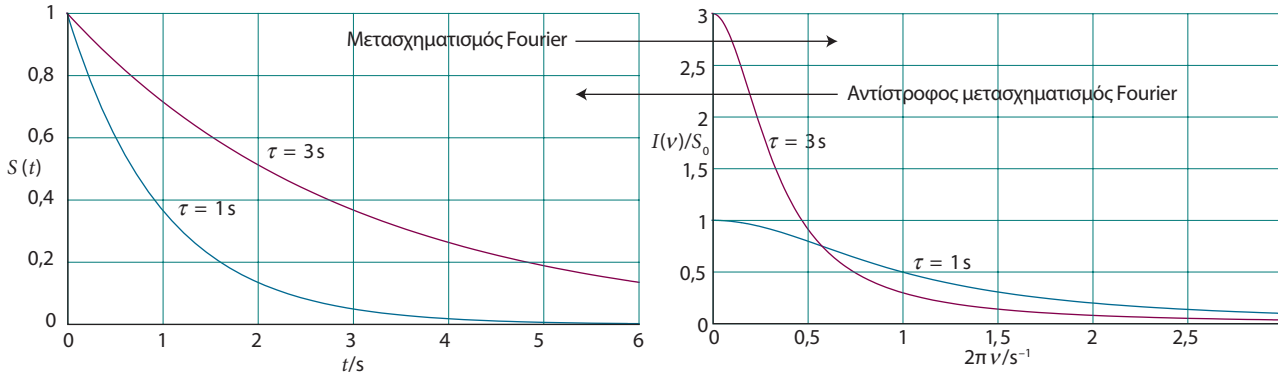
Ο μετασχηματισμός Fourier



Σχέδιο 28.1

Ένας **μετασχηματισμός Fourier** εκφράζει οποιαδήποτε κυματομορφή ως υπέρθεση αρμονικών (ημιτονοειδών και συνημιτονοειδών) κυμάτων. Αν η κυματομορφή είναι η $S(t)$, τότε η συνεισφορά $I(\nu)$ της ταλαντωτικής συνάρτησης $\cos(2\pi\nu t)$ δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$I(\nu)=\int_0^\infty S(t)\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}t \qquad (1)$$

Αν το σήμα μεταβάλλεται αργά, τότε η μεγαλύτερη συνεισφορά προέρχεται από κύματα χαμηλών συχνοτήτων· τα ταχέως μεταβαλλόμενα χαρακτηριστικά στο σήμα αναπαράγονται από υψηλών συχνοτήτων συνεισφορές. Αν το σήμα είναι μια απλή εκθετική μείωση της μορφής $S(t) = S_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$, η συνεισφορά του κύματος με συχνότητα ν είναι

$$I(\nu)=S_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}t=\frac{S_0\tau}{1+(2\pi\nu\tau)^2} \qquad (2)$$

Στο Σχέδιο 28.1 φαίνονται μια ταχεία και μια αργή μείωση και οι αντίστοιχες συνεισφορές στη συχνότητα: προσέξτε ότι μια αργή μείωση έχει κυρίαρχες συνεισφορές χαμηλών συχνοτήτων ενώ μια ταχεία μείωση έχει πολλές συνεισφορές μεγαλύτερων συχνοτήτων.

Αν μια πειραματική διαδικασία καταλήγει στην ίδια τη συνάρτηση $I(\nu)$, τότε το αντίστοιχο σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί σχηματίζοντας τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier**:

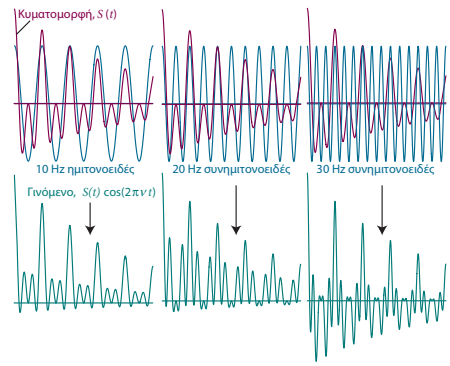
$$S(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty I(\nu)\cos(2\pi\nu t)\mathrm{d}\nu \qquad (3)$$

Υπάρχουν και μιγαδικές εκδοχές αυτών των συνημιτονοειδών μετασχηματισμών, όπως περιγράφουμε παρακάτω.

