Κεφάλαιο 1

Πίνακες και απαλοιφή Gauss

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα ξεκινήσουμε το βιβλίο με το κεντρικό πρόβλημα της γραμμικής άλγεβρας: την *επίλυση γραμμικών εξισώσεων*. Η σημαντικότερη και απλούστερη περίπτωση είναι όταν το πλήθος των αγνώστων ισούται με το πλήθος των εξισώσεων, δηλαδή όταν έχουμε ***n εξισώσεις με n αγνώστους***, ξεκινώντας με $n = 2$:

$$\begin{array}{lrcrcr} \textbf{Δύο εξισώσεις} & 1x & + & 2y & = & 3 \\ \textbf{Δύο άγνωστοι} & 4x & + & 5y & = & 6. \end{array} \tag{1}$$

Οι άγνωστοι είναι το x και το y. Θα περιγράψουμε δύο τρόπους επίλυσης αυτών των εξισώσεων: την *απαλοιφή* και τις *ορίζουσες*. Ασφαλώς, τα x και y προσδιορίζονται μέσω των αριθμών $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Το ερώτημα είναι πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους έξι αριθμούς για να λύσουμε το σύστημα.

1. Απαλοιφή Αφαιρούμε 4 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη εξίσωση. Με αυτό τον τρόπο απαλείφεται το x από τη δεύτερη εξίσωση και απομένει μία εξίσωση ως προς y:

$$\textbf{(εξίσωση 2)} - \textbf{4 (εξίσωση 1)} \qquad -3y = -6. \tag{2}$$

Έπεται αμέσως ότι $y = 2$. Κατόπιν, το x προκύπτει από την πρώτη εξίσωση $1x + 2y = 3$:

$$\textbf{Ανάδρομη αντικατάσταση} \qquad \text{από την } 1x + 2(2) = 3 \text{ προκύπτει ότι } \quad x = -1. \tag{3}$$

Προχωρώντας προσεκτικά, επιβεβαιώνουμε ότι τα x και y αποτελούν λύση και της δεύτερης εξίσωσης. Αυτό πρέπει να ισχύει και πράγματι ισχύει: 4 επί $(x = -1)$ συν 5 επί $(y = 2)$ ίσον 6.

2. Ορίζουσες Η λύση $y = 2$ προσδιορίζεται πλήρως από τους έξι αριθμούς που περιέχουν οι εξισώσεις. Θα πρέπει να υπάρχει κάποιος τύπος που να δίνει το y (και το x). Ο τύπος αυτός είναι ένας «λόγος οριζουσών» και ελπίζω να μου επιτρέψετε να τον γράψω απευθείας:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 4}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4} = \frac{-6}{-3} = 2. \tag{4}$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να φαίνεται κάπως περίεργος, εκτός αν γνωρίζετε ήδη κάποια πράγματα για τις 2 επί 2 ορίζουσες. Οι ορίζουσες έδωσαν την ίδια απάντηση $y = 2$, η οποία προέκυψε από τον ίδιο λόγο -6 δια -3. Αν συνεχίσουμε την επίλυση χρησιμοποιώντας ορίζουσες (το οποίο δεν σκοπεύουμε να κάνουμε), θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει ένας παρόμοιος τύπος για τον υπολογισμού του άλλου αγνώστου, του x:

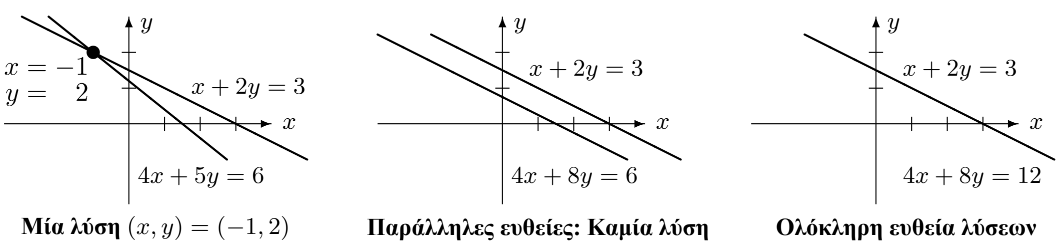
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4}} = \frac{3}{-3} = -1. \tag{5}$$

Ας συγκρίνουμε τις δύο προσεγγίσεις έχοντας κατά νου τα πραγματικά προβλήματα, όπου το n είναι πολύ μεγαλύτερο (η τιμή $n = 1000$ είναι πολύ μετριοπαθής στην υπολογιστική επιστήμη). Η αλήθεια είναι ότι η απευθείας χρήση του τύπου των οριζουσών για 1000 εξισώσεις θα ήταν απόλυτη καταστροφή. Θα χρησιμοποιούσε τους ένα εκατομμύριο αριθμούς που υπάρχουν στα αριστερά μέλη των εξισώσεων σωστά, αλλά όχι αποδοτικά. Θα βρούμε αυτόν τον τύπο (τον κανόνα του Cramer) στο Κεφάλαιο 4, αλλά στο Κεφάλαιο 1 θέλουμε μια καλή μέθοδο για να λύνουμε 1000 εξισώσεις.

Η καλή αυτή μέθοδος είναι η ***απαλοιφή Gauss***. Είναι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται κατά κόρον για την επίλυση μεγάλων συστημάτων εξισώσεων. Αν στηριχτεί κανείς στα παραδείγματα που δίνονται στα διδακτικά βιβλία ($n = 3$ είναι το μέγιστο όριο υπομονής που μπορεί να επιδείξει συγγραφέας και αναγνώστης) ενδέχεται να μην αντιληφθεί σημαντική διαφορά. Οι εξισώσεις (2) και (4) μας έδωσαν $y = 2$ ουσιαστικά μέσω των ίδιων βημάτων. Ασφαλώς, το x προέκυψε πιο γρήγορα μέσω της ανάδρομης αντικατάστασης της εξίσωσης (3) από ό,τι μέσω του λόγου της εξίσωσης (5). Για μεγαλύτερα n δεν τίθεται καν ζήτημα. Η απαλοιφή κερδίζει (και μάλιστα είναι και ο καλύτερος τρόπος υπολογισμού των οριζουσών).

Η ιδέα της απαλοιφής δείχνει εξαιρετικά απλή —μετά από λίγα παραδείγματα θα την έχετε καταλάβει πλήρως. Θα αποτελέσει τη βάση της μισής ύλης του βιβλίου, επιτρέποντάς μας να απλοποιούμε πίνακες έτσι ώστε να μπορούμε να τους κατανοούμε καλύτερα. Μαζί με τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου, στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να εξηγήσουμε και τα εξής τέσσερα βαθύτερης σημασίας ζητήματα:

1. Οι γραμμικές εξισώσεις οδηγούν στη ***γεωμετρία των επιπέδων***. Δεν είναι εύκολο να οπτικοποιήσει κανείς ένα εννεαδιάστατο επίπεδο στον δεκαδιάστατο χώρο. Είναι ακόμη δυσκολότερο να δει δέκα από αυτά τα επίπεδα, που τέμνονται στη λύση των δέκα εξισώσεων —κατά κάποιο τρόπο, όμως, αυτό είναι σχεδόν δυνατό. Στο παράδειγμα του Σχήματος 1.1 έχουμε δύο ευθείες, οι οποίες τέμνονται στο σημείο $(x, y) = (-1, 2)$. Η γραμμική άλγεβρα μεταφέρει αυτή την εικόνα στις δέκα διαστάσεις, όπου πρέπει να αντιληφθούμε τη γεωμετρία μέσω της διαίσθησης (και το κατορθώνουμε).
2. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ***συμβολισμό πινάκων***, γράφοντας τους n αγνώστους σαν ένα



Μία λύση $(x, y) = (-1, 2)$ **Παράλληλες ευθείες: Καμία λύση** **Ολόκληρη ευθεία λύσεων**

Σχήμα 1.1 Το παράδειγμα έχει μία λύση. Οι ιδιόμορφες περιπτώσεις έχουν καμία ή πάρα πολλές.

διάνυσμα x και τις n εξισώσεις σαν $Ax = b$. Θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A με «πίνακες απαλοιφής» ώστε να βρούμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα U. Μέσω αυτών των βημάτων, ο A παραγοντοποιείται στη μορφή L *επί* U, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας. Θα γράψουμε τον A και τους παράγοντές του για την περίπτωση τους παραδείγματός μας και θα τους εξηγήσουμε όταν έρθει η κατάλληλη στιγμή:

$$\textbf{Παραγοντοποίηση} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L} \textbf{ \textit{επί} } \boldsymbol{U}. \tag{6}$$

Αρχικά πρέπει να εισαγάγουμε την έννοια του πίνακα και του διανύσματος, και τους κανόνες πολλαπλασιασμού. Κάθε πίνακας έχει έναν ***ανάστροφο*** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. Ο παραπάνω πίνακας έχει και έναν ***αντίστροφο*** $\boldsymbol{A}^{-1}$.

3. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η απαλοιφή προχωράει χωρίς δυσκολίες. Ο πίνακας έχει αντίστροφο, και το σύστημα $Ax = b$ έχει μία λύση. Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις, η μέθοδος *αποτυγχάνει* —είτε διότι οι εξισώσεις ήταν γραμμένες με λάθος σειρά, το οποίο διορθώνεται εύκολα με αντιμετάθεσή τους, είτε διότι οι εξισώσεις δεν έχουν μοναδική λύση.

Αυτή η ***ιδιόμορφη περίπτωση*** θα εμφανιστεί αν αντικαταστήσουμε το 5 με το 8 στο παράδειγμά μας:

$$\begin{array}{lrcrcr} \textbf{Ιδιόμορφη περίπτωση} & 1x & + & 2y & = & 3 \\ \textbf{Δύο παράλληλες ευθείες} & 4x & + & \mathbf{8}y & = & 6. \end{array} \tag{7}$$

Η απαλοιφή θα αφαιρέσει ανυποψίαστη 4 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη. Κοιτάξτε όμως το αποτέλεσμα!

$$\textbf{(εξίσωση 2)} - \textbf{4 (εξίσωση 1)} \qquad \boxed{0 = -6.}$$

Η ιδιόμορφη αυτή περίπτωση δεν έχει ***καμία λύση***. Άλλες ιδιόμορφες περιπτώσεις έχουν ***άπειρες λύσεις***. (Αν στο παράδειγμα αλλάξουμε το 6 σε 12, η απαλοιφή θα δώσει $0 = 0$, οπότε το y μπορεί να έχει *οποιαδήποτε τιμή*.) Όταν η απαλοιφή αποτυγχάνει, θέλουμε να βρούμε όλες τις δυνατές λύσεις.

4. Χρειαζόμαστε μια χοντρική εκτίμηση του ***πλήθους των βημάτων απαλοιφής*** που απαιτούνται για να λύσουμε ένα σύστημα μεγέθους n. Το πλήθος των πράξεων καθορίζει συχνά την ακρίβεια του μοντέλου. Για εκατό εξισώσεις απαιτούνται ένα τρίτο του εκατομμυρίου βήματα (πολλαπλασιασμοί και αφαιρέσεις). Ο υπολογιστής μπορεί να κάνει εκατομμύρια πράξεις γρήγορα, όχι όμως πολλά τρισεκατομμύρια. Και ύστερα από ένα εκατομμύριο βήματα, το σφάλμα στρογγυλοποίησης μπορεί να είναι ήδη σημαντικό. (Μερικά προβλήματα είναι ευαίσθητα, άλλα όχι.) Χωρίς να υπεισέλθουμε σε όλες τις λεπτομέρειες, θέλουμε να δούμε τα μεγάλα συστήματα που συναντώνται στην πράξη και πώς ακριβώς λύνονται.

Το τελικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου θα είναι ένας όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερος αλγόριθμος απαλοιφής. Πρόκειται ουσιαστικά για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται συστηματικά σε τεράστια ποικιλία εφαρμογών. Και ταυτόχρονα, η κατανόηση του μέσω των *πινάκων* —του πίνακα συντελεστών A, των πινάκων E για την απαλοιφή και P για τις αντιμεταθέσεις γραμμών, και των τελικών παραγόντων L και U— είναι απαραίτητη για τη θεμελίωση της θεωρίας. Ελπίζω ότι θα απολαύσετε το βιβλίο και το μάθημα.

1.2 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

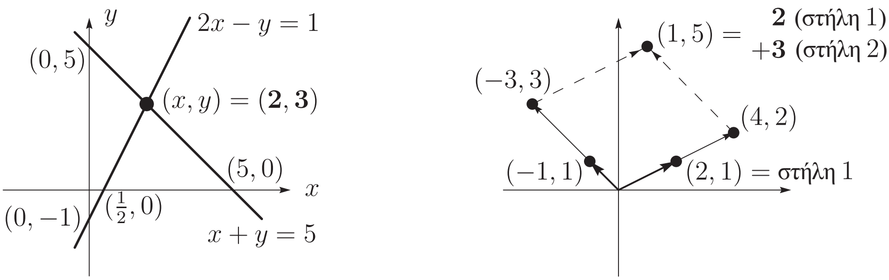
Ο καλύτερος τρόπος να γίνει κατανοητή η γεωμετρία των γραμμικών εξισώσεων είναι μέσω παραδειγμάτων. Θα ξεκινήσουμε με δύο εξαιρετικά ταπεινές εξισώσεις, αναγνωρίζοντας ότι θα μπορούσαμε να τις λύσουμε χωρίς να έχουμε παρακολουθήσει κάποιο μάθημα γραμμικής άλγεβρας. Παρόλα αυτά, ας δώσουμε μια ευκαιρία στον Gauss:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5. \end{aligned}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό το σύστημα *κατά γραμμές ή κατά στήλες*. Θέλουμε να το εξετάσουμε και με τους δύο τρόπους.

Η πρώτη προσέγγιση επικεντρώνεται στις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (τις ***γραμμές***). Είναι η πιο συνηθισμένη και στις δύο διαστάσεις μπορεί να γίνει γρήγορα. Η εξίσωση $2x - y = 1$ αναπαριστάται με μια *ευθεία* στο επίπεδο x-y. Η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $x = 1$, $y = 1$ και $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ (καθώς και από το $(2, 3)$ και από όλα τα ενδιάμεσα σημεία). Η δεύτερη εξίσωση $x + y = 5$ δίνει τη δεύτερη ευθεία (Σχήμα 1.2α). Η κλίση της είναι $dy/dx = -1$ και τέμνει την πρώτη ευθεία στη λύση.

Το σημείο τομής ανήκει και στις δύο ευθείες. Είναι η μοναδική λύση και των δύο εξισώσεων. Θα βρούμε σύντομα αυτό το σημείο $x = 2$ και $y = 3$ μέσω «απαλοιφής».



(α) **Οι ευθείες τέμνονται στο $\boldsymbol{x = 2, y = 3}$**

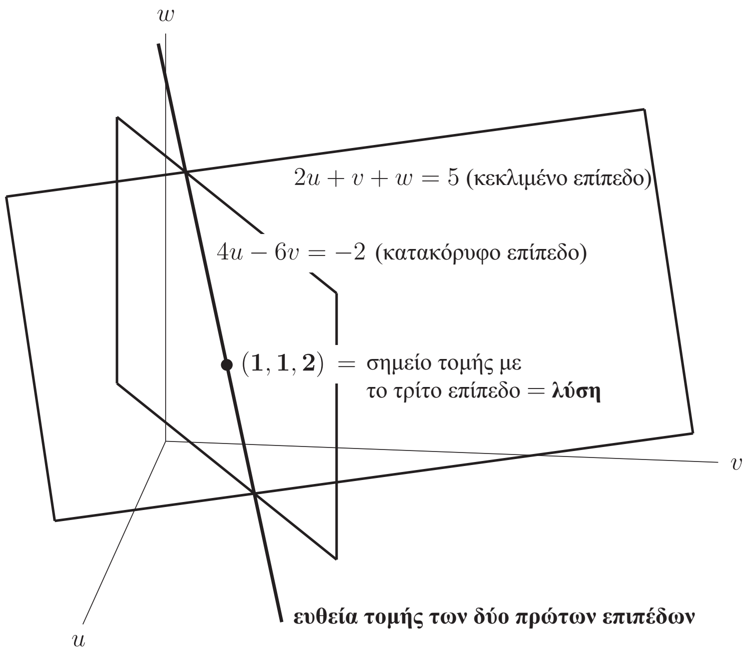
(β) **Οι στήλες συνδυάζονται μέσω του 2 και του 3**

Σχήμα 1.2 Εικόνα γραμμών (δύο ευθείες) και εικόνα στηλών (συνδυασμός στηλών).

Η δεύτερη προσέγγιση επικεντρώνεται στις ***στήλες*** του γραμμικού συστήματος. Οι δύο εξισώσεις αποτελούν ουσιαστικά ***μία διανυσματική εξίσωση***:

$$\textbf{Μορφή στηλών} \qquad x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Το πρόβλημα είναι ***η εύρεση του συνδυασμού των διανυσμάτων στηλών του αριστερού μέλους που παράγουν το διάνυσμα του δεξιού μέλους.*** Τα διανύσματα αυτά, τα $(2, 1)$ και $(-1, 1)$, αναπαριστώνται στο Σχήμα 1.2β με έντονες γραμμές. Οι άγνωστοι είναι οι αριθμοί x και y με τους οποίους πολλαπλασιάζονται τα διανύσματα στήλες. Η ιδέα καταδεικνύεται πλήρως στο σχήμα, όπου το 2 επί στήλη 1 προστίθεται στο 3 επί στήλη 2. Γεωμετρικά, με αυτό τον τρόπο παράγεται ένα διάσημο παραλληλόγραμμο. Αλγεβρικά, παράγεται το σωστό διάνυσμα $(1, 5)$, που σχηματίζουν τα δεξιά μέλη των εξισώσεών μας. Από την εικόνα στηλών



Σχήμα 1.3 Η εικόνα γραμμών: τρία τεμνόμενα επίπεδα από τρεις γραμμικές εξισώσεις.

επιβεβαιώνουμε ότι $x = 2$ και $y = 3$.

Θα μπορούσαμε να ξοδέψουμε περισσότερο χρόνο σε αυτό το παράδειγμα, αλλά είναι προτιμότερο να προχωρήσουμε στην περίπτωση $n = 3$. Τρεις εξισώσεις είναι διαχειρίσιμες, αλλά εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία:

Τρία επίπεδα
$$\begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v \phantom{{}+2w} &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

Μπορούμε και πάλι να μελετήσουμε τις γραμμές ή τις στήλες. Θα ξεκινήσουμε με τις γραμμές. Κάθε εξίσωση περιγράφει ένα ***επίπεδο*** στις τρεις διαστάσεις. Το πρώτο επίπεδο είναι το $2u + v + w = 5$ και έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.3. Περιέχει τα σημεία $(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ και $(0, 0, 5)$. Προσδιορίζεται από οποιαδήποτε τρία σημεία του —αρκεί να μην είναι συνευθειακά.

Αν αλλάζαμε το 5 *σε* 10*, το επίπεδο* $2u+v+w = 10$ *θα ήταν παράλληλο σε αυτό*. Περιέχει τα $(5, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$ και $(0, 0, 10)$, τα οποία απέχουν διπλάσια απόσταση από την αρχή των αξόνων —που είναι το κεντρικό σημείο $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Μεταβάλλοντας το δεξί μέλος μετατοπίζουμε το επίπεδο παράλληλα στον εαυτό του· το επίπεδο $2u + v + w = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Το δεύτερο επίπεδο είναι το $4u - 6v = -2$. Είναι σχεδιασμένο κατακόρυφα, διότι το w μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Ο συντελεστής του w είναι μηδέν, αλλά το επίπεδο παραμένει επίπεδο του τριδιάστατου χώρου. (Η εξίσωση $4u = 3$, ή στην ακραία περίπτωση $u = 0$, θα περιέγραφε και αυτή ένα επίπεδο.) Στο σχήμα παρουσιάζεται η τομή του δεύτερου επιπέδου με το πρώτο. Η τομή είναι μια ευθεία. *Στις τρεις διαστάσεις για την περιγραφή μιας ευθείας απαιτούνται δύο εξισώσεις·* στις n διαστάσεις απαιτούνται $n-1$.

Τέλος, το τρίτο επίπεδο τέμνει αυτή την ευθεία σε ένα σημείο. Το επίπεδο (που δεν είναι σχεδιασμένο) αναπαριστά την τρίτη εξίσωση $-2u + 7v + 2w = 9$ και τέμνει την ευθεία στο $u = 1$, $v = 1$, $w = 2$. Το σημείο αυτό τριπλής τομής $(1, 1, 2)$ είναι η λύση του γραμμικού συστήματος.

Πώς γενικεύεται η εικόνα γραμμών στις n διαστάσεις; Οι n εξισώσεις θα περιέχουν n αγνώστους. Η πρώτη εξίσωση θα προσδιορίζει και πάλι ένα «επίπεδο». Δεν θα είναι πια ένα διδιάστατο επίπεδο του τριδιάστατου χώρου· κατά κάποιο τρόπο θα έχει «διάσταση» $n-1$. Θα πρέπει να είναι ισόπεδο και εξαιρετικά λεπτό εντός του n-διάστατου χώρου, μολονότι σε εμάς θα φαινόταν στερεό.

