ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ III

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ

(Από το βιβλίο Στ. Τραχανάς, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, ΠΕΚ 2005, σελ. 388-390)

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΟΥ ΣΥΜΒΟΛΟΥ: ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΓΑΜΜΑ

Τί κάνομε ὅταν θέλομε νά γενικεύσομε μιά ἔκφραση —ὅπως τό $n!$— πού ὁρίζεται μόνο πάνω στούς ἀκεραίους; Στή γενικότητά της ἡ βασική ἰδέα εἶναι πολύ ἁπλή. Ἀναζητοῦμε μιά ἄλλη ἔκφραση πού νά συμπίπτει μέ τή δεδομένη στό πεδίο τῶν ἀκεραίων ἀλλά νά ἔχει νόημα καί ἔξω ἀπ᾽ αὐτό. Ὑπάρχει ἄραγε μιά τέτοια ἔκφραση γιά τήν περίπτωση τοῦ παραγοντικοῦ συμβόλου; Ὅσοι ἀπό τούς ἀναγνῶστες ἔχει τύχει νά ὑπολογίσουν ὁλοκληρώματα τῆς μορφῆς

$$\int_0^\infty t^\nu e^{-t} dt \tag{1}$$

θά καταλάβουν ἀμέσως ὅτι ἕνα τέτοιο ὁλοκλήρωμα ἔχει ἀκριβῶς τήν ἰδιότητα πού ζητᾶμε. Γιά ἀκέραιο (καί θετικό) ν ἰσοῦται μέ $\nu!$ ἐνῶ ταυτόχρονα ὑπάρχει τουλάχιστον γιά ὅλους τούς θετικούς πραγματικούς ἀριθμούς καί ὁρίζει ἔτσι μιά συγκεκριμένη συνάρτηση τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς ν πού θά τήν ἀποκαλοῦμε στό ἑξῆς *παραγοντική συνάρτηση* καί θά τή συμβολίζομε μέ $\Pi(\nu)$ ἤ ἀκόμα καί μέ $\nu!$. Θἄναι λοιπόν ἐξ ὁρισμοῦ

$$\Pi(\nu) \equiv \nu! = \int_0^\infty t^\nu e^{-t} dt \tag{2}$$

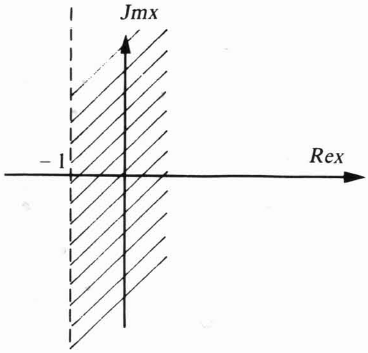
Ἄς κάνομε μιά σύντομη μελέτη τῶν ἰδιοτήτων αὐτῆς τῆς νέας μαθηματικῆς συνάρτησης. Καί πρῶτ᾽ ἀπ᾽ ὅλα ἄς τήν γράψομε ἐπί τό... μαθηματικότερον εἰσάγοντας τή μεταβλητή x στή θέση τῆς ν

$$\Pi(x) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \tag{3}$$

Σημειῶστε τώρα ὅτι αὐτό τό ὁλοκλήρωμα ὑπάρχει γιά πολύ περισσότερα "x" ἀπ᾽ αὐτά πού εἴπαμε προηγουμένως. Κατ᾽ ἀρχάς πάνω στόν πραγματικό ἄξονα ὑπάρχει γιά κάθε x μεγαλύτερο τοῦ -1. (Γιά $x=-1$ τό ὁλοκλήρωμα ἀποκλίνει λογαριθμικά στή γειτονιά τοῦ μηδενός). Ἐπιπλέον ὑπάρχει καί γιά ὅλα τά μιγαδικά x μέ $\mathrm{Re}\, x > -1$ ἀφοῦ οἱ ἰδιότητες σύγκλισης ἐξαρτῶνται μόνο ἀπό τό πραγματικό μέρος τοῦ ἐκθέτη. (Σκεφτεῖτε μόνοι σας γιατί). Τό ὁλοκλήρωμα (3) ὁρίζει λοιπόν μιά συνάρτηση πού εἶναι ἀναλυτική σ᾽ ὁλόκληρη τήν περιοχή πού δείχνεται στό σχῆμα 6. (Ἡ ἀναλυτικότητα ἕπεται ἀπό τό γνωστό θεώρημα ὅτι: *Τό ὁλοκλήρωμα μιᾶς συνάρτησης πού ἐξαρτᾶται ἀναλυτικά ἀπό μιά παράμετρο* *εἶναι μιά ἀναλυτική συνάρτηση αὐτῆς τῆς παραμέτρου).* Ἀπό τόν ὁρισμό (3) μπορεῖτε νά δείξετε μόνοι σας ὅτι ἡ παραγοντική συνάρτηση $\Pi(x)$ (ἤ $x!$) ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\Pi(x+1) = (x+1)\,\Pi(x) \tag{4}$$

πού εἶναι βέβαια ἡ αὐτονόητη ἐπέκταση τῆς ἰδιότητας $(n+1)! = n!(n+1)$ τοῦ παραγοντικοῦ συμβόλου. Ἡ σχέση (4) μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ τώρα γιά νά ὁρίσει τή συνάρτηση $\Pi(x)$ καί στή μή διαγραμμισμένη περιοχή τοῦ σχήματος 6. Πράγματι ἀπό τήν ἰσοδύναμη μορφή τῆς (4)



