτοις σέ μιά βαθύτερη κατανόηση τῆς φύσεως τῶν μετασχηματισμῶν πού μποροῦν νά ἐπιχειρηθοῦν σέ μιά γραμμική ἐξίσωση καί τοῦ εἴδους τῶν «παραμορφώσεων» πού μπορούν νά προκληθούν σ' αὐτήν χωρίς νά καταστρέψουν τή γραμμικότητά της. Ἡ ἐξίσωση τοῦ Schrödinger ἡ ὁποία ἀποτέλεσε τό διαρκές ἐρέθισμα αὐτῆς τῆς ἀναζήτησης, ἀλλά καί τό πεδίο δοκιμῆς κάθε νέου εὑρήματος, ὑπῆρξε καί ὁ κύριος ὠφελημένος ἀπό τή μελέτη τοῦ προβλήματος τῆς κρυπτοεπιλυσιμότητας. Ἡ συστηματική ἀναζήτηση καί καταγραφή τῶν ἀκριβῶν ἐπιλύσιμων δυναμικῶν τῆς ἐξισώσεως Schrödinger ὁδήγησε τελείως φυσιολογικά σέ μιά γόνιμη συνάντηση μ' ἕνα ἀπό τά σημαντικότερα προβλήματα τῆς μεταπολεμικῆς Μαθηματικῆς Φυσικῆς· τό *ἀντίστροφο πρόβλημα σκέδασης*, τό ὁποῖο βρέθηκε ἀργότερα (ἀπό τή δεκαετία τοῦ ἑξήντα καί μετά) στό ἐπίκεντρο μιᾶς μεγάλης ἐπανάστασης στή θεωρία τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων· τῆς ἐπανάστασης τῶν *solitons*. Ἔτσι, στό τέλος αὐτῆς τῆς πορείας, ὁ ἀναγνώστης θά ἔχει ἔλθει σέ ἐπαφή καί μέ μία ἀπό τίς πιό «θερμές» περιοχές ἔρευνας τῶν ἡμερῶν μας.

Θά ὁλοκληρώσομε τώρα τούτη τή γενική συζήτηση μέ μιά γρήγορη ματιά στό μακρινό ὁρίζοντα τοῦ προβλήματος τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας. Μιά ἀναδρομή στό παρελθόν θά εἶναι κι ἐδῶ χρήσιμη. Καί πρῶτα ἀπ' ὅλα στήν «ἡρωϊκή ἐποχή» τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων πού ἁπλώνεται σέ μιά ὁλόκληρη ἑκατονταετία μετά τήν ἱστορική ἀνακάλυψη τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἀπό τούς Νεύτωνα καί Leibnitz. Σ' ὅλη αὐτή τήν περίοδο —πρακτικά μέχρι τά μέσα τοῦ 18ου αἰῶνα— ἡ ἔννοια τῆς λύσης μιᾶς διαφορικῆς ἐξίσωσης ταυτίζεται ἀπόλυτα μέ τή δυνατότητα νά ἐκφραστεῖ τό ἀποτέλεσμα μ' ἕνα συγκεκριμένο *τύπο*. Δηλαδή μέσω τῶν συναρτήσεων πού ἀποκαλοῦμε σήμερα *στοιχειώδεις*. Στήν πραγματικότητα ἡ ἴδια ἡ ἔννοια τῆς *συνάρτησης* ἦταν τότε συνώνυμη μέ μιά συγκεκριμένη ἔκφραση αὐτῆς τῆς μορφῆς. Κάποτε βέβαια διαπιστώθηκε ὅτι γιά πολλές διαφορικές ἐξισώσεις μιά τέτοια λύση ἦταν ἀδύνατον νά βρεθεῖ καί ἴσως νά μήν ὑπῆρχε κάν. Καί ὁ Liouville φαίνεται νά ἦταν ὁ πρῶτος πού ἀπέδειξε ὅτι αὐτή ἡ ὑποψία ἦταν σωστή παίρνοντας ὡς παράδειγμα τίς διαφορικές ἐξισώσεις τῆς τετριμμένης μορφῆς $y' = f(x)$ πού ἡ λύση τους δίδεται ἀπό τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα $\int f(x)dx$. Γιά συγκεκριμένες στοιχειώδεις συναρτήσεις $f(x)$ —π.