Αν ο χρόνος είναι η τέταρτη διάσταση, τότε το επίπεδο $t = 0$ διασχίζει τον τετραδιάστατο χώρο και παράγει το τριδιάστατο σύμπαν όπου ζούμε (ή μάλλον το σύμπαν όπως ήταν τη στιγμή $t = 0$). Ένα άλλο επίπεδο είναι το $z = 0$, το οποίο είναι επίσης τριδιάστατο· είναι το σύνηθες επίπεδο x-y για όλες τις χρονικές στιγμές. Αυτά τα τριδιάστατα επίπεδα θα τέμνονται! Και τα δύο περιέχουν το σύνηθες επίπεδο x-y για $t = 0$. Έχουμε κατέβει στις δύο διαστάσεις, και το επόμενο επίπεδο αφήνει μια ευθεία. Τέλος, ένα τέταρτο επίπεδο αφήνει μόνο ένα σημείο, το οποίο είναι το σημείο τομής τεσσάρων επιπέδων στις 4 διαστάσεις και είναι η λύση των τεσσάρων αντίστοιχων εξισώσεων.

Αν συνεχίσω αυτό το παράδειγμα από τη σχετικότητα θα μπλέξω. Η ουσία είναι ότι η γραμμική άλγεβρα δουλεύει με οποιοδήποτε πλήθος εξισώσεων. Η πρώτη εξίσωση παράγει ένα $(n-1)$-διάστατο επίπεδο στις n διαστάσεις. Το δεύτερο επίπεδο (ελπίζουμε ότι) το τέμνει κατά ένα μικρότερο σύνολο «διάστασης $n-2$». Αν θεωρήσουμε ότι όλα θα πάνε καλά, κάθε νέο επίπεδο (κάθε νέα εξίσωση) θα μειώνει τη διάσταση κατά ένα. Στο τέλος, όταν θα έχουμε λάβει υπόψη και τα n επίπεδα, η τομή θα έχει διάσταση μηδέν. Θα είναι ένα *σημείο*, θα ανήκει σε όλα τα επίπεδα και οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν και τις n εξισώσεις. Θα είναι η λύση!

Διανύσματα στήλες και γραμμικοί συνδυασμοί

Ας δούμε τώρα τις στήλες. Αυτή τη φορά, η διανυσματική εξίσωση (η ίδια εξίσωση με την (1)) είναι η εξής:

$$\textbf{Μορφή στηλών} \qquad u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix} = b. \tag{2}$$

Τα παραπάνω είναι *τριδιάστατα διανύσματα στήλες*. ***Το διάνυσμα b ταυτίζεται με το σημείο με συντεταγμένες*** $\mathbf{5, -2, 9}$. Κάθε σημείο του τριδιάστατου χώρου αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα και αντιστρόφως. Αυτή ήταν η ιδέα του Καρτέσιου, ο οποίος μετέτρεψε τη γεωμετρία σε άλγεβρα εργαζόμενος με τις συντεταγμένες των σημείων. Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα σαν μια στήλη, ή να παραθέσουμε τις συνιστώσες του σε μια λίστα γράφοντας $b = (5, -2, 9)$, ή να το αναπαραστήσουμε γεωμετρικά σαν ένα βέλος που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων. Μπορείτε να επιλέξετε *το βέλος*, ή *το σημείο*, ή *τους τρεις αριθμούς*. Στις έξι διαστάσεις είναι μάλλον ευκολότερο να επιλέξει κανείς τους έξι αριθμούς.

Χρησιμοποιούμε παρενθέσεις και κόμματα όταν παραθέτουμε τις συνιστώσες οριζοντίως, και αγκύλες (χωρίς κόμματα) όταν γράφουμε κάθετα ένα διάνυσμα στήλη. Αυτό που έχει πραγματικά σημασία είναι η ***πρόσθεση διανυσμάτων*** και ο ***πολλαπλασιασμός διανύσματος με βαθμωτή ποσότητα*** (με αριθμό). Στο Σχήμα 1.4α βλέπουμε μια πρόσθεση διανυσμάτων κατά συνιστώσες:

$$\textbf{Πρόσθεση διανυσμάτων} \qquad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

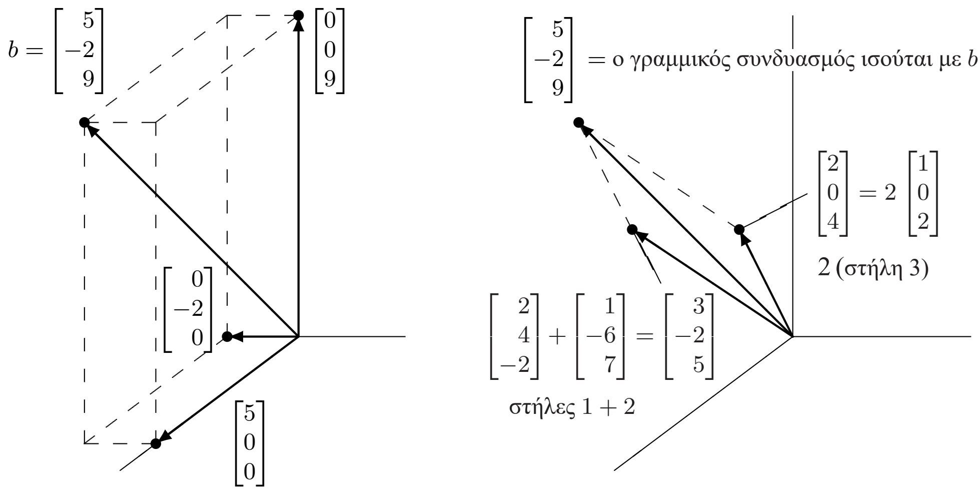
Στο δεξιό σχήμα παρουσιάζεται ένας πολλαπλασιασμός με το 2 (αν ήταν με το -2 το διάνυσμα θα είχε την αντίθετη κατεύθυνση):

$$\textbf{Πολλαπλασιασμός με αριθμούς} \qquad 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Στο δεξιό σχήμα καταδεικνύεται επίσης μια από τις κεντρικές ιδέες της γραμμικής άλγεβρας. Χρησιμοποιούνται *και οι δύο* βασικές πράξεις: τα διανύσματα *πολλαπλασιάζονται με αριθμούς και κατόπιν προστίθενται*. Το αποτέλεσμα καλείται ***γραμμικός συνδυασμός***· ο συνδυασμός αυτός είναι η λύση της εξίσωσής μας:

$$\textbf{Γραμμικός συνδυασμός} \qquad \mathbf{1}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + \mathbf{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Με την εξίσωση (2) αναζητούμε τους πολλαπλασιαστές u, v, w που παράγουν το δεξί μέλος b. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι $u = \mathbf{1}$, $v = \mathbf{1}$, $w = \mathbf{2}$, οι οποίοι δίνουν τον σωστό συνδυασμό των στηλών. Στην εικόνα γραμμών, έδωσαν επίσης το σημείο $(1, 1, 2)$ (το σημείο τομής των τριών επιπέδων).



(α) **Πρόσθεση διανυσμάτων κατά μήκος των αξόνων**

(β) **Πρόσθεση στηλών $\mathbf{1 + 2 + (3 + 3)}$**

Σχήμα 1.4 Η εικόνα στηλών: ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών ισούται με b.

Πραγματικός μας στόχος είναι να φύγουμε από τις δύο ή τρεις διαστάσεις και να προχωρήσουμε στις n διαστάσεις. Όταν έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους, στην εικόνα γραμμών υπάρχουν n επίπεδα. Στην εικόνα στηλών υπάρχουν n διανύσματα συν ένα διάνυσμα b στο δεξί μέλος. Μέσω των εξισώσεων αναζητούμε έναν ***γραμμικό συνδυασμό των n στηλών που να ισούται με b***. Για ορισμένες εξισώσεις θα είναι αδύνατο να βρεθεί τέτοιος συνδυασμός. Παραδόξως, ο καλύτερος τρόπος να κατανοήσουμε την καλή περίπτωση είναι να μελετήσουμε την κακή. Για αυτό θα εξετάσουμε τη γεωμετρία της προβληματικής περίπτωσης, της **ιδιόμορφης περίπτωσης**.

Εικόνα γραμμών: Τομή επιπέδων	***Εικόνα στηλών***: Συνδυασμός στηλών

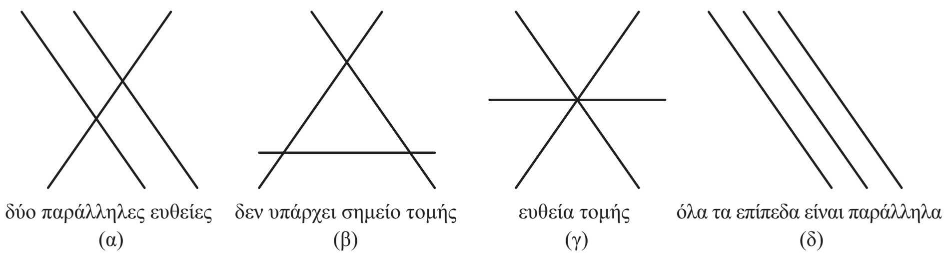
Η ιδιόμορφη περίπτωση

Ας υποθέσουμε πάλι ότι βρισκόμαστε στις τρεις διαστάσεις και ότι τα τρία επίπεδα στην εικόνα γραμμών *δεν τέμνονται*. Τι μπορεί να έχει πάει στραβά; Ένα ενδεχόμενο είναι τα δύο επίπεδα να είναι παράλληλα. Οι εξισώσεις $2u + v + w = 5$ και $4u + 2v + 2w = 11$ είναι ασυμβίβαστες —όταν τα επίπεδα είναι παράλληλα δεν υπάρχει καμία λύση (στο Σχήμα 1.5α παρουσιάζεται μια πλάγια όψη). Στις δύο διαστάσεις, οι παράλληλες ευθείες είναι η μόνο περίπτωση αποτυχίας. Όμως τρία επίπεδα στις τρεις διαστάσεις μπορεί να παρουσιάζουν πρόβλημα χωρίς να είναι παράλληλα.

Η συνηθέστερη δυσκολία παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5β. Ιδωμένα από το πλάι, τα επίπεδα σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Η τομή κάθε ζεύγους επιπέδων είναι μία ευθεία, αλλά οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες. Το τρίτο επίπεδο δεν είναι παράλληλο με τα άλλα επίπεδα, αλλά είναι παράλληλο με την ευθεία της τομής τους. Αυτό αντιστοιχεί στο ιδιόμορφο σύστημα με $b = (2, 5, 6)$:

Καμία λύση, όπως στο Σχήμα 1.5β
$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ 2u + 3w &= 5 \\ 3u + v + 4w &= 6. \end{aligned} \qquad (3)$$

Το άθροισμα των δύο πρώτων αριστερών μελών ισούται με το τρίτο, όμως στο δεξί μέλος δεν συμβαίνει το ίδιο: $2+5 \neq 6$. Εξίσωση 1 συν εξίσωση 2 μείον εξίσωση 3 μας δίνει την αδύνατη σχέση $0 = 1$. Άρα οι εξισώσεις είναι ***ασυμβίβαστες***, όπως θα διαπιστώσουμε συστηματικά μέσω της απαλοιφής Gauss.



Σχήμα 1.5 Ιδιόμορφες περιπτώσεις: καμία λύση για τα (α), (β) και (δ), άπειρο πλήθος λύσεων για το (γ).

Ένα άλλο ιδιόμορφο σύστημα, παρεμφερές με το προηγούμενο, έχει **άπειρο πλήθος λύσεων**. Αν στην τελευταία εξίσωση αλλάξουμε το 6 και το κάνουμε 7, συνδυάζοντας τις τρεις εξισώσεις παίρνουμε $0 = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η τρίτη εξίσωση είναι το άθροισμα των δύο πρώτων, και τα τρία επίπεδα έχουν *κοινή* μια ολόκληρη *ευθεία* (Σχήμα 1.5γ). Η αλλαγή των δεξιών μελών μετατοπίζει τα επίπεδα του Σχήματος 1.5β παράλληλα προς τον εαυτό τους, και για $b = (2, 5, 7)$ η κατάσταση γίνεται ξαφνικά διαφορετική. Το κάτω επίπεδο μετακινήθηκε προς τα πάνω ώσπου να συναντήσει τα άλλα, και πλέον υπάρχει μια ευθεία λύσεων. Το Πρόβλημα 1.5γ είναι και αυτό ιδιόμορφο, αλλά υποφέρει από το ότι έχει ***πάρα πολλές λύσεις*** αντί για πολύ λίγες.

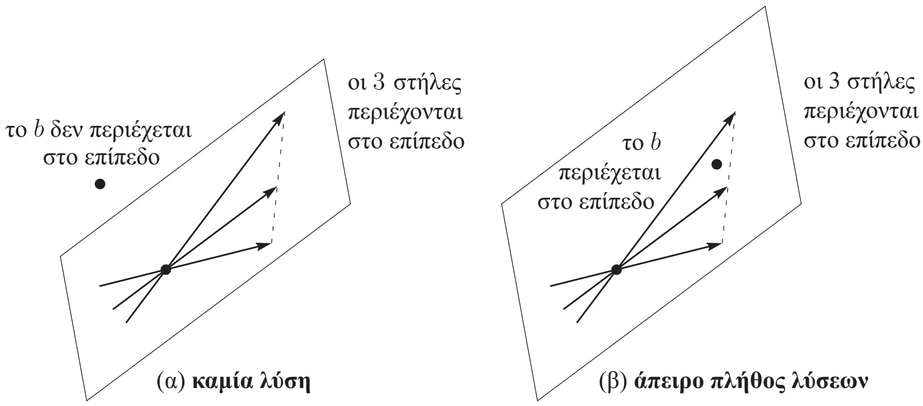
Η ακραία περίπτωση είναι να έχουμε τρία παράλληλα επίπεδα. Για τις περισσότερες περιπτώσεις δεξιών μελών δεν υπάρχει λύση (Σχήμα 1.5δ). Για ειδικές περιπτώσεις δεξιών μελών (όπως για $b = (0, 0, 0)$!) υπάρχει ένα ολόκληρο επίπεδο λύσεων —διότι τα τρία παράλληλα επίπεδα ταυτίζονται.

Τι συμβαίνει με την ***εικόνα στηλών*** όταν το σύστημα είναι ιδιόμορφο; Κάτι πρέπει να πηγαίνει στραβά· το ερώτημα είναι τι. Έχουμε και πάλι τρεις στήλες στο αριστερό μέλος των εξισώσεων και προσπαθούμε να τις συνδυάσουμε ώστε να πάρουμε το b. Ας παραμείνουμε στην εξίσωση (3):

Ιδιόμορφη περίπτωση: Εικόνα στηλών
Τρεις στήλες στο ίδιο επίπεδο
Λύνεται μόνο για b περιεχόμενο στο επίπεδο

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = b. \qquad (4)$$

Για $b = (2, 5, 7)$ το σύστημα είχε λύση, ενώ για $b = (2, 5, 6)$ δεν είχε. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι ***τρεις στήλες ανήκουν σε ένα επίπεδο***, οπότε κάθε συνδυασμός τους περιέχεται επίσης στο ίδιο επίπεδο (το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων). Αν το διάνυσμα b δεν ανήκει σε αυτό το επίπεδο, δεν μπορεί να υπάρχει λύση (Σχήμα 1.6). Αυτό είναι μακράν το πιθανότερο ενδεχόμενο· ένα ιδιόμορφο σύστημα εν γένει δεν έχει λύση. Υπάρχει όμως μια πιθανότητα το b *να περιέχεται* στο επίπεδο των στηλών. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν πάρα πολλές λύσεις· οι τρεις στήλες μπορούν να συνδυαστούν με *άπειρους τρόπους* ώστε να παραγάγουν το b. Η εικόνα στηλών του Σχήματος 1.6β αντιστοιχεί στη εικόνα γραμμών του Σχήματος 1.5γ.



Σχήμα 1.6 Ιδιόμορφες περιπτώσεις: το b ανήκει ή δεν ανήκει στο επίπεδο των τριών στηλών.

Πώς γνωρίζουμε ότι οι τρεις στήλες περιέχονται στο ίδιο επίπεδο; Μια απάντηση είναι να βρούμε έναν συνδυασμό των στηλών που να έχει άθροισμα μηδέν. Ύστερα από μερικές πράξεις, βρίσκουμε ότι αυτός είναι ο $u = 3$, $v = -1$, $w = -2$. Τρία επί στήλη 1 ίσον στήλη 2 συν δύο επί στήλη 3. Η στήλη 1 περιέχεται στο επίπεδο των στηλών 2 και 3. Μόνο δύο από τις στήλες είναι ανεξάρτητες.

Το διάνυσμα $b = (2, 5, 7)$ περιέχεται σε αυτό το επίπεδο των στηλών —ισούται με στήλη 1 συν στήλη 3— άρα το $(1, 0, 1)$ είναι λύση. *Μπορούμε να προσθέσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του συνδυασμού* $(3, -1, -2)$ *που δίνει* $b = 0$. Άρα υπάρχει μια ολόκληρη ευθεία λύσεων —όπως γνωρίζουμε από την εικόνα γραμμών.

Η αλήθεια είναι ότι *γνωρίζαμε* πως ο συνδυασμός των στηλών θα έδινε μηδέν, διότι αυτό συνέβη με τις γραμμές. Πρόκειται για μια μαθηματική αλήθεια και όχι για το αποτέλεσμα κάποιων πράξεων —και ισχύει και στις n διαστάσεις. ***Αν τα n επίπεδα δεν έχουν κανένα ή άπειρα το πλήθος κοινά σημεία, τότε οι n στήλες περιέχονται στο ίδιο επίπεδο***.

Αν η εικόνα γραμμών είναι προβληματική, θα εμφανίζει προβληματική και η εικόνα στηλών. Σε αυτό έγκειται η διαφορά του Κεφαλαίου 1 από το Κεφάλαιο 2. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε το σημαντικότερο πρόβλημα —τη *μη ιδιόμορφη* περίπτωση— όπου υπάρχει μία λύση, η οποία πρέπει να βρεθεί. Στο Κεφάλαιο 2 μελετούμε τη γενική περίπτωση, όπου ενδέχεται να υπάρχουν πολλές λύσεις ή καμία λύση. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε χωρίς τον κατάλληλο συμβολισμό (*συμβολισμό πινάκων*) και έναν ικανοποιητικό αλγόριθμο (*απαλοιφή*). Μετά τις ασκήσεις, θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της απαλοιφής.

Προβλήματα 1.2

1. Σχεδιάστε την εικόνα γραμμών (δύο τεμνόμενες ευθείες) και την εικόνα στηλών (συνδυασμός δύο στηλών που ισούται με το διάνυσμα στήλη $(4, 4)$ του δεξιού μέλους) για τις εξισώσεις $x + y = 4$, $2x - 2y = 4$.

2. Λύνοντας το παρακάτω σύστημα βρείτε έναν συνδυασμό των στηλών που να ισούται με b:

Τριγωνικό σύστημα
$$\begin{aligned} u - v - w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3. \end{aligned}$$

3. (Προτεινόμενο) Περιγράψτε την τομή των τριών επιπέδων $u+v+w+z = 6$, $u+w+z = 4$ και $u+w = 2$ (όλα στον τετραδιάστατο χώρο). Είναι ευθεία, σημείο ή το κενό σύνολο; Ποια είναι η τομή αν συμπεριλάβουμε ως τέταρτο επίπεδο το $u = -1$; Βρείτε μια τέταρτη εξίσωση που έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει λύση.

4. Σχεδιάστε τις παρακάτω τρεις ευθείες και διαπιστώστε αν το σύστημα έχει λύση:

Σύστημα 3 επί 2
$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Τι θα συμβεί αν όλα τα δεξιά μέλη είναι μηδέν; Υπάρχει κάποια μη μηδενική επιλογή για τα δεξιά μέλη που να επιτρέπει στις τρεις ευθείες να τέμνονται στο ίδιο σημείο;

5. Βρείτε δύο σημεία της ευθείας τομής των τριών επιπέδων $t = 0$, $z = 0$ και $x+y+z+t = 1$ στον τετραδιάστατο χώρο.

6. Αν $b = (2, 5, 7)$, βρείτε μια λύση (u, v, w) της εξίσωσης (4) διαφορετική από τη λύση $(1, 0, 1)$ που αναφέρεται στο κείμενο.

7. Γράψτε δύο ακόμη δεξιά μέλη εκτός του $b = (2, 5, 7)$ για τα οποία η εξίσωση (4) έχει λύση. Δώστε δύο ακόμη δεξιά μέλη εκτός του $b = (2, 5, 6)$ για τα οποία δεν έχει λύση.

8. Εξηγήστε γιατί το σύστημα

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ u + 2v + 3w &= 1 \\ v + 2w &= 0 \end{aligned}$$

είναι ιδιόμορφο βρίσκοντας έναν συνδυασμό των τριών εξισώσεων με άθροισμα την $0 = 1$. Με ποια τιμή πρέπει να αντικαταστήσουμε το τελευταίο μηδέν στα δεξιά μέλη ώστε οι εξισώσεις να έχουν λύσεις —και ποια είναι μία από τις λύσεις;

9. Η εικόνα στηλών της προηγούμενης άσκησης (ιδιόμορφο σύστημα) είναι

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Δείξτε ότι οι τρεις στήλες του αριστερού μέλους περιέχονται στο ίδιο επίπεδο εκφράζοντας την τρίτη στήλη σαν συνδυασμό των δύο πρώτων. Βρείτε όλες τις λύσεις (u, v, w) αν το b είναι το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0, 0)$.

10. (Προτεινόμενο) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα y_1, y_2, y_3 ώστε τα σημεία $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2, y_3)$ να ανήκουν σε μια ευθεία;

11. Η $x = y = 0$ είναι σίγουρα λύση των παρακάτω εξισώσεων. Για ποιες τιμές του a υπάρχει ολόκληρη ευθεία λύσεων;

$$\begin{aligned} ax + 2y &= 0 \\ 2x + ay &= 0 \end{aligned}$$

12. Ξεκινώντας από την $x + 4y = 7$, βρείτε την εξίσωση της παράλληλης ευθείας που διέρχεται από το $x = 0$, $y = 0$. Βρείτε την εξίσωση μιας άλλης ευθείας που τέμνει την πρώτη στο $x = 3$, $y = 1$.