Οι μετασχηματισμοί Fourier εφαρμόζονται και σε χωρικές συναρτήσεις. Η ερμηνεία τους είναι παρόμοια αλλά είναι πιο σωστό να σκεφτόμαστε με βάση τα μήκη κύματος των κυμάτων που συνεισφέρουν. Έτσι, αν η συνάρτηση μεταβάλλεται αργά με την απόσταση, τότε ο μετασχηματισμός της κατά Fourier έχει κυρίως συνεισφορές μεγάλου μήκους κύματος. Αν τα χαρακτηριστικά μεταβάλλονται ταχέως με την απόσταση (όπως η ηλεκτρονιακή πυκνότητα σε έναν κρύσταλλο), τότε κυριαρχούν οι συνεισφορές από μικρά μήκη κύματος.

Περαιτέρω πληροφορίες

Μπορούμε να αποκτήσουμε μια εικόνα για τη φυσική σημασία της χρήσης του μετασχηματισμού Fourier θεωρώντας τη διαδικασία για την ανάλυση ενός κύματος γενικής μορφής, όπως εκείνο στο άνω τμήμα κάθε μέρους του Σχεδίου 28.2.



Σχέδιο 28.2

Σύμφωνα με την εξ.1, η διαδικασία περιλαμβάνει τον σχηματισμό του γινομένου της κυματομορφής και ενός συνημιτονοειδούς κύματος με συχνότητα ν, και τον προσδιορισμό στη συνέχεια του εμβαδού κάτω από το γινόμενο.

Όταν η $S(t)$ πολλαπλασιαστεί με ένα συνημιτονοειδές κύμα με συχνότητα 10 Hz, οι ταλαντώσεις των δύο συναρτήσεων συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό, με αποτέλεσμα το γινόμενο $S(t)\cos(2\pi\nu t)$ να έχει περισσότερες θετικές από αρνητικές κορυφές, και επομένως μη μηδενικό εμβαδόν. Το κύμα με συχνότητα 10 Hz, έχει επομένως σημαντική συνεισφορά. Όταν η διαδικασία επαναληφθεί με μια συνημιτονοειδή συνάρτηση που ταλαντώνεται στα 20 Hz, το γινόμενο καταλήγει πάλι σε μη μηδενικό εμβαδόν, έτσι μια συνημιτονοειδής συνάρτηση αυτής της συχνότητας έχει επίσης σημαντική συνεισφορά στην αρχική κυματομορφή. Ωστόσο, αν η συχνότητα της συνημιτονοειδούς συνάρτησης είναι 30 Hz, το γινόμενο έχει το ίδιο πλήθος θετικών και αρνητικών κορυφών, και το εμβαδόν είναι πρακτικά μηδέν. Μια συνημιτονοειδής συνάρτηση αυτής της συχνότητας έχει αμελητέα συνεισφορά στην κυματομορφή.

Η πιο γενική διατύπωση ενός μετασχηματισμού Fourier είναι να εκφράσουμε τη συνάρτηση $f(t)$ ως υπέρθεση συναρτήσεων συνημιτόνου και ημιτόνου, όχι μόνο συνημιτόνου. Μπορούμε να χειριστούμε ταυτόχρονα τους δύο τύπους συναρτήσεων χρησιμοποιώντας τη σχέση de Moivre, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, και γράφοντας

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu \qquad (4α)$$

όπου η $\tilde{f}(\nu)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$, και μπορεί να ερμηνευθεί ως το πλάτος της συνεισφοράς των συνημιτονοειδών και των ημιτονοειδών κυμάτων στην υπέρθεση που αναπαράγει τη συνάρτηση $f(t)$. Η αντίστροφη σχέση είναι

$$\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt \qquad (4β)$$

Η συνημιτονοειδής συνεισφορά δίνεται από το πραγματικό μέρος της $\tilde{f}(\nu)$ και η ημιτονοειδής από το φανταστικό.

Σύντομη εφαρμογή 28.1: Ο μετασχηματισμός Fourier ενός ταλαντούμενου, εκθετικά φθίνοντος κύματος

Στο εισαγωγικό μέρος αυτής της Εργαλειοθήκης δείξαμε το αποτέλεσμα ενός συνημιτονοειδούς μετασχηματισμού Fourier για μια εκθετική μείωση. Είναι διδακτικό να θεωρήσουμε τη μιγαδική εκδοχή εκείνου του υπολογισμού και να τη γενικεύσουμε σε μια συνάρτηση που ταλαντώνεται με συχνότητα ν_0 καθώς φθίνει. Προκειμένου να αποφύγουμε την επανάληψη πολλών παραγόντων 2π, θα γράφουμε από εδώ και στο εξής $2\pi\nu = \omega$. Τότε η (μιγαδική) συνάρτηση ως προς χρόνο είναι