Σχῆμα 6

$$\Pi(x-1) = \frac{\Pi(x)}{x} \tag{5}$$

φαίνεται ἀμέσως ὅτι μποροῦμε νά μετακινηθοῦμε ὁριζοντίως πρός τά ἀριστερά καί νά ὑπολογίσομε τιμές τῆς $\Pi(x)$ στήν περιοχή $Re x < -1$. Κι ἄν τό κάνομε αὐτό πολλές φορές —προχωρώντας ἕνα βῆμα κάθε φορά— θά καλύψομε ὁλόκληρο τό μιγαδικό ἐπίπεδο τῆς μεταβλητῆς x. Ὁ τύπος γιά n μοναδιαία βήματα πρός τά ἀριστερά εἶναι

$$\Pi(x-n) = \frac{\Pi(x)}{x(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n+1)} \tag{6}$$

Ὅμως οἱ τύποι (5) καί (6) μᾶς λένε ταυτόχρονα καί σέ ποιά σημεῖα ἡ συνάρτηση $\Pi(x)$ θἄχει ἀνωμαλίες. Παραδείγματος χάρη ἀπό τήν (5) βλέπομε ἀμέσως ὅτι θἄναι

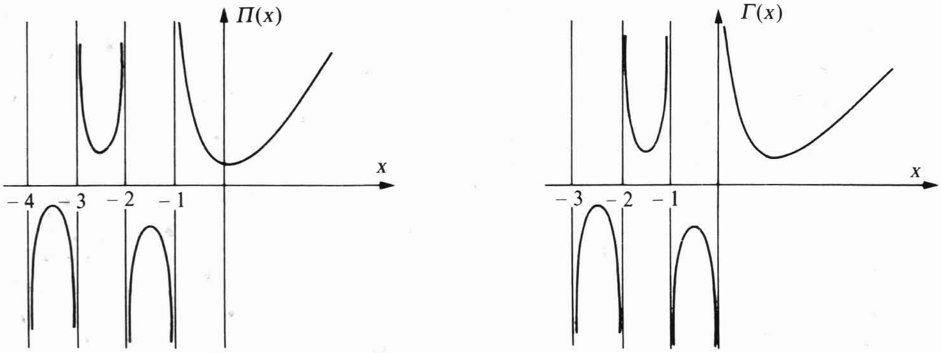
$$\Pi(-1) = \frac{\Pi(0)}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

ὅπου βέβαια $\Pi(0) = \Pi(1)/1 = 1!/1 = 1$. Παρόμοια ἀπό τήν (6) φαίνεται ἐπίσης ὅτι ἡ $\Pi(x)$ ἀπειρίζεται σ' ὅλους τούς ἀρνητικούς ἀκεραίους. Καί ὅπως μπορεῖτε νά δεῖτε μόνοι σας αὐτά τά σημεῖα ἀπειρισμοῦ εἶναι πόλοι καί μάλιστα ἁπλοί. Ἔτσι τό τελικό μας συμπέρασμα εἶναι ὅτι *ἡ $\Pi(x)$ εἶναι μιά συνάρτηση ἀναλυτική σ' ὁλόκληρο τό μιγαδικό ἐπίπεδο μέ ἁπλούς πόλους στά σημεῖα $x = -1, -2, \ldots$.*

Καί ἐρχόμαστε τώρα στή λεγόμενη *συνάρτηση γάμμα* πού στήν πραγματικότητα δέν εἶναι παρά ἕνα διαφορετικό σύμβολο γιά τήν $\Pi(x)$. Συγκεκριμένα εἶναι

$$\Gamma(x) = \Pi(x-1) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \qquad \textit{Συνάρτηση γάμμα}$$

Γιά πραγματικά x οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν $\Pi(x)$ καί $\Gamma(x)$ δίνονται στό σχῆμα 7.



Σχῆμα 7

῞Οπως φαίνεται καί στό σχῆμα ἡ συνάρτηση Γάμμα ἔχει πόλους στά σημεῖα $x = 0, -1, -2, \ldots$. ῞Οσο γιά τή βασική ἰδιότητα (4) αὐτή γράφεται τώρα στή μορφή

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \tag{7}$$

πού εἶναι κάπως κομψότερη ἀπό τήν (4) καί ἴσως σ' αὐτό νά ὀφείλεται ἡ ἐπικράτηση τοῦ συμβόλου $\Gamma(x)$ ἀπέναντι στό $\Pi(x)$. ῎Ας ἀναφέρομε τέλος —χωρίς ἀπόδειξη— μιά πολύ χρήσιμη ἰδιότητα τῆς συνάρτησης Γάμμα ἡ ὁποία ἐμφανίζεται συχνά στίς ἐφαρμογές. Πρόκειται γιά τήν

$$\Gamma(x)\ \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \tag{8}$$

πού γράφεται επίσης σάν

$$\Pi(x)\ \Pi(-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x} \tag{9}$$

῾Η (8) θά σᾶς φανεῖ κάπως εὔλογη —ἄν καί καθόλου προφανής— ἄν σκεφτεῖτε ὅτι τό πρῶτο μέλος ἔχει πόλους σ' ὅλους τούς ἀκεραίους (θετικούς κι ἀρνητικούς) ἀκριβῶς ὅπως καί τό δεύτερο. ῞Οσο γιά τόν ἀριθμητικό παράγοντα π, στόν ἀριθμητή τοῦ δευτέρου μέλους, ἔχει κι αὐτός ἁπλούστατη ἐξήγηση. Σκεφτεῖτε την.