Στα Προβλήματα 13–15 γίνεται επανάληψη της εικόνας γραμμών και της εικόνας στηλών.

13. Σχεδιάστε τις δύο εικόνες σε δύο επίπεδα για τις εξισώσεις $x - 2y = 0$, $x + y = 6$.

14. Για δύο γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους x, y, z, η εικόνα γραμμών αποτελείται από (2 ή 3) (ευθείες ή επίπεδα) στον (διδιάστατο ή τριδιάστατο) χώρο. Η εικόνα στηλών είναι στον (διδιάστατο ή τριδιάστατο) χώρο. Οι λύσεις κανονικά ανήκουν σε ______.

15. Για τέσσερις γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x και y, η εικόνα γραμμών αποτελείται από τέσσερ__ ______. Η εικόνα στηλών είναι στον ______-διάστατο χώρο. Οι εξισώσεις δεν έχουν λύση εκτός αν το διάνυσμα του δεξιού μέλους είναι ένας συνδυασμός των ______.

16. Βρείτε ένα σημείο με $z = 2$ στην ευθεία τομής των επιπέδων $x + y + 3z = 6$ και $x - y + z = 4$. Βρείτε το σημείο με $z = 0$ και ένα τρίτο σημείο που ισαπέχει από αυτά.

17. Η πρώτη από τις παρακάτω εξισώσεις συν τη δεύτερη ισούται με την τρίτη:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 5. \end{aligned}$$

Τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται κατά μια ευθεία. Το τρίτο επίπεδο περιέχει αυτή την ευθεία, διότι αν τα x, y, z ικανοποιούν τις δύο πρώτες εξισώσεις τότε ικανοποιούν και ______. Οι εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις (ολόκληρη την ευθεία $\mathbf{L}$). Βρείτε τρεις λύσεις.

18. Μετακινήστε το τρίτο επίπεδο του Προβλήματος 17 στο παράλληλο επίπεδο $2x + 3y + 2z = 9$. Οι τρεις εξισώσεις δεν έχουν πλέον λύση —*γιατί δεν έχουν*; Τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται κατά την ευθεία $\mathbf{L}$, αλλά το τρίτο επίπεδο δεν ______ αυτή την ευθεία.

19. Στο Πρόβλημα 17 οι στήλες είναι $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ και $(1, 1, 2)$. Πρόκειται για «ιδιόμορφη περίπτωση» διότι η τρίτη στήλη είναι ______. Βρείτε δύο συνδυασμούς των στηλών που να δίνουν $b = (2, 3, 5)$. Αυτό είναι δυνατό για $b = (4, 6, c)$ μόνο αν $c =$ ______.

20. Κανονικά, τέσσερα «επίπεδα» στον τετραδιάστατο χώρο τέμνονται σε ______. Κανονικά, τέσσερα διανύσματα στήλες στον τετραδιάστατο χώρο μπορούν να συνδυαστούν ώστε να παραγάγουν το b. Από ποιον συνδυασμό των $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ παράγεται το $b = (3, 3, 3, 2)$; Ποιες είναι οι τέσσερις εξισώσεις ως προς x, y, z, t που λύνετε;

21. Όταν προσθέτουμε την εξίσωση 1 στην εξίσωση 2, ποιο από τα εξής αλλάζει: τα επίπεδα στην εικόνα γραμμών, η εικόνα στηλών, ο πίνακας συντελεστών ή η λύση;

22. Αν το (a, b) είναι πολλαπλάσιο του (c, d) με $abcd \neq 0$, *δείξτε ότι το* (a, c) *είναι πολλαπλάσιο του* (b, d). Αυτό είναι απρόσμενα σημαντικό: καλέστε το ερώτημα πρόκληση. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αρχικά αριθμούς για να δείτε πώς σχετίζονται τα a, b, c και d. Το ερώτημα οδηγεί στο εξής:

$$\text{Αν ο } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ έχει εξαρτώμενες γραμμές τότε έχει εξαρτώμενες στήλες.}$$

23. Στις παρακάτω εξισώσεις, η τρίτη στήλη (με την οποία πολλαπλασιάζεται το w) είναι *ίδια* με το δεξί μέλος b. Ποια λύση για τα (u, v, w) προκύπτει *αμέσως* από τη μορφή στηλών των εξισώσεων;

$$\begin{aligned} 6u + 7v + 8w &= 8 \\ 4u + 5v + 9w &= 9 \\ 2u - 2v + 7w &= 7. \end{aligned}$$

1.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS

Ο καλύτερος τρόπος να κατανοήσει κανείς την απαλοιφή είναι μέσω παραδειγμάτων. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα στις τρεις διαστάσεις:

$$\textbf{Αρχικό σύστημα} \qquad \begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v \phantom{{}+2w} &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

Το ζητούμενο είναι να βρούμε τις άγνωστες τιμές των u, v και w, και θα το κάνουμε εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss. (Ο Gauss θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός, αλλά σίγουρα όχι για αυτή την ανακάλυψη, η οποία πιθανώς να του πήρε δέκα λεπτά. Κατά ειρωνεία της τύχης, είναι η συχνότερα χρησιμοποιούμενη από όλες τις ιδέες που φέρουν το όνομά του.) Η μέθοδος ξεκινάει με την ***αφαίρεση πολλαπλασίων της πρώτης εξίσωσης από τις άλλες εξισώσεις***. Στόχος είναι να *απαλείψουμε το u από τις δύο τελευταίες εξισώσεις*. Για αυτό απαιτείται

(α) να αφαιρέσουμε 2 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη,
(β) να αφαιρέσουμε -1 επί την πρώτη εξίσωση από την τρίτη.

$$\textbf{Ισοδύναμο σύστημα} \qquad \begin{aligned} \mathbf{2}u + v + w &= 5 \\ - \mathbf{8}v - 2w &= -12 \\ 8v + 3w &= 14. \end{aligned} \tag{2}$$

Ο συντελεστής 2 είναι ο ***πρώτος οδηγός***. Στην απαλοιφή υπολογίζουμε διαρκώς το πηλίκο των αριθμών που βρίσκονται κάτω από τον οδηγό δια τον οδηγό ώστε να βρούμε τους σωστούς πολλαπλασιαστές.

Ο οδηγός **του δεύτερου βήματος της απαλοιφής** είναι το -8. Σε αυτό το βήμα αγνοούμε την πρώτη εξίσωση. Θα αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο της δεύτερης εξίσωσης από τις εξισώσεις που απομένουν (στην προκειμένη περίπτωση υπάρχει μόνο η τρίτη) ώστε να απαλείψουμε το v. Προσθέτουμε τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη ή, με άλλα λόγια,

(γ) αφαιρούμε -1 επί τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Η διαδικασία της απαλοιφής έχει ολοκληρωθεί, τουλάχιστον κατά την «ορθόδρομη» φορά:

$$\textbf{Τριγωνικό σύστημα} \qquad \begin{aligned} \mathbf{2}u + v + w &= 5 \\ - \mathbf{8}v - 2w &= -12 \\ \mathbf{1}w &= 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Το σύστημα λύνεται ανάδρομα, από κάτω προς τα πάνω. Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $w = 2$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε $v = 1$. Κατόπιν, από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $u = 1$. Η διαδικασία αυτή καλείται ***ανάδρομη αντικατάσταση***.

Επαναλαμβάνουμε: Κατά την ορθόδρομη απαλοιφή πήραμε τους οδηγούς $2, -8, 1$. Αφαιρέσαμε πολλαπλάσια κάθε γραμμής από τις γραμμές που βρίσκονταν από κάτω της. Φτάσαμε στο «τριγωνικό» σύστημα (3), το οποίο λύνεται κατά αντίστροφο τρόπο: Αντικαθιστούμε κάθε νέα τιμή που υπολογίζουμε στις εξισώσεις που περιμένουν.

Παρατήρηση Ένας καλός τρόπος να γράφουμε τα βήματα της ορθόδρομης απαλοιφής είναι να περιλαμβάνουμε το δεξί μέλος σαν μια επιπλέον στήλη. Δεν χρειάζεται να ξαναγράφουμε τα u, v και w και το $=$ σε κάθε βήμα, οπότε απομένουν τα απολύτως ελάχιστα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Στο τέλος έχουμε το τριγωνικό σύστημα, έτοιμο για την ανάδρομη αντικατάσταση. Μπορείτε να προτιμήσετε αυτόν τον τρόπο γραφής, ο οποίος διασφαλίζει ότι οι πράξεις στο αριστερό μέλος των εξισώσεων γίνονται και στο δεξί μέλος —επειδή *και τα δύο μέλη εμφανίζονται μαζί.*

Σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα, τη μεγαλύτερη προσπάθεια απαιτεί η ορθόδρομη απαλοιφή. Χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης για να παραγάγουμε μηδενικά κάτω από τον πρώτο οδηγό. Στη συνέχεια μηδενίζουμε τη δεύτερη στήλη κάτω από τον δεύτερο οδηγό. Το ορθόδρομο στάδιο ολοκληρώνεται όταν το σύστημα γίνει τριγωνικό· η εξίσωση n περιέχει μόνο τον τελευταίο άγνωστο πολλαπλασιασμένο με τον τελευταίο οδηγό. Η ανάδρομη αντικατάσταση μας δίνει την πλήρη λύση κατά αντίστροφη σειρά —παίρνουμε πρώτα τον τελευταίο άγνωστο, κατόπιν λύνουμε ως προς τον προτελευταίο, μέχρι να φτάσουμε τελικά στον πρώτο.

Εξ ορισμού, οι ***οδηγοί δεν μπορούν να είναι μηδέν***. Πρέπει να διαιρέσουμε με αυτούς.

Η αποτυχία της απαλοιφής

Υπό ποιες συνθήκες μπορεί να αποτύχει αυτή η διαδικασία; Κάτι *πρέπει* να πάει στραβά στην ιδιόμορφη περίπτωση και κάτι *ενδέχεται* να πάει στραβά στη μη ιδιόμορφη περίπτωση. Η συζήτηση αυτή ίσως φαίνεται λίγο πρόωρη —στο κάτω κάτω μόλις κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο που δουλεύει. Ωστόσο, το ενδεχόμενο της αποτυχίας μάς βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα την ίδια τη μέθοδο.

Η απάντηση είναι η εξής: Αν έχουμε ένα πλήρες σύνολο n οδηγών, υπάρχει μόνο μία λύση. Το σύστημα είναι μη ιδιόμορφο και λύνεται με ορθόδρομη απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση. Ωστόσο, ***αν εμφανιστεί μηδέν*** στη θέση κάποιου οδηγού, η απαλοιφή πρέπει να διακοπεί —είτε προσωρινά είτε οριστικά. Το σύστημα ενδέχεται να είναι ή να μην είναι ιδιόμορφο.

Αν ο πρώτος συντελεστής, στη επάνω αριστερή γωνία, είναι μηδέν, η απαλοιφή του u από τις υπόλοιπες εξισώσεις είναι αδύνατη. Το ίδιο ισχύει σε κάθε ενδιάμεσο στάδιο. Επισημαίνουμε ότι ένα μηδενικό μπορεί να εμφανιστεί σε θέση οδηγού ακόμα και αν ο αρχικός συντελεστής στη συγκεκριμένη θέση δεν ήταν μηδέν. Σε γενικές γραμμές, ***δεν γνωρίζουμε αν θα εμφανιστεί κάποιο μηδενικό πριν κάνουμε τις πράξεις***, εκτελώντας τη διαδικασία της απαλοιφής.

Σε πολλές περιπτώσεις, το πρόβλημα μπορεί να θεραπευτεί και η απαλοιφή μπορεί να προχωρήσει. Ένα τέτοιο σύστημα θεωρείται μη ιδιόμορφο· αυτό που πρέπει να διορθωθεί είναι μόνο ο αλγόριθμος. Σε άλλες περιπτώσεις, η αποτυχία είναι αναπόφευκτη. Τα συστήματα αυτά, όπου το πρόβλημα δεν μπορεί να θεραπευτεί, είναι ιδιόμορφα, δεν έχουν καμία λύση ή έχουν άπειρες λύσεις, και δεν μπορεί να βρεθεί πλήρες σύνολο οδηγών.

Παράδειγμα 1 Μη ιδιόμορφο σύστημα (θεραπεία με αντιμετάθεση των εξισώσεων 2 και 3)

$$\begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 2u + 2v + 5w &= \_\_ \\ 4u + 6v + 8w &= \_\_ \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 3w &= \_\_ \\ 2v + 4w &= \_\_ \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 2v + 4w &= \_\_ \\ 3w &= \_\_ \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι πλέον τριγωνικό και λύνεται με ανάδρομη αντικατάσταση.

Παράδειγμα 2 Ιδιόμορφο σύστημα (μη θεραπεύσιμο)

$$\begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 2u + 2v + 5w &= \_\_ \\ 4u + 4v + 8w &= \_\_ \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 3w &= \_\_ \\ 4w &= \_\_ \end{aligned}$$

Όποια αντιμετάθεση εξισώσεων και να κάνουμε, δεν μπορούμε να αποφύγουμε την εμφάνιση του μηδενός στη δεύτερη θέση οδηγού. Οι εξισώσεις μπορεί να έχουν ή να μην έχουν λύση. Αν οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι $3w = 6$ και $4w = 7$, δεν υπάρχει λύση. Αν τύχει οι δύο αυτές εξισώσεις να είναι συμβιβαστές —όπως στην περίπτωση των $3w = 6$ και $4w = 8$— το ιδιόμορφο αυτό σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Γνωρίζουμε ότι $w = 2$, αλλά η πρώτη εξίσωση δεν μπορεί να καθορίσει και το u και το v.

Στην Ενότητα 1.5 θα μελετήσουμε τις αντιμεταθέσεις γραμμών σε μη ιδιόμορφα συστήματα. Μέσω των αντιμεταθέσεων αυτών παίρνουμε ένα πλήρες σύνολο οδηγών. Στο Κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την ιδιόμορφη περίπτωση και θα δούμε πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κάπως την απαλοιφή. Θα δούμε ότι το $3w$ μπορεί να απαλείψει το $4w$ και θα καλέσουμε το 3 δεύτερο οδηγό. (Δεν θα υπάρξει τρίτος οδηγός.) Προς το παρόν θα θεωρήσουμε ότι και οι n οδηγοί είναι μη μηδενικοί, χωρίς να χρειάζεται αλλαγή της σειράς των εξισώσεων. Αυτή είναι η καλύτερη περίπτωση, με την οποία θα συνεχίσουμε.

Το κόστος της απαλοιφής

Το επόμενό μας ερώτημα είναι εντελώς πρακτικό. *Πόσες αριθμητικές πράξεις απαιτεί η απαλοιφή, για n εξισώσεις με n αγνώστους;* Αν το n είναι μεγάλο, την απαλοιφή δεν θα την εκτελέσουμε εμείς αλλά κάποιος υπολογιστής. Αφού όλα τα βήματα είναι γνωστά, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προβλέψουμε το πλήθος των πράξεων.

Προς το παρόν θα αγνοήσουμε τα δεξιά μέλη των εξισώσεων και θα μετρήσουμε τις πράξεις μόνο στα αριστερά μέλη. Οι πράξεις αυτές είναι δύο ειδών. Διαιρούμε με τον οδηγό για να βρούμε ποιο πολλαπλάσιο (έστω ℓ) της εξίσωσης οδηγού πρέπει να αφαιρέσουμε. Όταν κάνουμε αυτή την αφαίρεση, συναντάμε διαρκώς έναν συνδυασμό «πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης»· οι όροι της εξίσωσης οδηγού πολλαπλασιάζονται με ℓ και κατόπιν αφαιρούνται από κάποια άλλη εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε κάθε διαίρεση και κάθε πολλαπλασιασμό–αφαίρεση ως μία πράξη. Στη στήλη 1, *χρειαζόμαστε n πράξεις για κάθε μηδέν που επιτυγχάνουμε* —μία για να βρούμε το πολλαπλάσιο ℓ, και τις υπόλοιπες για να βρούμε τα νέα στοιχεία που θα περιέχει η γραμμή. Υπάρχουν $n - 1$ γραμμές κάτω από την πρώτη, άρα το πρώτο στάδιο της απαλοιφής απαιτεί $n(n-1) = n^2 - n$ πράξεις. (Μια άλλη προσέγγιση για το $n^2 - n$ είναι η εξής: *Πρέπει να αλλάξουμε και τα n^2 στοιχεία, εκτός των n της πρώτης γραμμής.*) Καθώς προχωράμε τα στάδια γίνονται ταχύτερα διότι οι εξισώσεις είναι μικρότερες.

Όταν έχουν απομείνει k εξισώσεις για την απαλοιφή, χρειαζόμαστε μόνο $k^2 - k$ πράξεις για να μηδενίσουμε τη στήλη που βρίσκεται κάτω από τον οδηγό —με βάση τον ίδιο συλλογισμό που χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο στάδιο, όταν το k ήταν ίσο με n. Τελικά, το συνολικό πλήθος των πράξεων είναι το άθροισμα των $k^2 - k$ για όλες τις τιμές του k από 1 έως n:

$$\textbf{Αριστερό μέλος} \qquad (1^2 + \cdots + n^2) - (1 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Χρησιμοποιήσαμε τους γνωστούς τύπους για το άθροισμα των n πρώτων αριθμών και των n πρώτων τετραγώνων. Αντικαθιστώντας $n = 1$, $n = 2$ και $n = 100$ στον τύπο $\frac{1}{3}(n^3 - n)$, διαπιστώνουμε ότι η ορθόδρομη απαλοιφή μπορεί να χρειαστεί κανένα βήμα, δύο βήματα ή περίπου ένα τρίτο του εκατομμυρίου βήματα:

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, ***μια καλή εκτίμηση του πλήθους των πράξεων είναι $\frac{1}{3}n^3$***.

Αν διπλασιαστεί το μέγεθος, και λίγοι από τους συντελεστές είναι μηδέν, το κόστος οκταπλασιάζεται.

Η ανάδρομη αντικατάσταση είναι πολύ ταχύτερη. Ο τελευταίος άγνωστος προκύπτει με μόνο μία πράξη (με διαίρεση με τον τελευταίο οδηγό). Για τον προτελευταίο άγνωστο απαιτούνται δύο πράξεις κ.ο.κ., άρα το συνολικό πλήθος πράξεων της ανάδρομης αντικατάστασης είναι $1 + 2 + \cdots + n$.

Η ορθόδρομη απαλοιφή ενεργεί και στο δεξί μέλος (αφαιρώντας τα ίδια πολλαπλάσια όπως στο αριστερό μέλος ώστε να διατηρηθεί η ορθότητα των εξισώσεων), ξεκινώντας με $n - 1$ αφαιρέσεις της πρώτης εξίσωσης. Συνολικά, ***το δεξί μέλος είναι υπεύθυνο για n^2 πράξεις*** —πολύ λιγότερες από τις $n^3/3$ του αριστερού μέλους. Το σύνολο για την ορθόδρομη απαλοιφή και την ανάδρομη αντικατάσταση είναι

$$\textbf{Δεξί μέλος} \qquad [(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] + [1 + 2 + \cdots + n] = n^2.$$

Πριν από τριάντα χρόνια, σχεδόν όλοι οι μαθηματικοί θα πίστευαν ότι ένα γενικό σύστημα μεγέθους n δεν μπορεί να λυθεί με πολύ λιγότερους από $n^3/3$ πολλαπλασιασμούς. (Υπήρχαν μέχρι και θεωρήματα που το αποδείκνυαν, τα οποία όμως δεν λάμβαναν υπόψη όλες τις δυνατές μεθόδους.) Όλως παραδόξως, αυτό αποδείχθηκε λάθος. *Σήμερα υπάρχει μια μέθοδος που απαιτεί μόνο $Cn^{\log_2 7}$ πολλαπλασιασμούς*! Στηρίζεται σε ένα απλό γεγονός: Δύο συνδυασμοί δύο διανυσμάτων στον διδιάστατο χώρο φαίνεται να απαιτούν 8 πολλαπλασιασμούς, αλλά μπορούν να γίνουν με 7. Αυτό έριξε τον εκθέτη από το $\log_2 8$, το οποίο ισούται με 3, στο $\log_2 7 \approx 2{,}8$. Η συγκεκριμένη ανακάλυψη προκάλεσε μια απίστευτη κινητικότητα για την εύρεση της μικρότερης δυνατής δύναμης του n. Τελικά, ο εκθέτης έπεσε (στην IBM) κάτω από το 2,376. Ευτυχώς για την απαλοιφή, η σταθερά C είναι τόσο μεγάλη και ο προγραμματισμός της μεθόδου τόσο περίπλοκος που η νέα μέθοδος έχει κυρίως (ή αποκλειστικά) θεωρητικά αξία. Το νεότερο πρόβλημα είναι το κόστος όταν χρησιμοποιούνται *πολλοί παράλληλοι επεξεργαστές*.

Προβλήματα 1.3

Τα προβλήματα 1–9 αφορούν την απαλοιφή σε 2 επί 2 συστήματα.

1. Ποιο πολλαπλάσιο ℓ της εξίσωσης 1 πρέπει να αφαιρεθεί από την εξίσωση 2;

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 10x + 9y &= 11. \end{aligned}$$

Γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα που προκύπτει μετά από αυτό το βήμα απαλοιφής και κυκλώστε τους δύο οδηγούς. Οι αριθμοί 1 και 11 δεν επηρεάζουν αυτούς τους οδηγούς.