χ. τήν $f(x) = \exp(-x^2)$— ὁ Liouville μπόρεσε νά ἀποδείξει ὅτι κάθε προσπάθεια γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἀόριστου ὁλοκληρώματός τους εἶναι μάταιη. Τό ὁλοκλήρωμα δέν εἶναι στοιχειώδης συνάρτηση. Οἱ στοιχειώδεις συναρτήσεις ἀποδείχτηκαν ἔτσι ἕνα πολύ περιορισμένο σύνολο γιά νά μποροῦν νά ἔχουν λύση μέσα σ' αὐτό ἀκόμα καί ἁπλούστατες διαφορικές ἐξισώσεις. Τό ἀποτέλεσμα αὐτοῦ τοῦ ἀδιεξόδου —τό όποῖο βεβαίως εἶχε συνειδητοποιηθεῖ πολύ πρίν τήν τελεσίδικη γνωμάτευση τοῦ Liouville— ἦταν νά ἐγκαταλειφθεῖ πλήρως ἡ προσπάθεια γιά τήν ἐκπεφρασμένη ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων καί ἡ σχετική ἔρευνα νά στραφεῖ πρός διαφορετικές κατευθύνσεις. Πρῶτα στά θεωρήματα ὕπαρξης καί μοναδικότητας τῆς λύσης —ὅπου βέβαια ἡ ἔννοια τῆς συνάρτησης-λύσης εἶναι πιά τελείως γενική καί ἀφηρημένη— καί κατόπιν στή μελέτη τῶν ἀναλυτικῶν της ἰδιοτήτων.

Ποῦ ἀπέβλεπε αὐτή ἡ σύντομη ἱστορική ἀναδρομή; Προφανῶς στό νά συνδέσει τήν τωρινή μας προσπάθεια γιά μιά συστηματική τοποθέτηση τοῦ προβλήματος τῆς ἀκριβοῦς ἐπιλυσιμότητας, μ' ἐκεῖνο τό σημεῖο τῆς ἱστορικῆς ἀνάπτυξης ὅπου ἡ ἀκριβής ἐπίλυση τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων εγκαταλείφθηκε ὡς μαθηματικό ἀντικείμενο. Καί ἐγκαταλείφθηκε, ὅπως εἴδαμε, διότι τό σύνολο τῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων —τό ὁποῖο θεωρήθηκε τότε ὡς «φυσικό»— ἀποδείχτηκε πολύ περιορισμένο γιά νά ἐπιτρέπει νά ἔχουν λύση μέσα σ' αὐτό ἐκτός ἀπό ἐλάχιστες διαφορικές ἐξισώσεις. Στό φῶς αὐτῆς τῆς ἀναδρομῆς ἡ δικιά μας τοποθέτηση ἔχει ἕνα πολύ ἁπλό νόημα: Προτείνομε την διεύρυνση τοῦ ἀρχικοῦ συναρτησιακοῦ συνόλου καί τήν ἀντικατάστασή του ἀπό ἕνα ἄλλο πού νά ἔχει ὅμως μιά καθαρά μαθηματική δικαιολόγηση. Τό σύνολο τῶν ὑπεργεωμετρικῶν συναρτήσεων εἶναι, πιστεύομε, μιά κατάλληλη ἐκλογή. Αὐτή ἡ προβληματική θέτει ὅμως αὐτόματα ἕνα ἄλλο ἐρώτημα. Πῶς ξέρομε ὅτι καί τό νέο σύνολο δέν θά ἀποδειχθεῖ «στενό» καί θά χρειαστεῖ μέ τή σειρά του μιά νέα διεύρυνση; Δέν θἄναι τυχαῖο ἄν αὐτή ἡ διατύπωση φέρει στό νοῦ τοῦ ἀναγνώστη μιά ἄλλη ἱστορία διαδοχικῶν διευρύνσεων. Πρόκειται, βέβαια, γιά τίς διαδοχικές διευρύνσεις πού χρειάστηκε νά γίνουν στό σύστημα τῶν ἀριθμῶν ὥστε ὁλοένα καί περισσότερες ἀλγεβρικές ἐξισώσεις νά ἔχουν λύση μέσα σ' αὐτό. Στήν ἀρχή, ὅπως ξέρετε, ἀριθμοί ἦταν μόνο οἱ *ρητοί.