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \overbrace{e^{i\omega_0 t}}^{\text{Ταλαντούμενη συνιστώσα}} \overbrace{e^{-t/\tau}}^{\text{Φθίνον εκθετικό}} & \text{για } t \geq 0 \\ 0 & \text{για } t < 0 \end{cases}$$

Το παρατηρούμενο σήμα είναι το πραγματικό μέρος της $f(t)$, έχοντας κατά νου ότι $\mathrm{Re}\, e^{ix} = \cos x$. Δείτε το Σχέδιο 28.3 (στο οποίο φαίνεται επίσης ο μετασχηματισμός Fourier, όπως εξηγούμε παρακάτω). Ο μετασχηματισμός Fourier αυτής της συνάρτησης είναι

$$\tilde{f}(\nu) = \int_0^{\infty} f_0 e^{i\omega_0 t} e^{-t/\tau} e^{-i\omega t}\, dt = f_0 \int_0^{\infty} e^{\{i(\omega_0-\omega)-1/\tau\}t}\, dt \qquad (5)$$

$$= f_0 \frac{e^{\{i(\omega_0-\omega)-1/\tau\}t}}{i(\omega_0-\omega)-1/\tau}\Bigg|_0^{\infty} = f_0 \frac{-1}{i(\omega_0-\omega)-1/\tau} \qquad (6)$$

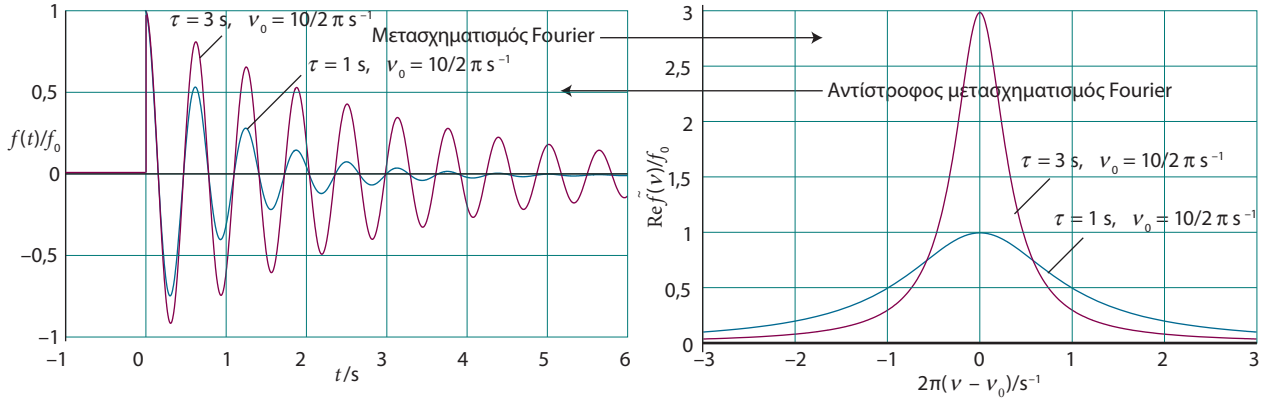
Το κλάσμα στα δεξιά έχει και πραγματικό και φανταστικό μέρος· αυτά μπορούν να εξαχθούν αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον μιγαδικό συζυγή του παρονομαστή

$$\tilde{f}(\nu) = f_0 \frac{-1}{i(\omega_0-\omega)-1/\tau} \times \frac{-i(\omega_0-\omega)-1/\tau}{-i(\omega_0-\omega)-1/\tau} = f_0 \frac{i(\omega_0-\omega)+1/\tau}{(\omega_0-\omega)^2+1/\tau^2} \qquad (7)$$

Το πραγματικό μέρος της $\tilde{f}(\nu)$ είναι επομένως

$$\mathrm{Re}\, \tilde{f}(\nu) = \frac{f_0/\tau}{(\omega_0-\omega)^2+1/\tau^2} = \frac{f_0\tau}{(\omega_0-\omega)^2\tau^2+1}$$

που ουσιαστικά είναι το ίδιο όπως στην εξ. 2 με εξαίρεση ότι η συχνότητα $2\pi\nu = \omega$ έχει αντικατασταθεί από το $\omega_0 - \omega$.



Σχέδιο 28.3