2. Λύστε το τριγωνικό σύστημα του Προβλήματος 1 με ανάδρομη αντικατάσταση, υπολογίζοντας πρώτα το y και μετά το x. Επαληθεύστε ότι x επί $(2, 10)$ συν y επί $(3, 9)$ ίσον $(1, 11)$. Ποια θα είναι η νέα λύση αν το δεξί μέλος γίνει $(4, 44)$;

3. Ποιο πολλαπλάσιο της εξίσωσης 2 πρέπει να *αφαιρεθεί* από την εξίσωση 3;

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ -x + 5y &= 0. \end{aligned}$$

Λύστε το τριγωνικό σύστημα που προκύπτει μετά από αυτό το βήμα απαλοιφής. Ποια θα είναι η λύση αν το δεξί μέλος γίνει $(-6, 0)$;

4. Ποιο πολλαπλάσιο ℓ της εξίσωσης 1 πρέπει να αφαιρεθεί από την εξίσωση 2;

$$\begin{aligned} ax + by &= f \\ cx + dy &= g. \end{aligned}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι το a (θεωρούμε ότι δεν είναι μηδέν). Ποιον τύπο μάς δίνει η απαλοιφή για τον δεύτερο οδηγό; Ποιο είναι το y; Δεν υπάρχει δεύτερος οδηγός όταν $ad = bc$.

5. Επιλέξτε ένα δεξί μέλος για το οποίο να μην υπάρχει λύση και ένα δεξί μέλος για το οποίο να υπάρχουν άπειρες λύσεις. Αναφέρετε δύο από αυτές τις λύσεις.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ 6x + 4y &= \underline{\quad}. \end{aligned}$$

6. Επιλέξτε έναν συντελεστή b που να κάνει το παρακάτω σύστημα ιδιόμορφο. Κατόπιν, επιλέξτε ένα δεξί μέλος g που να κάνει το σύστημα να έχει λύση. Βρείτε δύο λύσεις αυτού της ιδιόμορφου συστήματος.

$$\begin{aligned} 2x + by &= 16 \\ 4x + 8y &= g. \end{aligned}$$

7. Για ποιους αριθμούς a αποτυγχάνει η απαλοιφή (α) οριστικά και (β) προσωρινά;

$$\begin{aligned} ax + 3y &= -3 \\ 4x + 6y &= 6. \end{aligned}$$

Λύστε ως προς x και y αφού υπερβείτε τη δεύτερη αποτυχία μέσω μιας αντιμετάθεσης γραμμών.

8. Βρείτε τους τρεις αριθμούς k για τους οποίους αποτυγχάνει η απαλοιφή. Ποια περίπτωση μπορεί να αντιμετωπιστεί με αντιμετάθεση γραμμών; Ποιο είναι το πλήθος των λύσεων σε κάθε περίπτωση: 0, 1 ή ∞;

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 6 \\ 3x + ky &= -6. \end{aligned}$$

9. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b_1 και b_2 ώστε οι δύο παρακάτω εξισώσεις να έχουν λύση; Πόσες λύσεις θα έχουν; Σχεδιάστε την εικόνα στηλών.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= b_1 \\ 6x - 4y &= b_2. \end{aligned}$$

Στα προβλήματα 10–19 μελετάται η απαλοιφή σε 3 επί 3 συστήματα (και η ενδεχόμενη αποτυχία της).

10. Αναγάγετε το παρακάτω σύστημα σε άνω τριγωνική μορφή με δύο γραμμοπράξεις:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8 \\ 4x + 7y + 5z &= 20 \\ -2y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Κυκλώστε τους οδηγούς. Χρησιμοποιώντας ανάδρομη αντικατάσταση, λύστε ως προς z, y, x.

11. Εφαρμόζοντας απαλοιφή (κυκλώστε τους οδηγούς) και ανάδρομη αντικατάσταση, λύστε το

$$\begin{aligned} 2x - 3y \phantom{{}+3z} &= 3 \\ 4x - 5y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

Αναφέρετε τις τρεις γραμμοπράξεις: Αφαιρούμε ___ επί τη γραμμή ___ από τη γραμμή ___.

12. Για ποιον αριθμό d απαιτείται αντιμετάθεση γραμμών και ποιο είναι το τριγωνικό (μη ιδιόμορφο) σύστημα για το συγκεκριμένο d; Για ποιο d γίνεται ιδιόμορφο το σύστημα (ανυπαρξία τρίτου οδηγού);

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= 0 \\ 4x + dy + z &= 2 \\ y - z &= 3. \end{aligned}$$

13. Ποιος αριθμός b οδηγεί αργότερα σε αντιμετάθεση γραμμών; Ποιο b οδηγεί σε απουσία οδηγού; Βρείτε μια μη μηδενική λύση x, y, z για αυτή την ιδιόμορφη περίπτωση.

$$\begin{aligned} x + by \phantom{{}-z} &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0. \end{aligned}$$

14. (α) Κατασκευάστε ένα 3 επί 3 σύστημα για το οποίο να απαιτούνται δύο αντιμεταθέσεις γραμμών ώστε να καταλήξει σε τριγωνική μορφή και να έχει λύση.
(β) Κατασκευάστε ένα 3 επί 3 σύστημα για το οποίο να απαιτείται μια αντιμετάθεση γραμμών ώστε να μπορέσει να προχωρήσει η διαδικασία, αλλά στη συνέχεια να αποτυγχάνει.

15. Αν οι γραμμές 1 και 2 είναι ίδιες, πόσο μπορεί να προχωρήσει η απαλοιφή (αν επιτρέπονται αντιμεταθέσεις γραμμών); Αν οι στήλες 1 και 2 είναι ίδιες, ποιος οδηγός δεν υπάρχει;

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 4x + y + z &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ 4x + 4y + z &= 0 \\ 6x + 6y + z &= 2. \end{aligned}$$

16. Κατασκευάστε ένα 3 επί 3 σύστημα που να έχει 9 διαφορετικούς συντελεστές στο αριστερό μέλος, αλλά οι γραμμές 2 και 3 να μηδενίζονται κατά την απαλοιφή. Πόσες λύσεις έχει το σύστημά σας για $b = (1, 10, 100)$ και πόσες για $b = (0, 0, 0)$;

17. Για ποιον αριθμό q είναι το παρακάτω σύστημα ιδιόμορφο και για ποιο δεξί μέλος t έχει άπειρες λύσεις; Βρείτε τη λύση που έχει $z = 1$.

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 1 \\ x + 7y - 6z &= 6 \\ 3y + qz &= t. \end{aligned}$$

18. (Προτεινόμενο) Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο να έχει ακριβώς δύο λύσεις. *Εξηγήστε γιατί.*
(α) Αν (x, y, z) και (X, Y, Z) είναι δύο λύσεις, ποιο άλλο σημείο είναι λύση;
(β) Αν 25 επίπεδα τέμνονται σε δύο σημεία, πού αλλού τέμνονται;

19. Τρία επίπεδα μπορεί να μην έχουν σημείο τομής, αν κανένα ζεύγος επιπέδων δεν είναι παράλληλα. Το σύστημα είναι ιδιόμορφο αν η γραμμή 3 του A είναι ______ των δύο πρώτων γραμμών. Βρείτε μια τρίτη εξίσωση που να μην μπορεί να λυθεί αν $x+y+z = 0$ και $x - 2y - z = 1$.

Τα προβλήματα 20–22 αφορούν μεγαλύτερα, 4 επί 4 και n επί n συστήματα.

20. Βρείτε τους οδηγούς και τη λύση των παρακάτω τεσσάρων εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x + y \qquad\qquad &= 0 \\ x + 2y + z \qquad &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ z + 2t &= 5. \end{aligned}$$

21. Αν επεκτείνετε το Πρόβλημα 20 ακολουθώντας το σχήμα $1, 2, 1$ ή $-1, 2, -1$, ποιος θα είναι ο πέμπτος οδηγός; Ποιος θα είναι ο n-οστός οδηγός;

22. Λύστε το

$$\begin{aligned} 2u + 3v \phantom{{}+ w} &= 0 \\ 4u + 5v + w &= 3 \\ 2u - v - 3w &= 5 \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση. Ποιοι είναι οι οδηγοί; Αναφέρετε τις τρεις πράξεις όπου ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής αφαιρείται από κάποια άλλη.

23. Ποιο τριγωνικό σύστημα προκύπτει αν εφαρμόσουμε ορθόδρομη απαλοιφή στο παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ u + 3v + 3w &= 0 \\ u + 3v + 5w &= 2; \end{aligned}$$

Ποια είναι η λύση;

24. Λύστε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2u - v \phantom{{}+ 2w - z} &= 0 \\ -u + 2v - w \phantom{{}- z} &= 0 \\ - v + 2w - z &= 0 \\ - w + 2z &= 5 \end{aligned}$$

και βρείτε τους οδηγούς. Μπορείτε να προσαρτήσετε το δεξί μέλος ως πέμπτη στήλη (και να παραλείπετε τα u, v, w, z μέχρι να βρείτε τη λύση).

25. Εφαρμόστε απαλοιφή στο σύστημα

$$\begin{aligned} u + v + w &= -2 \\ 3u + 3v - w &= 6 \\ u - v + w &= -1. \end{aligned}$$

Όταν εμφανιστεί μηδενικό σε θέση οδηγού, αντιμεταθέστε την εξίσωση με την ακριβώς από κάτω της και προχωρήστε. Ποιον συντελεστή θα έπρεπε να έχει το v στην τρίτη εξίσωση, στη θέση του -1, ώστε να είναι αδύνατο να προχωρήσετε —και η απαλοιφή να αποτύχει;

26. Εφαρμόζοντας απαλοιφή, λύστε το εξής σύστημα δύο εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x + 6y &= 18. \end{aligned}$$

Σχεδιάστε ένα γράφημα όπου κάθε εξίσωση να αναπαριστάται ως ευθεία του επιπέδου x-y· οι ευθείες τέμνονται στη λύση. Προσθέστε και μια ακόμη ευθεία —το γράφημα της νέας δεύτερης εξίσωσης που προκύπτει μετά την απαλοιφή.

27. Βρείτε τρεις τιμές του a στο παρακάτω σύστημα για τις οποίες η απαλοιφή να αποτυγχάνει προσωρινά ή οριστικά:

$$\begin{aligned} au + v &= 1 \\ 4u + av &= 2. \end{aligned}$$

Η αποτυχία στο πρώτο βήμα μπορεί να αντιμετωπιστεί με αντιμετάθεση γραμμών —όχι όμως και η αποτυχία στο τελευταίο βήμα.

28. Σωστό ή λάθος:

(α) Αν η τρίτη εξίσωση ξεκινάει με μηδενικό συντελεστή (ξεκινάει με $0u$) τότε κανένα πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 δεν θα αφαιρεθεί από την εξίσωση 3.

(β) Αν ο δεύτερος συντελεστής της τρίτης εξίσωσης είναι μηδέν (περιέχει το $0v$), τότε κανένα πολλαπλάσιο της εξίσωσης 2 δεν θα αφαιρεθεί από την εξίσωση 3.

(γ) Αν η τρίτη εξίσωση περιέχει τα $0u$ *και* $0v$, τότε κανένα πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 ή της εξίσωσης 2 δεν θα αφαιρεθεί από την εξίσωση 3.

29. (Εντελώς προαιρετικό) Κανονικά, ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

απαιτεί τους εξής τέσσερις πολλαπλασιασμούς: ac, bd, bc, ad. Αγνοώντας το i, μπορείτε να υπολογίσετε τα $ac-bd$ και $bc+ad$ με μόνο τρεις πολλαπλασιασμούς; (Μπορείτε να κάνετε προσθέσεις, όπως να σχηματίσετε το $a+b$ πριν κάνετε τον πολλαπλασιασμό, χωρίς ποινή.)

30. Χρησιμοποιώντας απαλοιφή, λύστε τα

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ u + 2v + 2w &= 11 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 7 \\ u + 2v + 2w &= 10 \\ 2u + 3v - 4w &= 3. \end{aligned}$$

31. Για ποιους τρεις αριθμούς a θα αποτύχει να παραγάγει τρεις οδηγούς η απαλοιφή;

$$\begin{aligned} ax + 2y + 3z &= b_1 \\ ax + ay + 4z &= b_2 \\ ax + ay + az &= b_3. \end{aligned}$$

32. Βρείτε πειραματικά τη μέση τιμή (κατά απόλυτη τιμή) του πρώτου, του δεύτερου και του τρίτου οδηγού του αποτελέσματος της εντολής $\mathsf{lu}(\mathsf{rand}(3,3))$ της MATLAB. Η μέση τιμή του πρώτου οδηγού του αποτελέσματος της $\mathsf{abs}(A(1,1))$ θα πρέπει να είναι 0,5.

1.4 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Στο 3 επί 3 παράδειγμά μας, μπορέσαμε να γράψουμε αναλυτικά όλες τις εξισώσεις. Μπορέσαμε να γράψουμε ένα ένα τα βήματα της απαλοιφής, κατά τα οποία αφαιρούσαμε κάποιο πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης από κάποια άλλη μέχρι να καταλήξουμε σε έναν τριγωνικό πίνακα. Για ένα μεγάλο σύστημα, ένας τέτοιος τρόπος καταγραφής της διαδικασίας απαλοιφής θα ήταν καταδικασμένος· χρειαζόμαστε έναν πολύ συνοπτικότερο τρόπο γραφής.

Σε αυτό το σημείο θα εισαγάγουμε τον **συμβολισμό πινάκων** για να περιγράφουμε το αρχικό σύστημα και τον **πολλαπλασιασμό πινάκων** για να περιγράφουμε τις πράξεις με τις οποίες απλοποιείται. Προσέξτε ότι στο παράδειγμά μας εμφανίζονται τρία διαφορετικά είδη ποσοτήτων:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Εννέα συντελεστές} & 2u + v + w = 5 \\ \textbf{Τρεις άγνωστοι} & 4u - 6v \quad = -2 \\ \textbf{Τρία δεξιά μέλη} & -2u + 7v + 2w = 9 \end{array} \tag{1}$$

Στο δεξί μέλος έχουμε το διάνυσμα στήλη b. Στο αριστερό μέλος έχουμε τους αγνώστους u, v, w, καθώς και τους εννέα συντελεστές (ένας εκ των οποίων τυχαίνει να είναι μηδέν). Είναι φυσικό να αναπαραστήσουμε τους τρεις αγνώστους με ένα διάνυσμα:

$$\text{Ο άγνωστος είναι το } x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \qquad \text{Η λύση είναι το } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Οι εννέα συντελεστές τοποθετούνται σε τρεις γραμμές και τρεις στήλες, με αποτέλεσμα έναν ***3 επί 3 πίνακα***:

$$\textbf{Πίνακας συντελεστών} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο A είναι *τετραγωνικός* πίνακας, διότι το πλήθος των εξισώσεων ισούται με το πλήθος των αγνώστων. Αν έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους, έχουμε έναν τετραγωνικό πίνακα n επί n. Γενικότερα, μπορεί να έχουμε m εξισώσεις και n αγνώστους. Σε αυτή την περίπτωση ο A είναι *παραλληλόγραμμος*, με m γραμμές και n στήλες. Θα είναι ένας «m επί n πίνακας».

Μπορούμε να αθροίζουμε πίνακες και να τους πολλαπλασιάζουμε με αριθμητικές σταθερές, ακριβώς όπως τα διανύσματα —στοιχείο προς στοιχείο. Μάλιστα, μπορούμε να θεωρήσουμε τα διανύσματα σαν ειδικές περιπτώσεις πινάκων· *είναι πίνακες με μόνο μία στήλη*. Όπως στην περίπτωση των διανυσμάτων, μπορούμε να αθροίσουμε δύο πίνακες μόνο αν έχουν το ίδιο σχήμα:

$$\begin{array}{l} \textbf{Πρόσθεση } \boldsymbol{A+B} \\ \textbf{Πολλαπλασιασμός } \boldsymbol{2A} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Θέλουμε να γράψουμε τις τρεις εξισώσεις με τους τρεις αγνώστους u, v, w στην απλοποιημένη μορφή πινάκων $Ax = b$. Αν το γράψουμε αναλυτικά, μας λέει ότι πίνακας επί διάνυσμα ισούται με διάνυσμα:

$$\textbf{Μορφή πινάκων} \boldsymbol{Ax = b} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Το δεξί μέλος b είναι το διάνυσμα στήλη των «μη ομογενών όρων». **Το αριστερό μέλος είναι $\boldsymbol{A}$ επί $\boldsymbol{x}$**. Θα ορίσουμε αυτόν τον πολλαπλασιασμό *έτσι ώστε να αναπαράγει το αρχικό σύστημα*. Η πρώτη συνιστώσα του Ax προκύπτει «με πολλαπλασιασμό» της πρώτης γραμμής του A με το διάνυσμα στήλη x:

$$\textbf{Γραμμή επί στήλη} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + v + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Η δεύτερη συνιστώσα του γινομένου Ax είναι $4u - 6v + 0w$ και προκύπτει από τη δεύτερη γραμμή του A. Η εξίσωση πινάκων $Ax = b$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα τριών εξισώσεων της εξίσωσης (1).

Η πράξη ***γραμμή επί στήλη*** είναι θεμελιώδης για τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Από δύο διανύσματα παράγει έναν αριθμό, ο οποίος καλείται ***εσωτερικό γινόμενο*** των δύο διανυσμάτων. Με άλλα λόγια, το γινόμενο ενός 1 επί n πίνακα (ενός *διανύσματος γραμμής*) με έναν n επί 1 πίνακα (ενός *διανύσματος στήλης*) είναι ένας 1 επί 1 πίνακας:

$$\textbf{Εσωτερικό γινόμενο} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η προτεινόμενη λύση $x = (1, 1, 2)$ ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση.

Υπάρχουν δύο τρόποι να πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα A με ένα διάνυσμα x. Ο ένας τρόπος είναι *γραμμή προς γραμμή*. Κάθε γραμμή του A συνδυάζεται με το x και παράγει μια συνιστώσα του Ax. Αν ο A έχει τρεις γραμμές, υπάρχουν τρία εσωτερικά γινόμενα:

$$\boldsymbol{Ax}\ \textbf{επί γραμμές} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 6 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο εξηγείται συνήθως ο πολλαπλασιασμός Ax, αλλά ο δεύτερος τρόπος είναι εξίσου σημαντικός. Μάλιστα είναι πιο σημαντικός! Ο πολλαπλασιασμός εκτελείται *στήλη προς στήλη*. Το γινόμενο Ax υπολογίζεται απευθείας, σαν ***συνδυασμός των τριών στηλών του A***:

$$\boldsymbol{Ax}\ \textbf{επί στήλες} \qquad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Η απάντηση είναι δύο επί τη στήλη 1 συν 5 επί τη στήλη 2. Αντιστοιχεί στην «εικόνα στηλών» των γραμμικών εξισώσεων. Αν το δεξί μέλος b είχε συνιστώσες 7, 6, 7, τότε η λύση θα είχε συνιστώσες 2, 5, 0. Ασφαλώς, η εικόνα γραμμών συμφωνεί με αυτό (και τελικά πρέπει να κάνουμε τους ίδιους πολλαπλασιασμούς).

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του πολλαπλασιασμού στήλη προς στήλη πολλές φορές, για αυτό τον επαναλαμβάνουμε:

> **1A** Το γινόμενο Ax μπορεί να υπολογιστεί με χρήση ολόκληρων των στηλών όπως στην εξίσωση (5). Συνεπώς, το Ax είναι ***ένας συνδυασμός των στηλών του A***. Οι συντελεστές είναι οι συνιστώσες του x.

Για να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό A επί x στις n διαστάσεις, χρειαζόμαστε έναν συμβολισμό για κάθε στοιχείο του A. *Το στοιχείο που βρίσκεται στην i-οστή γραμμή και στην j-οστή στήλη συμβολίζεται πάντα με a_{ij}*. Ο πρώτος δείκτης φανερώνει τον αριθμό της γραμμής και ο δεύτερος τη στήλη. (Στην εξίσωση (4), το a_{21} είναι 3 και το a_{13} είναι 6.) Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, τότε ο δείκτης i παίρνει τιμές από 1 έως m —υπάρχουν m γραμμές— και ο δείκτης j παίρνει τιμές από 1 έως n. Συνολικά, ο πίνακας έχει mn στοιχεία και το a_{mn} είναι το στοιχείο στην κάτω δεξιά γωνία.

Για τα διανύσματα αρκεί ένας δείκτης. Η j-οστή συνιστώσα του x συμβολίζεται με x_j. (Στον παραπάνω πολλαπλασιασμό είχαμε $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$.) Συνήθως, το x γράφεται σαν διάνυσμα στήλη —σαν ένας n επί 1 πίνακας. Ωστόσο, μερικές φορές γράφεται σε μία γραμμή ως εξής: $x = (2, 5, 0)$. Οι παρενθέσεις και τα κόμματα φανερώνουν ότι δεν πρόκειται για έναν 1 επί 3 πίνακα. Είναι ένα διάνυσμα στήλη, το οποίο προσωρινά γράφεται οριζόντια.

Για να περιγράψουμε το γινόμενο Ax, χρησιμοποιούμε το σύμβολο Σ της άθροισης:

Σίγμα συμβολισμός Η i-οστή συνιστώσα του Ax είναι $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Το άθροισμα διατρέχει την i-οστή γραμμή του A. Ο δείκτης στήλης j παίρνει όλες τις τιμές από 1 έως n, και προσθέτουμε τα αποτελέσματα —το άθροισμα είναι $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.