* Γιά νά διαπιστωθεῖ ὅμως σύντομα ἀπό τούς Πυθαγόρειους ὅτι μιά ἁπλούστατη ἐξίσωση —ἡ $x^2 = 2$— δέν ἔχει λύση μέσα σ' αὐτό τό ἀριθμητικό σύνολο. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀποδείχθηκε *ἀσύμμετρη* πρός τίς πλευρές του. Τήν ἀπόκριση τῶν Ἑλλήνων μαθηματικῶν σ' αὐτή τήν κρίση —τήν μεγαλύτερη ἴσως στήν ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν— τήν ξέρετε. Ἀντί νά ἐπιχειρήσουν μιά διεύρυνση τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν, συμπεριλαμβάνοντας καί τούς ἄρρητους μέσα σ' αὐτό, προτίμησαν νά ἐγκαταλείψουν τήν ἀριθμητική καί νά ἐπιστρέψουν στό ἀσφαλές ὀχυρό τῆς γεωμετρίας. Ἡ «σωστή κίνηση» θά γίνει πολύ ἀργότερα καί θά ὁδηγήσει βαθμιαία στή διαμόρφωση τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ξέρετε, βέβαια, ὅτι ἀκόμα καί μέσα σ' αὐτό τό διευρυμένο σύνολο μιά ἁπλούστατη δευτεροβάθμια ἐξίσωση —ἡ $x^2 = -1$— δέν ἔχει λύση. Χρειάστηκε ἔτσι νά περάσομε στούς μιγαδικούς ἀριθμούς γιά νά ἀποδειχθεῖ τελικά ὅτι αὐτή ἡ ὑπόθεση εἶχε ἐκεῖ ἕνα φυσικό τέρμα. Κάθε ἀλγεβρική ἐξίσωση (ὁποιουδήποτε βαθμοῦ) πού οἱ συντελεστές της ἀνήκουν στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει ὅλες της τίς λύσεις (≡ ρίζες) μέσα σ' αὐτό τό σύνολο. Αὐτό εἶναι τό *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ἄλγεβρας* μέ τό ὁποῖο κλείνει ἕνα ἀπό τά πιό συναρπαστικά κεφάλαια τῆς ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν.

Κι αὐτή ἡ ἱστορική ἀναδρομή, ὅπως καί ἡ προηγούμενη, εἶχε ἕναν προφανή σκοπό. Νά ὑποβάλλει στόν ἀναγνώστη τό ἀκόλουθο ἐρώτημα: *Μήπως ἰσχύει καί γιά τίς διαφορικές ἐξισώσεις* —τίς γραμμικές πάντα— *ἕνα θεμελιῶδες θεώρημα ἀντίστοιχο μέ ἐκεῖνο τῆς Ἄλγεβρας;* Μήπως, δηλαδή, ὑπάρχει κι ἐδῶ ἕνα «φυσικό» σύνολο συναρτήσεων τέτοιο ὥστε κάθε διαφορική ἐξίσωση πού οἱ συντελεστές της ἀνήκουν σ᾿ αὐτό νά ἔχει λύση μέσα στό ἴδιο σύνολο;

Θ᾿ ἀφήσομε τόν ἀναγνώστη νά κάνει τίς δικιές του ὑποθέσεις πάνω σ᾿ αὐτά τά «ἐπικίνδυνα» ἐρωτήματα καί θά κρατήσομε τίς δικιές μας γιά περαιτέρω ἐξέταση! Ὁ φόβος τοῦ *εὔκολου ἀντιπαραδείγματος* δέν ἦταν ποτέ κακός σύμβουλος γιά ἕναν Μαθηματικό. Ἕνας Φυσικός θά πρέπει νά τόν αἰσθάνεται διπλά!