Βλέπουμε πάλι ότι το μήκος των γραμμών (το πλήθος των στηλών του A) πρέπει να συμφωνεί με το μήκος του x. **Ένας m επί n πίνακας πολλαπλασιάζει ένα n-διάστατο διάνυσμα** (και παράγει ένα m-διάστατο διάνυσμα). Ο σίγμα συμβολισμός είναι απλούστερος δίνοντάς μας τη δυνατότητα να μην γράφουμε αναλυτικά τα πάντα, αλλά ο συμβολισμός πινάκων είναι καλύτερος. (Ο Αϊνστάιν χρησιμοποίησε τον «τανυστικό συμβολισμό», όπου ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει αυτομάτως άθροιση. Έγραφε $a_{ij}x_j$ ή ακόμη και $a_i^j x_j$, χωρίς το Σ. Ωστόσο, αφού δεν είμαστε ο Αϊνστάιν, κρατάμε το Σ.)

Μορφή πινάκων ενός βήματος της απαλοιφής

Μέχρι στιγμής διαθέτουμε τη βολική συντομογραφία $Ax = b$ για το αρχικό σύστημα εξισώσεων. Πώς όμως μπορούμε να γράψουμε τις πράξεις που εκτελούνται κατά τη διάρκεια της απαλοιφής; Στο παράδειγμά μας, στο πρώτο βήμα αφαιρέσαμε 2 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη. Στο δεξί μέλος, το 2 επί την πρώτη συνιστώσα του b αφαιρέθηκε από τη δεύτερη συνιστώσα. *Επιτυγχάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν πολλαπλασιάσουμε το b με τον εξής στοιχειώδη πίνακα* (ή *πίνακα απαλοιφής*):

$$\textbf{Πίνακας απαλοιφής} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτό επαληθεύεται με εφαρμογή του κανόνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα:

$$Eb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \mathbf{-12} \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Οι συνιστώσες 5 και 9 παραμένουν ίδιες (λόγω των $1, 0, 0$ και $0, 0, 1$ στις γραμμές του E). Η νέα δεύτερη συνιστώσα -12 εμφανίστηκε μετά το πρώτο βήμα της απαλοιφής.

Οι πίνακες σαν τον E, μέσω των οποίων εκτελούνται τα επιμέρους βήματα της απαλοιφής, περιγράφονται εύκολα. Αναφέρουμε επίσης τον «ταυτοτικό πίνακα», ο οποίος δεν κάνει απολύτως τίποτα.

1B Ο ***ταυτοτικός πίνακας*** $\boldsymbol{I}$, ο οποίος έχει 1 στη διαγώνιο και 0 παντού αλλού, αφήνει αμετάβλητα όλα τα διανύσματα. Ο ***στοιχειώδης πίνακας*** $\boldsymbol{E_{ij}}$ που αφαιρεί ℓ επί τη γραμμή j από τη γραμμή i περιέχει το $-\ell$ στη γραμμή i, στήλη j.

$$\text{Για τον } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } Ib = b$$

$$\text{Για τον } E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\ell & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } E_{31}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - \ell b_1 \end{bmatrix}.$$

Η $Ib = b$ είναι το ανάλογο για πίνακες του πολλαπλασιασμού με το 1. Ένα τυπικό βήμα της απαλοιφής εκτελεί έναν πολλαπλασιασμό με τον E_{31}. Το σημαντικό ερώτημα είναι το εξής: Τι συμβαίνει με τον A στο αριστερό μέλος;

Για να διατηρήσουμε την ισότητα, πρέπει να εφαρμόσουμε την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της $Ax = b$. Με άλλα λόγια, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα E και το διάνυσμα Ax. Ο αρχικός μας πίνακας E αφαιρεί 2 επί την πρώτη συνιστώσα από τη δεύτερη. Μετά από αυτό το βήμα, το νέο και απλούστερο σύστημα (που είναι ισοδύναμο με το παλιό) είναι το $E(Ax) = Eb$. Είναι απλούστερο λόγω του μηδενικού που δημιουργήθηκε κάτω από τον πρώτο οδηγό. Είναι ισοδύναμο διότι μπορούμε να επανέλθουμε στο αρχικό σύστημα (προσθέτοντας 2 επί την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη). Άρα τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς την ίδια λύση x.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ερχόμαστε τώρα στο σημαντικότερο ερώτημα: *Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πίνακες*; Η απαλοιφή Gauss μας βοηθάει κάπως: Γνωρίζουμε τον αρχικό πίνακα συντελεστών A, γνωρίζουμε τον πίνακα απαλοιφής E και γνωρίζουμε το αποτέλεσμα EA μετά το βήμα της απαλοιφής. Ελπίζουμε και περιμένουμε ότι

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ επί } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ δίνει } EA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δύο επί την πρώτη γραμμή του A αφαιρέθηκε από τη δεύτερη γραμμή. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι συνεπής με τις γραμμοπράξεις της απαλοιφής. Μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα είτε ως $E(Ax) = Eb$, εφαρμόζοντας τον E και στα δύο μέλη της εξίσωσής μας, είτε ως $(EA)x = Eb$. Ο πίνακας EA κατασκευάζεται έτσι ώστε οι δύο εξισώσεις να συμφωνούν, οπότε δεν χρειαζόμαστε παρενθέσεις:

Πολλαπλασιασμός πινάκων Το $(EA$ επί $x)$ ισούται με $(E$ επί $Ax)$.
Γράφουμε απλώς EAx.

Αυτή είναι η ουσία κάθε «προσεταιριστικής ιδιότητας», όπως για παράδειγμα της $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$. Η ιδιότητα μοιάζει τόσο προφανής που είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι μπορεί να μην ισχύει. Ωστόσο, το ίδιο θα μπορούσε να πει κανείς και για την «αντιμεταθετική ιδιότητα» $2 \times 3 = 3 \times 2$—όμως, στην περίπτωση των πινάκων, ο EA δεν ισούται με τον AE.

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων πρέπει να ικανοποιεί κάτι ακόμη. Ξέρουμε πώς κάνουμε τον πολλαπλασιασμό Ax, πώς πολλαπλασιάζουμε έναν πίνακα με ένα διάνυσμα. Ο νέος ορισμός πρέπει να συμφωνεί με αυτό. Όταν ένας πίνακας B περιέχει μόνο μία στήλη x, το γινόμενο πίνακα επί πίνακα AB πρέπει να ταυτίζεται με το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα Ax. *Επιπλέον*: Όταν ο B περιέχει περισσότερες από μία στήλες b_1, b_2, b_3, οι στήλες του AB θα πρέπει να είναι Ab_1, Ab_2, Ab_3!

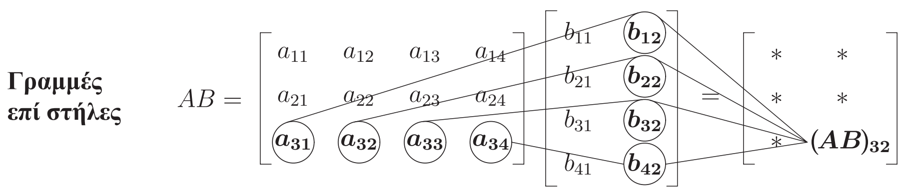
Πολλαπλασιασμός κατά στήλες $\quad AB = A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{bmatrix}.$

Η πρώτη μας απαίτηση αφορούσε τις γραμμές· αυτή αφορά τις στήλες. Μια τρίτη προσέγγιση είναι να περιγράψουμε κάθε επιμέρους στοιχείο του AB και να ελπίσουμε για το καλύτερο. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μόνο ένας δυνατός κανόνας, και δεν είμαι βέβαιος ποιος τον ανακάλυψε. Κάνει να δουλεύουν τα πάντα. Δεν μας επιτρέπει να πολλαπλασιάζουμε οποιοδήποτε ζεύγος πινάκων. Αν είναι τετραγωνικοί, πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Αν είναι παραλληλόγραμμοι, *δεν* πρέπει να έχουν το ίδιο σχήμα· ***το πλήθος των στηλών του A πρέπει να ισούται με το πλήθος των γραμμών του B***, ώστε ο A να μπορεί να πολλαπλασιαστεί με κάθε στήλη του B.

Αν ο A είναι m επί n και ο B είναι n επί p, τότε ο πολλαπλασιασμός είναι δυνατός. *Το γινόμενο AB θα είναι m* επί p. Ακολούθως βρίσκουμε το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή i και στη στήλη j του AB.

1Γ Το στοιχείο (i,j) του AB είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A και της j-οστής στήλης του B. Στο Σχήμα 1.7, το στοιχείο $(3,2)$ του AB προκύπτει από τη γραμμή 3 και τη στήλη 2:

$$(AB)_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42}. \tag{6}$$



Σχήμα 1.7 Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός 3 επί 4 πίνακα A με έναν 4 επί 2 πίνακα B είναι ένας 3 επί 2 πίνακας AB.

Σημείωση Γράφουμε AB όταν οι πίνακες δεν σχετίζονται κάπως με τη διαδικασία της απαλοιφής. Στο προηγούμενο παράδειγμά μας είχαμε EA, λόγω του στοιχειώδους πίνακα E. Αργότερα θα έχουμε PA, LU ή ακόμα και LDU. Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού πινάκων παραμένει ο ίδιος.

Παράδειγμα 1 $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$

Το στοιχείο 17 είναι $(2)(1) + (3)(5)$, το εσωτερικό γινόμενο της πρώτης γραμμής του A με την πρώτη στήλη του B. Το στοιχείο 8 είναι $(4)(2) + (0)(-1)$ και προκύπτει από τη δεύτερη γραμμή και τη δεύτερη στήλη.

Η τρίτη στήλη του B είναι μηδέν, οπότε είναι μηδέν και στον AB. Ο B αποτελείται από τρεις στήλες, τη μία δίπλα στην άλλη, και ο A πολλαπλασιάζει κάθε στήλη ξεχωριστά. ***Κάθε στήλη του AB είναι ένας συνδυασμός των στηλών του A***. Ακριβώς όπως στον πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα, οι στήλες του A πολλαπλασιάζονται με τα στοιχεία του B.

Παράδειγμα 2 **Πίνακας αντιμετάθεσης γραμμών** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Παράδειγμα 3 Οι μονάδες του ταυτοτικού πίνακα I αφήνουν όλους τους πίνακες αμετάβλητους:

$$\textbf{Ταυτοτικός πίνακας} \qquad IA = A \qquad \text{και} \qquad BI = B.$$

Σημαντικό: Ο πολλαπλασιασμός AB μπορεί να γίνει και *γραμμή προς γραμμή*. Στο Παράδειγμα 1, στην πρώτη γραμμή του AB χρησιμοποιούνται οι αριθμοί 2 και 3 της πρώτης γραμμής του A, οι οποίοι δίνουν $2\,[\text{γραμμή } 1] + 3\,[\text{γραμμή } 2] = [\,17 \;\; 1 \;\; 0\,]$. Ακριβώς όπως στην απαλοιφή, από όπου ξεκίνησαν όλα, κάθε γραμμή του AB είναι ένας ***συνδυασμός των γραμμών του B***.

Συνοψίζουμε τους τρεις διαφορετικούς τρόπους θεώρησης του πολλαπλασιασμού πινάκων:

1Δ (i) Κάθε στοιχείο του AB είναι το γινόμενο μιας ***γραμμής*** και μιας ***στήλης***:

$$(AB)_{ij} = (\text{γραμμή } i \text{ του } A) \text{ επί } (\text{στήλη } j \text{ του } B)$$

(ii) Κάθε στήλη του AB είναι το γινόμενο ενός ***πίνακα*** και μιας ***στήλης***:

$$\text{στήλη } j \text{ του } AB = A \text{ επί } (\text{στήλη } j \text{ του } B)$$

(iii) Κάθε γραμμή του AB είναι το γινόμενο μιας ***γραμμής*** και ενός ***πίνακα***:

$$\text{γραμμή } i \text{ του } AB = (\text{γραμμή } i \text{ του } A) \text{ επί } B.$$

Αυτό μας οδηγεί σε μια βασική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων. Ας υποθέσουμε ότι τρεις πίνακες A, B, C έχουν σχήμα (πιθανώς παραλληλόγραμμο) που επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τους. Οι γραμμές του A και του B πολλαπλασιάζουν τις στήλες του B και του C. Η βασική ιδιότητα είναι η εξής:

1Ε Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός: $(AB)C = A(BC)$. Γράφουμε απλά ABC.

AB επί C ισούται με A επί BC. Αν ο C τύχει να είναι απλώς ένα διάνυσμα (ένας πίνακας με μόνο μία στήλη), η σχέση αυτή είναι η απαίτηση $(EA)x = E(Ax)$ που αναφέραμε προηγουμένως. Σε αυτό στηρίζονται όλοι οι κανόνες του πολλαπλασιασμού πινάκων. Αν ο C έχει περισσότερες από μία στήλες, αρκεί να τις φανταστούμε τοποθετημένες τη μία δίπλα στην άλλη και να εφαρμόσουμε τον ίδιο κανόνα πολλές φορές. Δεν χρειαζόμαστε παρενθέσεις όταν πολλαπλασιάζουμε περισσότερους από έναν πίνακες.

Πρέπει να αναφέρουμε δύο ακόμη ιδιότητες —μία ιδιότητα που έχει ο πολλαπλασιασμός πινάκων και μία που *δεν έχει*. Η ιδιότητα που έχει είναι η εξής:

1ΣΤ Οι πινακικές πράξεις είναι επιμεριστικές:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{και} \qquad (B+C)D = BD + CD.$$

Ασφαλώς, οι πίνακες πρέπει να έχουν το κατάλληλο σχήμα —οι B και C πρέπει να έχουν το ίδιο σχήμα ώστε να μπορούν να προστεθούν, ενώ οι A και D πρέπει να έχουν το κατάλληλο μέγεθος ώστε να μπορεί να γίνει ο από αριστερά και ο από δεξιά πολλαπλασιασμός. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι πολύ βαρετή.

Η ιδιότητα που δεν ισχύει έχει λίγο περισσότερο ενδιαφέρον:

1Ζ Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός: Συνήθως, $FE \neq EF$.

Παράδειγμα 4 Υποθέτουμε ότι ο E αφαιρεί δύο επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και ότι ο F είναι ο πίνακας του επόμενου βήματος, *ο οποίος προσθέτει τη γραμμή* 1 *στη γραμμή* 3:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι δύο αυτοί πίνακες μπορούν να αντιμετατεθούν, και το γινόμενό τους εκτελεί και τα δύο βήματα ταυτόχρονα:

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} = FE.$$

Με όποια σειρά και να γίνει ο πολλαπλασιασμός, EF ή FE, οι γραμμές 2 και 3 αλλάζουν με χρήση της γραμμής 1.

Παράδειγμα 5 Υποθέτουμε ότι ο E είναι ο ίδιος, αλλά ο G *προσθέτει τη γραμμή* 2 *στη γραμμή* 3. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά έχει σημασία. Αν εφαρμόσουμε τον E και μετά τον G, η δεύτερη γραμμή αλλάζει *πριν* επηρεάσει την τρίτη. Αν εφαρμοστεί πρώτα ο G και *κατόπιν* ο E, τότε η τρίτη εξίσωση δεν επηρεάζεται καθόλου από την πρώτη. Όπως βλέπουμε, το στοιχείο $(3,1)$ του EG είναι μηδέν, ενώ το αντίστοιχο στοιχείο του GE είναι -2:

$$GE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{αλλά} \quad EG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, $EG \neq GE$. Οποιοδήποτε τυχαία επιλεγμένο παράδειγμα θα έδειχνε το ίδιο πράγμα —στις περισσότερες περιπτώσεις δεν μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους πίνακες. Οι πίνακές μας έχουν συγκεκριμένη σημασία. Υπήρχε λόγος που $EF = FE$ και άλλος λόγος που

$EG \neq GE$. Αξίζει να προχωρήσουμε ένα ακόμη βήμα για να δούμε τι συμβαίνει *και με τους τρεις πίνακες απαλοιφής ταυτόχρονα*:

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad EFG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το γινόμενο GFE αντιστοιχεί στην πραγματική σειρά της απαλοιφής. Όπως θα ξαναδούμε στην επόμενη ενότητα, *είναι ο πίνακας που μας οδηγεί από τον αρχικό A στον άνω τριγωνικό U*.

Ο άλλος πίνακας EFG είναι πιο κομψός. Με αυτή τη σειρά, ο αριθμός -2 του E και οι αριθμοί 1 των F και G δεν επηρεάστηκαν. Μεταφέρθηκαν απευθείας στο γινόμενο. Είναι η λάθος σειρά για την απαλοιφή, αλλά ευτυχώς *είναι η σωστή σειρά για την αντιστροφή των βημάτων της απαλοιφής* —με αυτό θα ασχοληθούμε επίσης στην επόμενη ενότητα.

Επισημαίνουμε ότι το γινόμενο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι και αυτό κάτω τριγωνικός πίνακας.

Προβλήματα 1.4

1. Υπολογίστε τα γινόμενα

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το τρίτο, σχεδιάστε τα διανύσματα στήλες $(2,1)$ και $(0,3)$. Ο πολλαπλασιασμός με το $(1,1)$ απλώς προσθέτει τα διανύσματα (δείξτε το με ένα σχήμα).

2. Εργαζόμενοι στήλη προς στήλη, υπολογίστε τα γινόμενα

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

3. Υπολογίστε δύο εσωτερικά γινόμενα και ένα γινόμενο πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το πρώτο δίνει το μήκος του διανύσματος (στο τετράγωνο).

4. Πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών πρέπει να κάνουμε για να πολλαπλασιάσουμε έναν m επί n πίνακα A με ένα n-διάστατο διάνυσμα x; Για να πολλαπλασιάσουμε τον A με έναν n επί p πίνακα B;

5. Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό Ax, βρείτε ένα διάνυσμα x που να είναι λύση του συστήματος $Ax =$ *μηδενικό διάνυσμα*. Μπορείτε να βρείτε και άλλες λύσεις του $Ax = 0$;

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Γράψτε τους 2 επί 2 πίνακες A και B με στοιχεία $a_{ij} = i + j$ και $b_{ij} = (-1)^{i+j}$. Πολλαπλασιάστε τους για να βρείτε τους AB και BA.

7. Δώστε ένα παράδειγμα (όχι τον μηδενικό πίνακα)

(α) ενός διαγώνιου 3 επί 3 πίνακα: $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$.
(β) ενός συμμετρικού 3 επί 3 πίνακα: $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε i και j.
(γ) ενός 3 επί 3 άνω τριγωνικού πίνακα: $a_{ij} = 0$ αν $i > j$.
(δ) ενός αντισυμμετρικού 3 επί 3 πίνακα: $a_{ij} = -a_{ji}$ για κάθε i και j.

8. Οι παρακάτω υπορουτίνες εκτελούν τον πολλαπλασιασμό Ax *κατά γραμμές ή κατά στήλες*; Ξεκινήστε με $B(I) = 0$:

```
   DO 10 I = 1,N                    DO 10 J = 1,N
   DO 10 J = 1,N                    DO 10 I = 1,N
10 B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)   10 B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)
```

Οι έξοδοι $Bx = Ax$ είναι ίδιες. Το δεύτερο απόσπασμα κώδικα είναι ελαφρώς αποδοτικότερο στη FORTRAN και πολύ αποδοτικότερο στις διανυσματικές μηχανές (το πρώτο μεταβάλλει μεμονωμένα στοιχεία $B(I)$, ενώ το δεύτερο μπορεί να ενημερώσει ολόκληρα διανύσματα).

9. Αν a_{ij} είναι τα στοιχεία του A, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό με τους δείκτες γράψτε:

(α) τον πρώτο οδηγό.
(β) τον πολλαπλασιαστή ℓ_{i1} της γραμμής 1 που πρέπει να αφαιρεθεί από τη γραμμή i.
(γ) το νέο στοιχείο που αντικαθιστά το a_{ij} μετά από αυτή την αφαίρεση.
(δ) τον δεύτερο οδηγό.

10. Σωστό ή λάθος; Δώστε ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα σε περίπτωση που είναι λάθος.

(α) Αν οι στήλες 1 και 3 του B είναι ίδιες, ίδιες είναι και οι στήλες 1 και 3 του AB.
(β) Αν οι γραμμές 1 και 3 του B είναι ίδιες, ίδιες είναι και οι γραμμές 1 και 3 του AB.
(γ) Αν οι γραμμές 1 και 3 του A είναι ίδιες, ίδιες είναι και οι γραμμές 1 και 3 του AB.
(δ) $(AB)^2 = A^2B^2$.

11. Η πρώτη γραμμή του AB είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των γραμμών του B. Ποιοι είναι οι συντελεστές αυτού του συνδυασμού και ποια είναι η πρώτη γραμμή του AB αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

12. Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι και αυτό ένας κάτω τριγωνικός πίνακας (όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν). Επιβεβαιώστε το με ένα παράδειγμα 3 επί 3 πίνακα και κατόπιν εξηγήστε πώς προκύπτει από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων.

13. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος, βρείτε παραδείγματα 2 επί 2 πινάκων τέτοιων ώστε

(α) $A^2 = -I$, όπου ο A έχει μόνο πραγματικά στοιχεία.
(β) $B^2 = 0$, μολονότι $B \neq 0$.

(γ) $CD = -DC$, θεωρώντας ότι δεν ισχύει $CD = 0$.
(δ) $EF = 0$, μολονότι κανένα στοιχείο του E ή του F δεν είναι μηδέν.

14. Περιγράψετε τις γραμμές του EA και τις *στήλες* του AE αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Υποθέστε ότι ο A μπορεί να αντιμετατεθεί με οποιονδήποτε 2 επί 2 πίνακα ($AB = BA$) και ειδικότερα ότι

$$\text{ο} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{αντιμετατίθεται με τους} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $a = d$ και $b = c = 0$. Αν $AB = BA$ για οποιονδήποτε πίνακα B, τότε ο A είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα.

16. Έστω x το διάνυσμα στήλη $(1, 0, \ldots, 0)$. Δείξτε ότι επειδή $(AB)x = A(Bx)$, η πρώτη στήλη του AB πρέπει να ισούται με A επί την πρώτη στήλη του B.

17. Ποιος από τους παρακάτω πίνακες ισούται σίγουρα με $(A + B)^2$;

$A^2 + 2AB + B^2$, $A(A + B) + B(A + B)$, $(A + B)(B + A)$, $A^2 + AB + BA + B^2$.

18. Αν οι A και B είναι n επί n πίνακες όλα τα στοιχεία των οποίων ισούνται με 1, βρείτε το $(AB)_{ij}$. Με χρήση του σίγμα συμβολισμού, το γινόμενο AB και η ιδιότητα $(AB)C = A(BC)$ γράφονται ως εξής:

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad \sum_j \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) c_{jl} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_j b_{kj} c_{jl} \right).$$

Υπολογίστε και τα δύο μέλη αν ο C είναι επίσης n επί n πίνακας, με στοιχεία $c_{jl} = 2$.

19. *Ένας τέταρτος τρόπος να πολλαπλασιάζουμε πίνακες είναι να πολλαπλασιάσουμε* ***τις στήλες του A επί τις γραμμές του B***:

$AB =$ (στήλη 1)(γραμμή 1)$+ \cdots +$(στήλη n)(γραμμή n) $=$ άθροισμα απλών πινάκων.

Δώστε ένα 2 επί 2 παράδειγμα αυτού του σημαντικού κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων.

20. Ο πίνακας που στρέφει το επίπεδο x-y κατά γωνία θ είναι ο

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε ότι $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες για τα $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ και $\sin(\theta_1 + \theta_2)$. Ποιος είναι ο $A(\theta)$ επί $A(-\theta)$;

21. Βρείτε τις δυνάμεις A^2, A^3 (A^2 επί A) και B^2, B^3, C^2, C^3. Ποιοι είναι οι A^k, B^k και C^k;

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Τα προβλήματα 22–31 αφορούν τους πίνακες απαλοιφής.

22. Γράψετε τους 3 επί 3 πίνακες που εκτελούν τα εξής βήματα απαλοιφής:

(α) Ο E_{21} αφαιρεί 5 επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2.
(β) Ο E_{32} αφαιρεί -7 επί τη γραμμή 2 από τη γραμμή 3.
(γ) Ο P αντιμεταθέτει τις γραμμές 1 και 2, και κατόπιν τις γραμμές 2 και 3.

23. Στο Πρόβλημα 22, αν εφαρμόσουμε τον E_{21} και κατόπιν τον E_{32} στη στήλη $b = (1, 0, 0)$ παίρνουμε $E_{32}E_{21}b =$ ___. Αν εφαρμόσουμε τον E_{32} πριν από τον E_{21} παίρνουμε $E_{21}E_{32}b =$ ___. Αν εφαρμόσουμε πρώτα τον E_{32}, η γραμμή ___ δεν επηρεάζεται από τη γραμμή ___.

24. Ποιοι τρεις πίνακες E_{21}, E_{31}, E_{32} μετατρέπουν τον A στην τριγωνική μορφή U;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E_{32}E_{31}E_{21}A = U.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτούς τους E, βρείτε έναν πίνακα M που να εκτελεί απαλοιφή: $MA = U$.

25. Υποθέστε ότι $a_{33} = 7$ και ότι ο τρίτος οδηγός είναι το 5. Αν αλλάξουμε το a_{33} και το κάνουμε 11, ο τρίτος οδηγός είναι ___. Αν αλλάξουμε το a_{33} και το κάνουμε ___, στη θέση του οδηγού υπάρχει μηδέν.

26. Αν όλες οι στήλες του A είναι κάποιο πολλαπλάσιο του $(1, 1, 1)$, τότε το Ax είναι πάντα πολλαπλάσιο του $(1, 1, 1)$. Δώστε ένα παράδειγμα 3 επί 3 πίνακα. Πόσοι οδηγοί παράγονται κατά την απαλοιφή;

27. Ποιος πίνακας E_{31} αφαιρεί 7 επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3; Για να αντιστρέψει αυτό το βήμα, ο R_{31} πρέπει να ______ 7 επί τη γραμμή ___ στη γραμμή ___. Πολλαπλασιάστε τον E_{31} με τον R_{31}.

28. (α) Ο E_{21} αφαιρεί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2 και κατόπιν ο P_{23} αντιμεταθέτει τις γραμμές 2 και 3. Ποιος πίνακας $M = P_{23}E_{21}$ εκτελεί και τα δύο βήματα ταυτόχρονα;

(β) Ο P_{23} αντιμεταθέτει τις γραμμές 2 και 3, και κατόπιν ο E_{31} αφαιρεί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3. Ποιος πίνακας $M = E_{31}P_{23}$ εκτελεί και τα δύο βήματα ταυτόχρονα; Εξηγήστε γιατί οι M είναι ίδιοι αλλά οι E είναι διαφορετικοί.

29. (α) Ποιος 3 επί 3 πίνακας E_{13} προσθέτει τη γραμμή 3 στη γραμμή 1;

(β) Ποιος πίνακας προσθέτει τη γραμμή 1 στη γραμμή 3 και *ταυτόχρονα* προσθέτει τη γραμμή 3 στη γραμμή 1;

(γ) Ποιος πίνακας προσθέτει τη γραμμή 1 στη γραμμή 3 και *κατόπιν* προσθέτει τη γραμμή 3 στη γραμμή 1;

30. Πολλαπλασιάστε τους εξής πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

31. Ποιους πίνακες απαλοιφής E_{21}, E_{32} και E_{43} χρειάζεται ο παρακάτω 4 επί 4 πίνακας;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τα προβλήματα 32–44 αφορούν την κατασκευή και τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

32. Γράψτε τα παρακάτω πανάρχαια προβλήματα στην 2 επί 2 μορφή πινάκων $Ax = b$ και λύστε τα:

(α) Ο X έχει διπλάσια ηλικία από τον Y και το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 39.
(β) Τα $(x, y) = (2, 5)$ και $(3, 7)$ ανήκουν στην ευθεία $y = mx + c$. Βρείτε τα m και c.

33. Η παραβολή $y = a + bx + cx^2$ διέρχεται από τα σημεία $(x, y) = (1, 4)$, $(2, 8)$ και $(3, 14)$. Βρείτε και λύστε μια εξίσωση πινάκων ως προς τους αγνώστους (a, b, c).

34. Πολλαπλασιάστε τους παρακάτω πίνακες με την εξής σειρά: EF, FE και E^2:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

35. (α) Αν όλες οι στήλες του B είναι ίδιες, τότε όλες οι στήλες του EB είναι ίδιες, διότι καθεμία ισούται με E επί ______.
(β) Υποθέστε ότι όλες οι γραμμές του B είναι $[1 \;\; 2 \;\; 4]$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι οι γραμμές του EB *δεν* είναι όλες $[1 \;\; 2 \;\; 4]$. Αυτό που ισχύει είναι ότι οι γραμμές αυτές είναι ______.

36. Αν ο E προσθέτει τη γραμμή 1 στη γραμμή 2 και ο F προσθέτει τη γραμμή 2 στη γραμμή 1, ισούται ο EF με τον FE;

37. Η πρώτη συνιστώσα του Ax είναι $\sum a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$. Γράψτε τύπους για την τρίτη συνιστώσα του Ax και για το στοιχείο $(1, 1)$ του A^2.

38. Αν $AB = I$ και $BC = I$, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα δείξτε ότι $A = C$.

39. Ο A είναι 3 επί 5, ο B είναι 5 επί 3, ο C είναι 5 επί 1 και ο D είναι 3 επί 1. *Όλα τα στοιχεία είναι* 1. Ποιες από τις παρακάτω πράξεις πινάκων επιτρέπονται και ποιο είναι το αποτέλεσμα;

$$BA \qquad AB \qquad ABD \qquad DBA \qquad A(B + C).$$

40. Ποιες γραμμές, στήλες ή πίνακες πρέπει να πολλαπλασιάσουμε για να βρούμε

(α) την τρίτη στήλη του AB;
(β) την πρώτη γραμμή του AB;
(γ) το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή 3, στήλη 4 του AB;
(δ) το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή 1, στήλη 1 του CDE;

41. (3 επί 3 πίνακες) Επιλέξτε τον μοναδικό B για τον οποίο για κάθε πίνακα A να ισχύει:

(α) $BA = 4A$.

(β) $BA = 4B$.
(γ) Ο BA περιέχει τις γραμμές 1 και 3 του A αντεστραμμένες και τη γραμμή 2 αμετάβλητη.
(δ) Όλες οι γραμμές του BA είναι ίδιες με τη γραμμή 1 του A.

42. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν ο A^2 ορίζεται, τότε ο A είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικός.
(β) Αν οι AB και BA ορίζονται, τότε οι A και B είναι τετραγωνικοί.
(γ) Αν οι AB και BA ορίζονται, τότε οι AB και BA είναι τετραγωνικοί.
(δ) Αν $AB = B$, τότε $A = I$.

43. Αν ο A είναι m επί n, πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών πρέπει να κάνουμε

(α) για να πολλαπλασιάσουμε τον A με ένα διάνυσμα x με n συνιστώσες;
(β) για να πολλαπλασιάσουμε τον A με έναν n επί p πίνακα B; Σε αυτή την περίπτωση ο AB είναι m επί p.
(γ) για να πολλαπλασιάσουμε τον A με το εαυτό του ώστε να προκύψει A^2; Σε αυτή την περίπτωση, $m = n$.

44. Για να αποδείξετε τη σχέση $(AB)C = A(BC)$, χρησιμοποιήστε τα διανύσματα στήλες $b_1, \dots, b_n$ του B. Αρχικά υποθέστε ότι ο C έχει μόνο μία στήλη c με στοιχεία $c_1, \dots, c_n$:

Ο AB έχει στήλες $Ab_1, \dots, Ab_n$, ενώ ο Bc έχει μία στήλη $c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$.

Επομένως, ο $(AB)c = c_1 Ab_1 + \cdots + c_n Ab_n$ ισούται με $A(c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n) = A(Bc)$.

Τα δύο αθροίσματα είναι ίσα λόγω *γραμμικότητας*, οπότε $(AB)c = A(Bc)$. Το ίδιο ισχύει για κάθε άλλη ___ του C. Συνεπώς, $(AB)C = A(BC)$.

Στα προβλήματα 45–49 χρησιμοποιείται ο πολλαπλασιασμός στήλης επί γραμμή και ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ.

45. Υπολογίστε το γινόμενο AB πολλαπλασιάζοντας στήλες επί γραμμές:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}.$$

46. Στον ***πολλαπλασιασμό κατά μπλοκ*** χωρίζουμε τους πίνακες σε μπλοκ (υποπίνακες). Αν τα σχήματα των υποπινάκων επιτρέπουν τον πολλαπλασιασμό τους, τότε ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ είναι δυνατός. Αντικαταστήσετε τα x με αριθμούς και επαληθεύσετε ότι ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ πετυχαίνει.

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + BD \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \hline x & x & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \hline x & x & x \end{array}\right].$$

47. Χωρίζοντας κατάλληλα τους A, B και AB, δείξτε ότι καθένας από τους τέσσερις κανόνες πολλαπλασιασμού είναι ουσιαστικά ένας υπολογισμός του AB με πολλαπλασιασμό κατά μπλοκ:

(1) Πίνακας A επί στήλες του B.
(2) Γραμμές του A επί πίνακας B.

(3) Γραμμές του A επί στήλες του B.
(4) Στήλες του A επί γραμμές του B.

48. Ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ λέει ότι με εφαρμογή της απαλοιφής στη στήλη 1 προκύπτει

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{c}/a & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \_\_ \end{bmatrix}.$$

49. *Απαλοιφή για 2 επί 2 μπλοκ πίνακες*: Αν $A^{-1}A = I$, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή μπλοκ με CA^{-1} και αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή, βρείτε το «*συμπλήρωμα Schur*» S:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

50. Αν $i^2 = -1$, το γινόμενο $(A+iB)(x+iy)$ είναι $Ax+iBx+iAy-By$. Χρησιμοποιώντας μπλοκ, χωρίστε το πραγματικό από το φανταστικό μέρος που πολλαπλασιάζει το i:

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ ; & ; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax - By \\ ; \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{πραγματικό μέρος} \\ \text{φανταστικό μέρος} \end{array}$$

51. Υποθέστε ότι λύνουμε την $Ax = b$ για τρεις ειδικές περιπτώσεις δεξιών μελών b:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αν οι λύσεις x_1, x_2, x_3 είναι οι στήλες ενός πίνακα X, ποιος είναι ο AX;

52. Αν οι τρεις λύσεις του Προβλήματος 51 είναι τα $x_1 = (1,1,1)$, $x_2 = (0,1,1)$ και $x_3 = (0,0,1)$, λύστε την $Ax = b$ με $b = (3,5,8)$. Δυσκολότερο πρόβλημα: Ποιος είναι ο A;

53. Βρείτε όλους τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{που ικανοποιούν την} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}A.$$

54. Αν ο A είναι *βορειοδυτικός πίνακας* και ο B *νοτιοανατολικός πίνακας*, τι είδους πίνακες είναι οι AB και BA; «Βορειοδυτικός» και «νοτιοανατολικός» σημαίνει ότι ο πίνακας έχει μηδενικά κάτω και πάνω από την αντιδιαγώνιο που ξεκινάει από το $(1, n)$ και καταλήγει στο $(n, 1)$.

55. Γράψτε την $2x+3y+z+5t = 8$ σαν ένα πίνακα A (με πόσες γραμμές;) που πολλαπλασιάζει το διάνυσμα στήλη (x, y, z, t) δίνοντας το b. Οι λύσεις σχηματίζουν ένα επίπεδο στον τετραδιάστατο χώρο. *Το επίπεδο είναι τριδιάστατο χωρίς τετραδιάστατο όγκο.*

56. Ποιος 2 επί 2 πίνακας P_1 προβάλλει το διάνυσμα (x, y) στον άξονα x με αποτέλεσμα το $(x, 0)$; Ποιος πίνακας P_2 το προβάλλει στον άξονα y με αποτέλεσμα το $(0, y)$; Αν πολλαπλασιάσουμε το $(5, 7)$ με τον P_1 και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε με τον P_2, παίρνουμε (______) και (______).

57. Γράψτε το εσωτερικό γινόμενο των $(1, 4, 5)$ και (x, y, z) σαν έναν πολλαπλασιασμό πινάκων Ax. Ο A έχει μία γραμμή. Οι λύσεις της $Ax = 0$ ανήκουν σε ένα ______ κάθετο στο διάνυσμα ______. Οι στήλες του A ανήκουν μόνο στον ______-διάστατο χώρο.

58. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της MATLAB, γράψτε τις εντολές που ορίζουν τον πίνακα A και τα διανύσματα στήλες x και b. Με ποια εντολή μπορούμε να ελέγξουμε αν $Ax = b$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

59. Οι εντολές A = eye(3) και v = [3:5]' της MATLAB παράγουν τον 3 επί 3 ταυτοτικό πίνακα και το διάνυσμα στήλη $(3, 4, 5)$. Ποια είναι η έξοδος των A * v και v' * v; (Δεν απαιτείται υπολογιστής!) Τι θα συμβεί αν ζητήσουμε να υπολογιστεί ο v * A;

60. Αν πολλαπλασιάσουμε τον 4 επί 4 πίνακα A = ones(4,4) που αποτελείται μόνο από μονάδες με τη στήλη v = ones(4,1), ποιος είναι ο A * v; (Δεν απαιτείται υπολογιστής.) Αν πολλαπλασιάσουμε τον B = eye(4) + ones(4,4) με τον w = zeros(4,1) + 2 * ones(4,1), ποιος είναι ο B * w;

61. Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 **μαγικό πίνακα** M με στοιχεία $1, 2, \ldots, 9$. Το άθροισμα όλων των γραμμών, των στηλών και των διαγωνίων πρέπει να είναι 15. Η πρώτη γραμμή θα μπορούσε να είναι $8, 3, 4$. Με τι ισούται το γινόμενο M επί $(1, 1, 1)$; Με τι ισούται το γινόμενο διάνυσμα γραμμή $[1 \;\; 1 \;\; 1]$ επί M;

1.5 ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

Θα εξετάσουμε ξανά την απαλοιφή για να δούμε πώς αναπαριστάται με πίνακες. Το σημείο εκκίνησης ήταν το σύστημα $Ax = b$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = b. \tag{1}$$

Ακολούθησαν τρία βήματα απαλοιφής, με πολλαπλασιαστές $2, -1, -1$:

Βήμα 1. Αφαίρεση 2 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη.
Βήμα 2. Αφαίρεση -1 επί την πρώτη εξίσωση από την τρίτη.
Βήμα 3. Αφαίρεση -1 επί τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Το αποτέλεσμα ήταν ένα ισοδύναμο σύστημα $Ux = c$, με ένα νέο πίνακα συντελεστών U:

$$\textbf{Άνω τριγωνικός} \qquad Ux = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} = c. \tag{2}$$

Ο πίνακας U είναι ***άνω τριγωνικός*** —όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδέν.

Το νέο δεξί μέλος c προέκυψε από το αρχικό διάνυσμα b με τα ίδια βήματα που μετέτρεψαν τον A στον U. Η *ορθόδρομη απαλοιφή* συνοψίζεται στις εξής τρεις γραμμοπράξεις:

Ξεκινάμε με τα A και b.
Εφαρμόζουμε τα βήματα 1, 2, 3 με αυτή τη σειρά.
Τελειώνουμε με τα U και c.

Λύνουμε το $Ux = c$ με ανάδρομη αντικατάσταση. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη σχέση του A με τον U.

Παρουσιάσαμε τον πίνακα E του βήματος 1, τον πίνακα F του βήματος 2 και τον πίνακα G του βήματος 3 στην προηγούμενη ενότητα. Οι πίνακες αυτοί ονομάζονται ***στοιχειώδεις πίνακες*** και μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε πώς λειτουργούν. Για να αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο ℓ της εξίσωσης j από την εξίσωση i, *βάζουμε τον αριθμό* $-\ell$ *στη θέση* (i, j). Στις υπόλοιπες θέσεις διατηρούμε τα στοιχεία του ταυτοτικού πίνακα, με μονάδες στη διαγώνιο και μηδενικά παντού αλλού. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων εκτελεί την αντίστοιχη γραμμοπράξη.

Το αποτέλεσμα των τριών βημάτων είναι ο $GFEA = U$. Προσέξτε ότι ο E είναι ο πρώτος που πολλαπλασιάζει τον A, ακολουθεί ο F και κατόπιν ο G. Θα μπορούσαμε να κάνουμε κατευθείαν τον πολλαπλασιασμό GFE ώστε να βρούμε τον ένα πίνακα που μετατρέπει τον A στον U (και επίσης το b στο c). Είναι κάτω τριγωνικός (παραλείπουμε τα μηδενικά):

Από τον
A στον U

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Αυτό είναι καλό, αλλά το σημαντικότερο ερώτημα είναι το ακριβώς αντίστροφο: Πώς μπορούμε να επανέλθουμε από τον U στον A; ***Πώς μπορούμε να αναιρέσουμε τα βήματα της απαλοιφής Gauss;***

Η αναίρεση του βήματος 1 δεν είναι δύσκολη. Αντί να αφαιρέσουμε, *προσθέτουμε* δύο επί την πρώτη γραμμή στη δεύτερη. (Όχι δύο επί τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη!) Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης και της αφαίρεσης και της πρόσθεσης είναι η επιστροφή στον ταυτοτικό πίνακα:

Το αντίστροφο
της αφαίρεσης
είναι η πρόσθεση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Η μία πράξη αναιρεί την άλλη. Στην ορολογία των πινάκων, ο ένας πίνακας είναι ο ***αντίστροφος*** του άλλου. Αν ο στοιχειώδης πίνακας E έχει τον αριθμό $-\ell$ στη θέση (i, j), τότε ο αντίστροφός του, E^{-1}, έχει το $+\ell$ στην ίδια θέση. Επομένως, $E^{-1}E = I$, που είναι η εξίσωση (4).

Χρησιμοποιώντας τους E^{-1}, F^{-1} και G^{-1}, μπορούμε να αντιστρέψουμε όλα τα βήματα της απαλοιφής. Είναι καλή ιδέα να δούμε αυτούς τους αντιστρόφους τώρα, πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα. Το τελικό πρόβλημα είναι η αναίρεση ολόκληρης της διαδικασίας σε ένα βήμα ώστε να δούμε ποιος πίνακας μας επαναφέρει από τον U στον A.

Αφού το βήμα 3 ήταν το τελευταίο βήμα της μετάβασης από τον A στον U, ο πίνακας G πρέπει να είναι ο πρώτος που θα αντιστραφεί κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Οι αντίστροφοι εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά! Το δεύτερο αντίστροφο βήμα είναι ο F^{-1} και το τελευταίο ο E^{-1}:

Επιστροφή από τον U στον A η $E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A$ είναι η $LU = A$. (5)

Αντικαθιστώντας τον U με τον $GFEA$, μπορούμε να δούμε πώς αναιρούν οι αντίστροφοι τα αρχικά βήματα.

Σε αυτό το σημείο αναγνωρίζουμε τον πίνακα L που μας επαναφέρει από τον U στον A. Καλείται L, διότι είναι *κάτω τριγωνικός*, και έχει μια ιδιαίτερη ιδιότητα που φαίνεται μόνο αν πολλαπλασιάσουμε τους τρεις αντίστροφους πίνακες με τη σωστή σειρά:

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbf{2} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \mathbf{-1} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbf{2} & 1 & \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix} = L. \tag{6}$$

Η ιδιαιτερότητα είναι ότι ***τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο είναι οι πολλαπλασιαστές*** $\ell = 2, -1$ και -1. Όταν πολλαπλασιάζουμε πίνακες, συνήθως δεν υπάρχει τρόπος να δούμε απευθείας το αποτέλεσμα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι πίνακες εμφανίζονται με τη σειρά που πρέπει ώστε να μπορέσουμε να γράψουμε αμέσως το γινόμενό τους. Αν ο υπολογιστής αποθηκεύσει κάθε πολλαπλασιαστή ℓ_{ij} —τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η γραμμή οδηγός j όταν αφαιρείται από τη γραμμή i ώστε να παραχθεί το μηδέν στη θέση i, j— τότε οι πολλαπλασιαστές αυτοί μας δίνουν το πλήρες ιστορικό της απαλοιφής.

Οι αριθμοί ℓ_{ij} σχηματίζουν τον πίνακα L που μας επαναφέρει από τον U στον A.

1H ***Τριγωνική παραγοντοποίηση $A = LU$ χωρίς αντιμετάθεση γραμμών***. Ο L είναι κάτω τριγωνικός, με μονάδες στη διαγώνιο. Οι πολλαπλασιαστές ℓ_{ij} (που προκύπτουν από την απαλοιφή) βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο. Ο U είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας που προκύπτει μετά την ορθόδρομη απαλοιφή. Τα στοιχεία της διαγωνίου του U είναι οι οδηγοί.

Παράδειγμα 1

Ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ μετατρέπεται στον $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ με $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Έχουμε $LU = A$.

Παράδειγμα 2

(Απαιτείται αντιμετάθεση γραμμών)

Ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $A = LU$.

Παράδειγμα 3

(Όλοι οι οδηγοί και πολλαπλασιαστές ισούνται με 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU.$$

Για να μεταβούμε από τον A στον U εκτελούμε αφαιρέσεις γραμμών. Για να μεταβούμε από τον U στον A εκτελούμε προθέσεις γραμμών.

Παράδειγμα 4

(Ο U είναι ο ταυτοτικός πίνακας και ο L είναι ίδιος με τον A)

Περίπτωση κάτω τριγωνικού πίνακα $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}.$

Τα βήματα της απαλοιφής για αυτόν τον A είναι εύκολα: (i) ο E αφαιρεί ℓ_{21} επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2, (ii) ο F αφαιρεί ℓ_{31} επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3 και (iii) ο G αφαιρεί ℓ_{32} επί τη γραμμή 2 από τη γραμμή 3. Το αποτέλεσμα είναι ο ταυτοτικός πίνακας $U = I$. Οι αντίστροφοι των E, F και G μας επαναφέρουν στον A:

ο E^{-1} εφαρμοζόμενος στον F^{-1} εφαρμοζόμενος στον G^{-1} εφαρμοζόμενος στον I δίνει τον A.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ \ell_{21} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ επί } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \ell_{31} & & 1 \end{bmatrix} \text{ επί } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ ίσον με } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Η σειρά είναι αυτή που πρέπει ώστε τα ℓ να βρεθούν στη σωστή τους θέση. Αυτό συμβαίνει πάντα! Επισημαίνουμε ότι, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, η χρήση παρενθέσεων στον $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ δεν είναι απαραίτητη.

$A = LU$: Η περίπτωση n επί n

Η παραγοντοποίηση $A = LU$ είναι τόσο σημαντική που πρέπει να την αναλύσουμε περισσότερο. Συνήθως απουσίαζε από τα μαθήματα γραμμικής άλγεβρας όταν αυτά ακολουθούσαν μια πιο αφηρημένη προσέγγιση. Ή ίσως θεωρούνταν πολύ δύσκολη —εσείς όμως την έχετε ήδη καταλάβει. Αν στο τελευταίο Παράδειγμα 4 επιτρέψουμε οποιονδήποτε U αντί του συγκεκριμένου $U = I$, μπορούμε να δούμε πώς λειτουργεί γενικά ο κανόνας. ***Ο πίνακας L, αν εφαρμοστεί στον U, μας επαναφέρει στον A***:

$$\boldsymbol{A = LU} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{γραμμή 1 του } U \\ \text{γραμμή 2 του } U \\ \text{γραμμή 3 του } U \end{bmatrix} = \text{αρχικός } A. \tag{7}$$

Η απόδειξη γίνεται με *εφαρμογή των βημάτων της απαλοιφής*. Στη δεξιά πλευρά, μας οδηγούν από τον A στον U. Στην αριστερή πλευρά, ανάγουν τον L στον I, όπως στο Παράδειγμα 4. (Το πρώτο βήμα αφαιρεί ℓ_{21} επί $(1, 0, 0)$ από τη δεύτερη γραμμή, πράγμα που απομακρύνει το ℓ_{21}.) Και οι δύο πλευρές της (7) ισούνται τελικά με τον ίδιο πίνακα U, και τα βήματα που μας οδήγησαν εκεί είναι όλα αντιστρέψιμα. Άρα η (7) είναι σωστή και $A = LU$.

Η $A = LU$ είναι τόσο κομβική και τόσο όμορφη που στο Πρόβλημα 8 στο τέλος αυτής της ενότητας προτείνεται μια δεύτερη προσέγγιση. Μολονότι εργαζόμαστε με 3 επί 3 πίνακες, μπορείτε να αντιληφθείτε πώς εφαρμόζονται οι ίδιοι συλλογισμοί σε μεγαλύτερους πίνακες. Θα δώσουμε ένα ακόμη παράδειγμα πριν αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε την $A = LU$.

Παράδειγμα 5 ($A = LU$, με μηδενικά στις κενές θέσεις)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτό δείχνει ότι ένας πίνακας A με τρεις διαγωνίους έχει παράγοντες L και U με δύο διαγωνίους. Αυτό το παράδειγμα προέρχεται από ένα σημαντικό πρόβλημα των διαφορικών εξισώσεων (Ενότητα 1.7). Η δεύτερη διαφορά στον A είναι μια ανάδρομη διαφορά L επί μια ορθόδρομη διαφορά U.

Ένα γραμμικό σύστημα = Δύο τριγωνικά συστήματα

Από πρακτικής πλευράς, η $A = LU$ είναι ιδιαίτερα σημαντική. Είναι κάτι περισσότερο από μια καταγραφή των βημάτων της απαλοιφής· οι L και U είναι οι πίνακες που χρειαζόμαστε για να λύσουμε την $Ax = b$. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να πετάξουμε τον A! Πηγαίνουμε από το b στο c με ορθόδρομη απαλοιφή (η οποία χρησιμοποιεί τον L), και από το c στο x με ανάδρομη αντικατάσταση (η οποία χρησιμοποιεί τον U). Μπορούμε και πρέπει να κάνουμε αυτά τα βήματα χωρίς τον A:

$$\textbf{Διάσπαση της } \boldsymbol{Ax=b} \qquad \textit{Αρχικά} \quad Lc = b \quad \textit{και κατόπιν} \quad Ux = c. \tag{8}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με L και παίρνουμε $LUx = Lc$, η οποία είναι η $Ax = b$. Κάθε τριγωνικό σύστημα λύνεται γρήγορα. Αυτό ακριβώς κάνει ένας καλός κώδικας απαλοιφής:

1. ***Παραγοντοποίηση***: (από τον A βρίσκουμε τους παράγοντές του, L και U).
2. ***Επίλυση***: (από τους L, U και το b βρίσκουμε τη λύση x).

Ο χωρισμός της διαδικασίας σε ***Παραγοντοποίηση*** και ***Επίλυση*** μας επιτρέπει να επεξεργαστούμε περισσότερα από ένα b. Η υπορουτίνα ***Επίλυση*** ικανοποιεί την εξίσωση (8): λύνει δύο τριγωνικά συστήματα σε $n^2/2$ βήματα το καθένα. **Η λύση για κάθε νέο δεξί μέλος $\boldsymbol{b}$ μπορεί να βρεθεί με μόνο $\boldsymbol{n^2}$ πράξεις**. Αυτό είναι πολύ λιγότερο από τα $n^3/3$ βήματα που απαιτούνται για την παραγοντοποίηση του A στο αριστερό μέλος.

Παράδειγμα 6 Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος με δεξί μέλος το $b = (1, 1, 1, 1)$.

$$\boldsymbol{Ax=b} \quad \text{Το} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{διασπάται στις } Lc = b \text{ και } Ux = c.$$

$$\boldsymbol{Lc=b} \quad \text{Από το} \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ -c_1 + c_2 &= 1 \\ - c_2 + c_3 &= 1 \\ - c_3 + c_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{προκύπτει} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Ux=c} \quad \text{Από το} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ x_3 - x_4 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned} \quad \text{προκύπτει} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}.$$

Για τους ειδικούς αυτούς «τριδιαγώνιους πίνακες», το πλήθος των πράξεων μειώνεται από n^2 σε $2n$. Βλέπουμε ότι το $Lc = b$ λύνεται *ορθόδρομα* (το c_1 προκύπτει πριν από το c_2). Αυτό ακριβώς συμβαίνει κατά την ορθόδρομη απαλοιφή. Στη συνέχεια, το $Ux = c$ λύνεται ανάδρομα (το x_4 προκύπτει πριν από το x_3).

Παρατήρηση 1 Η μορφή LU είναι «ασύμμετρη» ως προς τις διαγωνίους: Ο L έχει μονάδες εκεί όπου ο U έχει τους οδηγούς. Αυτό μπορεί να διορθωθεί εύκολα. **Διαιρώντας,**

εξάγουμε από τον U ως παράγοντα έναν διαγώνιο πίνακα οδηγών D:

Εξαγωγή του παράγοντα D

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Στο τελευταίο παράδειγμα, όλοι οι οδηγοί ήταν $d_i = 1$, οπότε, στη συγκεκριμένη περίπτωση, $D = I$. Αυτό ήταν όμως μια πολύ ιδιαίτερη περίπτωση· κανονικά, ο LU είναι διαφορετικός από τον LDU (ο οποίος γράφεται και ως LDV).

> ***Η τριγωνική παραγοντοποίηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = LDU$, όπου οι L και U έχουν μονάδες στη διαγώνιο και D είναι ο διαγώνιος πίνακας των οδηγών.***

Όποτε βλέπουμε LDU ή LDV, καταλαβαίνουμε ότι ο U ή ο V έχει μονάδες στη διαγώνιο —κάθε γραμμή έχει διαιρεθεί με τον αντίστοιχο οδηγό που υπάρχει στον D. Επομένως, μπορούμε να μεταχειριστούμε τους L και U με τον ίδιο τρόπο. Ένα παράδειγμα διάσπασης του LU στη μορφή LDU είναι το εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = LDU.$$

Οι διαγώνιοι των L και U περιέχουν μονάδες, ενώ η διαγώνιος του D περιέχει τους οδηγούς 1 και -2.

Παρατήρηση 2 Κατά την περιγραφή των βημάτων της απαλοιφής, ίσως δόθηκε η εντύπωση ότι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν με τη συγκεκριμένη σειρά. Αυτό δεν ισχύει. Υπάρχει *κάποια* ελευθερία, και ο λεγόμενος «αλγόριθμος Crout» οργανώνει τους υπολογισμούς με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο. *Δεν υπάρχει ελευθερία ως προς τους τελικούς L, D και U.* Το βασικό συμπέρασμα είναι το εξής:

> **1θ** Αν $A = L_1D_1U_1$ και $A = L_2D_2U_2$, όπου οι L είναι κάτω τριγωνικοί με μοναδιαία διαγώνιο, οι U άνω τριγωνικοί με μοναδιαία διαγώνιο και οι D διαγώνιοι πίνακες χωρίς μηδενικά στη διαγώνιο, τότε $\boldsymbol{L_1 = L_2}$, $\boldsymbol{D_1 = D_2}$ και $\boldsymbol{U_1 = U_2}$. Οι παραγοντοποιήσεις LDU και LU καθορίζονται μονοσήμαντα από τον A.

Η απόδειξη είναι μια καλή άσκηση με αντίστροφους πίνακες που θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Αντιμεταθέσεις γραμμών και πίνακες μετάθεσης

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα το οποίο τόσην ώρα αποφεύγαμε: Ο αριθμός που αναμένουμε να χρησιμοποιήσουμε ως οδηγό μπορεί να είναι μηδέν. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί στο μέσο ενός υπολογισμού. Θα συμβεί στην αρχή, αν $a_{11} = 0$. Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής:

Μηδέν σε θέση οδηγού
$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Η δυσκολία είναι προφανής· κανένα πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης δεν μπορεί να απαλείψει τον συντελεστή 3.

Η λύση είναι εξίσου προφανής. ***Αντιμεταθέτουμε τις δύο εξισώσεις***, μετακινώντας προς τα πάνω το στοιχείο 3, στη θέση του οδηγού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο πίνακας θα γινόταν άνω τριγωνικός:

$$\textbf{Αντιμετάθεση γραμμών} \qquad \begin{aligned} 3u + 4v &= b_2 \\ 2v &= b_1 \end{aligned}$$

Για να αναπαραστήσουμε την αντιμετάθεση με πίνακες, χρειαζόμαστε έναν ***πίνακα μετάθεσης*** P που να παράγει τη συγκεκριμένη αντιμετάθεση γραμμών. Ο πίνακας αυτός προκύπτει με αντιμετάθεση των γραμμών του I:

$$\textbf{Μετάθεση} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο P επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο το b, αντιμεταθέτοντας τα b_1 και b_2. *Το νέο σύστημα είναι το* $PAx = Pb$. Η αντιμετάθεση γραμμών *δεν* αλλάζει τη θέση των αγνώστων u και v.

Ένας πίνακας μετάθεσης P έχει τις ίδιες γραμμές με τον ταυτοτικό πίνακα (με κάποια σειρά). Υπάρχει ένα μόνο «1» σε κάθε γραμμή και στήλη. Ο πιο συνηθισμένος πίνακας μετάθεσης είναι ο $P = I$ (δεν αντιμεταθέτει τίποτα). Το γινόμενο δύο πινάκων μετάθεσης είναι μια άλλη μετάθεση —οι γραμμές του I αναδιατάσσονται δύο φορές.

Μετά τον $P = I$, οι απλούστερες μεταθέσεις αντιμεταθέτουν δύο γραμμές. Άλλες μεταθέσεις αντιμεταθέτουν περισσότερες γραμμές. **Υπάρχουν $\boldsymbol{n! = (n)(n-1)\cdots(1)}$ μεταθέσεις μεγέθους $\boldsymbol{n}$**. Για τη γραμμή 1 έχουμε n επιλογές, κατόπιν για τη γραμμή 2 έχουμε $n-1$ επιλογές και τέλος για την τελευταία γραμμή έχουμε μόνο μία επιλογή. Όλες οι 3 επί 3 μεταθέσεις (υπάρχουν $3! = (3)(2)(1) = 6$ πίνακες) είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P_{21}} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P_{32}P_{21}} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P_{31}} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P_{32}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{P_{21}P_{32}} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν 24 πίνακες μετάθεσης μεγέθους $n = 4$ και μόνο δύο πίνακες μετάθεσης μεγέθους 2, συγκεκριμένα οι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Όταν μάθουμε για τους αντίστροφους και τους ανάστροφους πίνακες (στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε τους A^{-1} και A^{T}), θα ανακαλύψουμε ένα σημαντικό γεγονός: ο ***P^{-1} είναι πάντα ίδιος με τον P^{T}***.

Αν εμφανιστεί μηδενικό σε θέση οδηγού, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: ***Η δυσκολία μπορεί να αντιμετωπίζεται εύκολα ή να είναι σοβαρή***. Αυτό το διαπιστώνουμε κοιτάζοντας *κάτω από το μηδενικό*. Αν υπάρχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο πιο κάτω στην ίδια στήλη, τότε πραγματοποιούμε αντιμετάθεση γραμμών. Το μη μηδενικό στοιχείο γίνεται ο οδηγός που χρειαζόμαστε και η διαδικασία της απαλοιφής μπορεί να προχωρήσει:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} d &= 0 \implies \text{δεν υπάρχει πρώτος οδηγός} \\ a &= 0 \implies \text{δεν υπάρχει δεύτερος οδηγός} \\ c &= 0 \implies \text{δεν υπάρχει τρίτος οδηγός.} \end{aligned}$$

Αν $d = 0$, το πρόβλημα δεν μπορεί να θεραπευτεί και ο συγκεκριμένος πίνακας είναι ***ιδιόμορφος***. Δεν υπάρχει ελπίδα να βρούμε μοναδική λύση για το $Ax = b$. Αν το d *δεν* είναι μηδέν, με μια αντιμετάθεση P_{13} των γραμμών 1 και 3 το d θα μετακινηθεί στη θέση του οδηγού. Στην επόμενη θέση υπάρχει όμως επίσης μηδέν. Ο αριθμός a βρίσκεται πλέον από κάτω του (το e που βρίσκεται από πάνω είναι άχρηστο). Αν το a δεν είναι μηδέν, πραγματοποιούμε μια ακόμη αντιμετάθεση γραμμών P_{23}:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & e & f \\ 0 & \boldsymbol{a} & b \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

Και κάτι επιπλέον: Η μετάθεση $P_{23}P_{13}$ θα πραγματοποιήσει και τις δύο αντιμεταθέσεις γραμμών ταυτόχρονα:

Ο $\boldsymbol{P_{13}}$ εφαρμόζεται πρώτος
$$P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Αν το γνωρίζαμε, θα μπορούσαμε να είχαμε πολλαπλασιάσει τον A με τον P εξ αρχής. Αν οι γραμμές βρίσκονται στη σωστή σειρά PA, κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι έτοιμος να δεχτεί την εφαρμογή της απαλοιφής.

Η απαλοιφή με λίγα λόγια: $PA = LU$

Η βασική ιδέα είναι η εξής: Αν η απαλοιφή μπορεί να ολοκληρωθεί με τη βοήθεια αντιμεταθέσεων γραμμών, τότε μπορούμε να φανταστούμε ότι αυτές οι αντιμεταθέσεις πραγματοποιούνται στην αρχή (μέσω του P). *Ο πίνακας PA δεν θα χρειαστεί καμία αντιμετάθεση γραμμών.* Με άλλα λόγια, ο PA μπορεί να παραγοντοποιηθεί με τον συνήθη τρόπο στο γινόμενο L επί U. Η θεωρία της απαλοιφής Gauss μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

1I Στη ***μη ιδιόμορφη*** περίπτωση, υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P που αναδιατάσσει τις γραμμές του A έτσι ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση μηδενικών στις θέσεις των οδηγών. Το $Ax = b$ έχει *μοναδική λύση*:

Αν οι γραμμές έχουν αναδιαταχθεί εκ των προτέρων,
ο $\boldsymbol{PA}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $\boldsymbol{LU}$.

Στην ***ιδιόμορφη*** περίπτωση, κανένας P δεν μπορεί να οδηγήσει σε πλήρες σύνολο οδηγών και η απαλοιφή αποτυγχάνει.

Στην πράξη, μπορεί να πραγματοποιήσουμε μια αντιμετάθεση γραμμών και όταν ο αρχικός οδηγός είναι *κοντά* στο μηδέν —ακόμα και αν δεν είναι ακριβώς μηδέν. Η επιλογή μεγαλύτερου οδηγού περιορίζει το σφάλμα στρογγυλοποίησης.

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τον L. Ας υποθέσουμε ότι η απαλοιφή αφαιρεί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2, με αποτέλεσμα $\ell_{21} = 1$. Κατόπιν, ας υποθέσουμε ότι αντιμεταθέτει τις γραμμές 2 και 3. Αν αυτή η αντιμετάθεση γίνει εκ των προτέρων, ο πολλαπλασιαστής στην παραγοντοποίηση $PA = LU$ θα αλλάξει και θα γίνει $\ell_{31} = 1$.

Παράδειγμα 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U. \tag{10}$$

Η συγκεκριμένη αντιμετάθεση γραμμών μας οδηγεί στο LU —τώρα όμως $\ell_{31} = 1$ και $\ell_{21} = 2$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad PA = LU. \tag{11}$$

Στη MATLAB, η εντολή A([r k],:) αντιμεταθέτει τη γραμμή k με τη γραμμή r που βρίσκεται από κάτω της (όπου βρέθηκε ο k-οστός οδηγός). Ενημερώνουμε τους πίνακες L και P με τον ίδιο τρόπο. Αρχικά, $P = I$ και πρόσημο $= +1$:

```
A([r k], : ) = A([k r], : );
L([r k],1:k−1) = L([k r],1:k−1);
P([r k], : ) = P([k r], : );
sign = −sign
```

Το «**πρόσημο**» του P δηλώνει αν το πλήθος των αντιμεταθέσεων γραμμών είναι άρτιο (πρόσημο $= +1$) ή περιττό (πρόσημο $= -1$). Κάθε αντιμετάθεση γραμμών αλλάζει το πρόσημο. Η τελική τιμή του προσήμου είναι η **ορίζουσα του P** και δεν εξαρτάται από της σειρά με την οποία έγιναν οι αντιμεταθέσεις γραμμών.

Συνοψίζοντας: Ένας καλός κώδικας απαλοιφής αποθηκεύει τους L, U και P. Οι πίνακες αυτοί περιέχουν την πληροφορία που περιείχε αρχικά ο A, και μάλιστα σε πιο χρήσιμη μορφή. Το $Ax = b$ ανάγεται σε δύο τριγωνικά συστήματα. Αυτό είναι το πρακτικό ισοδύναμο του υπολογισμού που θα κάνουμε στη συνέχεια —*της εύρεσης του αντίστροφου πίνακα* A^{-1} *και της λύσης* $x = A^{-1}b$.

Προβλήματα 1.5

1. Πότε είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας μη ιδιόμορφος (έχει πλήρες σύνολο οδηγών);

2. Ποιο πολλαπλάσιο ℓ_{32} της γραμμής 2 του A θα αφαιρέσει η απαλοιφή από τη γραμμή 3 του A; Χρησιμοποιήστε την παραγοντοποιημένη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ποιοι θα είναι οι οδηγοί; Θα χρειαστεί αντιμετάθεση γραμμών;

3. Πολλαπλασιάστε τον πίνακα $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ της εξίσωσης (6) με τον πίνακα GFE της εξίσωσης (3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{επί} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάστε και με την αντίστροφη σειρά. *Γιατί είναι οι απαντήσεις αυτές που είναι;*

4. Εφαρμόζοντας απαλοιφή, υπολογίστε τους παράγοντες L και U για τους

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

5. Παραγοντοποιήστε τον A στη μορφή LU και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που προκύπτει μετά την απαλοιφή για το

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

6. Βρείτε τους E^2, E^8 και E^{-1} αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Βρείτε τα γινόμενα FGH και HGF αν (τα μηδενικά στο άνω τρίγωνο παραλείπονται)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (***Δεύτερη απόδειξη της $A = LU$***) Η τρίτη γραμμή του U προκύπτει από την τρίτη γραμμή του A με αφαίρεση πολλαπλασίων των γραμμών 1 και 2 (*του* U!):

$$\text{γραμμή 3 του } U = \text{γραμμή 3 του } A - \ell_{31}\,(\text{γραμμή 1 του } U) - \ell_{32}\,(\text{γραμμή 2 του } U).$$

(α) Γιατί αφαιρούμε γραμμές του U και όχι γραμμές του A; Απάντηση: Διότι από τη στιγμή που χρησιμοποιείται μια γραμμή οδηγού, ___.

(β) Η παραπάνω εξίσωση είναι ίδια με την

$$\begin{aligned} \text{γραμμή 3 του } A = \ell_{31}(\text{γραμμή 1 του } U) &+ \ell_{32}\,(\text{γραμμή 2 του } U) \\ &+ 1\,(\text{γραμμή 3 του } U). \end{aligned}$$

Ποιος κανόνας πολλαπλασιασμού πινάκων κάνει το παραπάνω να ισούται με γραμμή 3 του L επί U;

Με αντίστοιχο τρόπο, οι υπόλοιπες γραμμές του LU ταυτίζονται με τις γραμμές του A.

9. (α) Υπό ποιες συνθήκες είναι το παρακάτω γινόμενο μη ιδιόμορφο;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(β) Λύστε το σύστημα $Ax = b$ ξεκινώντας με το $Lc = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

10. (α) Γιατί απαιτούνται κατά προσέγγιση $n^2/2$ βήματα πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης για να λυθεί καθένα από τα $Lc = b$ και $Ux = c$;

(β) Πόσα βήματα χρειάζεται η απαλοιφή για να λύσει 10 συστήματα με τον ίδιο 60 επί 60 πίνακα συντελεστών A;

11. Λύστε το παρακάτω σύστημα σαν δύο τριγωνικά συστήματα, χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό LU για να βρείτε τον A:

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

12. Πώς θα παραγοντοποιούσατε τον A σε ένα γινόμενο UL, ενός άνω τριγωνικού επί έναν κάτω τριγωνικό πίνακα; Θα ήταν ίδιοι οι παράγοντες με αυτούς της $A = LU$;

13. Λύστε εφαρμόζοντας απαλοιφή, αντιμεταθέτοντας γραμμές όταν χρειάζεται:

$$\begin{aligned} u + 4v + 2w &= -2 \\ -2u - 8v + 3w &= 32 \\ v + w &= 1 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u + v &= 0 \\ u + v + w &= 1. \end{aligned}$$

Ποιοι πίνακες μετάθεσης χρειάζονται;

14. Γράψτε το σύνολο και των έξι 3 επί 3 πινάκων μετάθεσης, περιλαμβανομένου του $P = I$. Βρείτε τους αντιστρόφους τους, οι οποίοι είναι επίσης πίνακες μετάθεσης. Οι αντίστροφοι ικανοποιούν την $PP^{-1} = I$ και περιλαμβάνονται στο ίδιο σύνολο.

15. Βρείτε (και επαληθεύστε) τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU$ των

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Βρείτε έναν 4 επί 4 πίνακα μετάθεσης που να απαιτεί τρεις αντιμεταθέσεις γραμμών για να μπορέσει να ολοκληρωθεί η απαλοιφή (όπου $U = I$).

17. Η λιγότερο συνηθισμένη μορφή $A = LPU$ αντιμεταθέτει γραμμές μόνο στο τέλος:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \to L^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = PU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ποιος είναι ο L σε αυτή την περίπτωση; Σε σύγκριση με την $PA = LU$ του Πλαισίου 1Ι, σε αυτή την περίπτωση οι πολλαπλασιαστές παραμένουν στη θέση τους (το ℓ_{21} είναι 1 και το ℓ_{31} είναι 2 όταν $A = LPU$).

18. Ελέγξτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι ιδιόμορφα ή μη ιδιόμορφα, και αν έχουν καμία, μία ή άπειρες λύσεις:

$$\begin{aligned} v - w &= 2 \\ u - v \quad &= 2 \\ u \quad - w &= 2 \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} v - w &= 0 \\ u - v \quad &= 0 \\ u \quad - w &= 0 \end{aligned} \quad \text{και} \quad \begin{aligned} v + w &= 1 \\ u + v \quad &= 1 \\ u \quad + w &= 1. \end{aligned}$$

19. Ποιοι αριθμοί a, b, c οδηγούν σε αντιμεταθέσεις γραμμών; Ποιοι κάνουν τον πίνακα ιδιόμορφο;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Στα Προβλήματα 20–31 υπολογίζεται η παραγοντοποίηση $\boldsymbol{A = LU}$ (και $A = LDU$).

20. Η ορθόδρομη απαλοιφή μετατρέπει το $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right] x = b$ στο τριγωνικό $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] x = c$:

$$\begin{aligned} x + \ y &= 5 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x + \ y &= 5 \\ y &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 1 & 2 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Το συγκεκριμένο βήμα αφαίρεσε $\ell_{21} =$ ______ επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2. Το αντίστροφο βήμα *προσθέτει* ℓ_{21} επί τη γραμμή 1 στη γραμμή 2. Ο πίνακας για το αντίστροφο βήμα είναι $L =$ ______. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον L με το τριγωνικό σύστημα $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] x = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ προκύπτει ______ $=$ ______. Με σύμβολα, ο L πολλαπλασιάζει το $Ux = c$ και προκύπτει ______.

21. (3 επί 3 σύστημα) Η ορθόδρομη απαλοιφή μετατρέπει το $Ax = b$ στο τριγωνικό $Ux = c$:

$$\begin{aligned} x + \ y + \ z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 7 \\ x + 3y + 6z &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + \ y + \ z &= 5 \\ y + 2z &= 2 \\ 2y + 5z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + \ y + \ z &= 5 \\ y + 2z &= 2 \\ z &= 2. \end{aligned}$$

Η εξίσωση $z = 2$ του $Ux = c$ προκύπτει από την αρχική $x+3y+6z = 11$ του $Ax = b$ με αφαίρεση $\ell_{31} =$ ___ επί την εξίσωση 1 και $\ell_{32} =$ ___ επί την *τελική* εξίσωση 2. Αντιστρέφοντας τα βήματα, ανακτήσετε την $[1 \;\; 3 \;\; 6 \;\; 11]$ του $[A \;\; b]$ από τις τελικές $[1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 5]$, $[0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 2]$ και $[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2]$ του $[U \;\; c]$:

$$\text{γραμμή 3 του } \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = (\ell_{31} \text{ γραμμή } 1 + \ell_{32} \text{ γραμμή } 2 + 1 \text{ γραμμή } 3) \text{ του } \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}.$$

Με όρους πινάκων, αυτό είναι πολλαπλασιασμός με τον L. Άρα $A = LU$ και $b = Lc$.

22. Ποια είναι τα 3 επί 3 τριγωνικά συστήματα $Lc = b$ και $Ux = c$ του Προβλήματος 21; Επιβεβαιώστε ότι το $c = (5, 2, 2)$ είναι λύση το πρώτου. Ποιο x είναι λύση του δεύτερου;

23. Ποιοι δύο πίνακες απαλοιφής E_{21} και E_{32} μετατρέπουν τον A στην άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{21}A = U$; Πολλαπλασιάστε με E_{32}^{-1} και E_{21}^{-1} για να παραγοντοποιήσετε τον A στη μορφή $LU = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

24. Ποιοι τρεις πίνακες απαλοιφής E_{21}, E_{31}, E_{32} μετατρέπουν τον A στην άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$; Πολλαπλασιάζοντας με E_{32}^{-1}, E_{31}^{-1} και E_{21}^{-1}, παραγοντοποιήστε τον A στη μορφή LU όπου $L = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}$. Βρείτε τους L και U:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

25. Όταν εμφανίζεται μηδενικό σε θέση οδηγού, η παραγοντοποίηση $A = LU$ *είναι αδύνατη*! (Χρειαζόμαστε μη μηδενικούς οδηγούς d, f, i στον U.) Δείξτε απευθείας γιατί τα παρακάτω είναι και τα δύο αδύνατα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \ell & 1 & \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & g \\ & f & h \\ & & i \end{bmatrix}.$$

26. Ποιος αριθμός c οδηγεί σε μηδενικό στη δεύτερη θέση οδηγού; Χρειάζεται μια αντιμετάθεση γραμμής και η $A = LU$ είναι αδύνατη. Ποιο c οδηγεί σε μηδενικό στην τρίτη θέση οδηγού; Σε αυτή την περίπτωση, η αντιμετάθεση γραμμών δεν βοηθάει και η απαλοιφή αποτυγχάνει:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Ποιοι είναι οι L και D για τον παρακάτω πίνακα A; Ποιος είναι ο U στην $A = LU$ και ποιος ο νέος U στην $A = LDU$;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

28. Οι A και B είναι συμμετρικοί ως προς τη διαγώνιο (διότι $4 = 4$). Βρείτε τις τριπλές παραγοντοποιήσεις τους, LDU, και αναφέρετε πώς σχετίζεται ο U με τον L για τους παρακάτω συμμετρικούς πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

29. (Προτεινόμενο) Υπολογίστε τους L και U για τον συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τέσσερις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d ώστε να έχουμε $A = LU$ με τέσσερις οδηγούς.

30. Βρείτε τους L και U για τον μη συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις τέσσερις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d, r, s, t ώστε να έχουμε $A = LU$ με τέσσερις οδηγούς.

31. Οι *τριδιαγώνιοι πίνακες* έχουν μηδενικά στοιχεία παντού εκτός από την κύρια διαγώνιο και τις δύο παρακείμενες διαγωνίους. Παραγοντοποιήστε τους παρακάτω πίνακες στις μορφές $A = LU$ και $A = LDV$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}.$$

32. Λύστε το τριγωνικό σύστημα $Lc = b$ για να βρείτε το c. Κατόπιν λύστε την $Ux = c$ για να βρείτε το x:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Για ασφάλεια, βρείτε τον $A = LU$ και λύστε την $Ax = b$ ως συνήθως. Κυκλώστε το c όταν το δείτε.

33. Λύστε το $Lc = b$ για να βρείτε το c. Κατόπιν λύστε το $Ux = c$ για να βρείτε το x. Ποιος ήταν ο A;

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

34. Αν οι A και B έχουν μη μηδενικά στοιχεία στις θέσεις που σημειώνονται με x, ποια μηδενικά παραμένουν μηδενικά στους παράγοντές τους L και U;

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & 0 & x \\ x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}.$$

35. (Σημαντικό) Αν ο A έχει οδηγούς $2, 7, 6$ χωρίς αντιμεταθέσεις γραμμών, ποιοι είναι οι οδηγοί του άνω αριστερά 2 επί 2 υποπίνακα B (χωρίς τη γραμμή 3 και τη στήλη 3); Εξηγήστε γιατί.

36. Ξεκινώντας από έναν 3 επί 3 πίνακα A με οδηγούς $2, 7, 6$, προσθέστε μια τέταρτη γραμμή και στήλη ώστε να προκύψει ο M. Ποιοι είναι οι τρεις πρώτοι οδηγοί του M και γιατί; Ποια τέταρτη γραμμή και στήλη θα δώσουν σίγουρα το 9 ως τέταρτο οδηγό;

37. Χρησιμοποιώντας την chol(pascal(5)) βρείτε τους τριγωνικούς παράγοντες του πίνακα pascal(5) της MATLAB. Οι αντιμεταθέσεις γραμμών της [L, U] = lu(pascal(5)) καταστρέφουν τη δομή του τριγώνου του Pascal!

38. (Επανάληψη) Για ποιους αριθμούς c είναι αδύνατη η $A = LU$ —με τρεις οδηγούς;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Εκτιμήστε τη χρονική διαφορά για κάθε νέο δεξί μέλος b όταν $n = 800$. Κατασκευάστε τους A = rand(800), b = rand(800,1) και B = rand(800,9). Συγκρίνετε τους χρόνους με τις tic; A\b; toc και tic; A\B; toc (η οποία λύνει και για τα 9 δεξιά μέλη).

Τα Προβλήματα 40–48 αφορούν τους πίνακες μετάθεσης.

40. Υπάρχουν 12 «*άρτιες*» μεταθέσεις του $(1, 2, 3, 4)$, με *άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων*. Δύο από αυτές είναι το $(1, 2, 3, 4)$, χωρίς καμία αντιμετάθεση, και το $(4, 3, 2, 1)$, με δύο αντιμεταθέσεις. Γράψτε τις υπόλοιπες δέκα. Αντί να τις γράψετε με τη μορφή 4 επί 4 πινάκων, χρησιμοποιήστε τους αριθμούς $4, 3, 2, 1$ για να δείξετε τη θέση του 1 σε κάθε γραμμή.

41. Πόσες αντιμεταθέσεις χρειάζεται να κάνουμε για να επανέλθουμε από το $(5, 4, 3, 2, 1)$ στο $(1, 2, 3, 4, 5)$; Πόσες αντιμεταθέσεις χρειάζεται να κάνουμε για να μεταβούμε από το $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$ στο $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$; Το ένα πλήθος αντιμεταθέσεων είναι άρτιο και το άλλο περιττό. Για τη μετάβαση από το $(n, \dots, 1)$ στο $(1, \dots, n)$, δείξτε ότι για $n = 100$ και 101 το πλήθος είναι άρτιο, ενώ για $n = 102$ και 103 είναι περιττό.

42. Αν οι P_1 και P_2 είναι πίνακες μετάθεσης, το ίδιο είναι και ο $P_1 P_2$, ο οποίος έχει και αυτός τις γραμμές του I με κάποια σειρά. Δώστε παραδείγματα όπου $P_1 P_2 \neq P_2 P_1$ και $P_3 P_4 = P_4 P_3$.

43. (Προσπαθήστε να λύσετε αυτό το πρόβλημα.) Ποια μετάθεση κάνει τον PA άνω τριγωνικό; Ποιες μεταθέσεις κάνουν τον $P_1 A P_2$ κάτω τριγωνικό; ***Ο πολλαπλασιασμός του A*** *από δεξιά* ***με τον $\mathbf{P_2}$ αντιμεταθέτει τις*** ______ ***του*** *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

44. Βρείτε έναν 3 επί 3 πίνακα μετάθεσης για τον οποίο $P^3 = I$ (αλλά όχι $P = I$). Βρείτε έναν 4 επί 4 πίνακα μετάθεσης $\widehat{P}$ για τον οποίο $\widehat{P}^4 \neq I$.

45. Αν υπολογίσουμε διαδοχικά τις δυνάμεις μιας μετάθεσης, γιατί κάποιος P^k θα ισούται τελικά με τον I; Βρείτε έναν 5 επί 5 πίνακα μετάθεσης P για τον οποίο η μικρότερη δύναμη που ισούται με I να είναι η P^6. (Αυτό το πρόβλημα είναι δύσκολο. Συνδυάστε ένα 2 επί 2 μπλοκ με ένα 3 επί 3 μπλοκ.)

46. Ο πίνακας P του οποίου το γινόμενο με το (x, y, z) είναι το (z, x, y) είναι και πίνακας στροφής. Βρείτε τους P και P^3. Ο άξονας στροφής $a = (1, 1, 1)$ δεν μετακινείται, ισούται με Pa. Ποια είναι η γωνία στροφής της μετάβασης από το $v = (2, 3, -5)$ στο $Pv = (-5, 2, 3)$;

47. Αν P είναι ένας πίνακας μετάθεσης, βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $(I - P)x = 0$. (Αυτό θα σημαίνει ότι ο $I - P$ δεν έχει αντίστροφο και ότι έχει μηδενική ορίζουσα.)

48. Αν ο P έχει μονάδες στην αντιδιαγώνιο, που ξεκινάει από το $(1, n)$ και καταλήγει στο $(n, 1)$, περιγράψτε τον PAP.

1.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΙ

Ο αντίστροφος ενός n επί n πίνακα είναι ένας άλλος n επί n πίνακας. Ο αντίστροφος του A συμβολίζεται με A^{-1}. Η θεμελιώδης ιδιότητα είναι απλή: *Αν πολλαπλασιάσουμε με A και κατόπιν πολλαπλασιάσουμε με A^{-1}, επιστρέφουμε στο σημείο από όπου ξεκινήσαμε*:

Αντίστροφος πίνακας Αν $b = Ax$ τότε $A^{-1}b = x$.

Επομένως, $A^{-1}Ax = x$. Ο πίνακας A^{-1} επί A είναι ο ταυτοτικός πίνακας. ***Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο***. ***Αντίστροφος είναι αδύνατο να υπάρχει αν το Ax είναι μηδενικό και το x είναι μη μηδενικό***. Σε αυτή την περίπτωση, ο A^{-1} θα έπρεπε να μας επαναφέρει από το $Ax = 0$ στο x. Κανένας πίνακας δεν μπορεί να πολλαπλασιάσει αυτό το μηδενικό διάνυσμα Ax και να δώσει ένα μη μηδενικό διάνυσμα x.

Στόχος μας είναι να ορίσουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}, να τον υπολογίσουμε και να τον χρησιμοποιήσουμε, όταν υπάρχει —και κατόπιν να καταλάβουμε ποιοι πίνακες δεν έχουν αντίστροφο.

1ΙΑ Ο **αντίστροφος** του A είναι ένας πίνακας B τέτοιος ώστε $BA = I$ και $AB = I$. Υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος B, και συμβολίζεται με A^{-1}:

$$A^{-1}A = I \qquad \text{και} \qquad AA^{-1} = I. \tag{1}$$

Σημείωση 1 ***Ο αντίστροφος υπάρχει αν και μόνο αν η απαλοιφή παράγει n οδηγούς*** (επιτρέπονται αντιμεταθέσεις γραμμών). Η απαλοιφή λύνει το $Ax = b$ χωρίς να βρίσκει ρητά τον A^{-1}.

Σημείωση 2 Ο πίνακας A δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικούς αντιστρόφους. Ας υποθέσουμε ότι $BA = I$ και επίσης $AC = I$. Έπεται ότι $B = C$, σύμφωνα με την παρακάτω «απόδειξη με βάση τις παρενθέσεις»:

$$\text{Από την} \quad B(AC) = (BA)C \quad \text{έπεται ότι} \quad BI = IC \quad \text{η οποία είναι η} \quad B = C. \tag{2}$$

Αυτό δείχνει ότι ο *αριστερός αντίστροφος* B (με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε από αριστερά) και ο *δεξιός αντίστροφος* C (με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τον A από δεξιά ώστε να προκύψει $AC = I$) πρέπει να είναι ο *ίδιος πίνακας*.

Σημείωση 3 Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η μία και μοναδική λύση της $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$:

Πολλαπλασιάζουμε την $\boldsymbol{Ax = b}$ ***με*** $\boldsymbol{A^{-1}}$, ***οπότε*** $\boldsymbol{x = A^{-1}Ax = A^{-1}b}$.

Σημείωση 4 (Σημαντικό) ***Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$***, *τότε ο A δεν μπορεί να έχει αντίστροφο*. Επαναλαμβάνουμε: Κανένας πίνακας δεν μπορεί να μας επαναφέρει από το 0 στο x.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η $Ax = 0$ μπορεί να έχει μόνο τη μηδενική λύση $x = 0$.

Σημείωση 5 Ένας 2 επί 2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το $ad - bc$ δεν είναι μηδέν:

$$\textbf{2 επί 2 αντίστροφος} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ο αριθμός $ad - bc$ είναι η *ορίζουσα* του A. Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν (Κεφάλαιο 4). Στη MATLAB, ο έλεγχος αντιστρεψιμότητας γίνεται μέσω *της αναζήτησης n μη μηδενικών οδηγών*. Η απαλοιφή παράγει αυτούς τους οδηγούς πριν εμφανιστεί η ορίζουσα.

Σημείωση 6 Ένας διαγώνιος πίνακας έχει αντίστροφο αν κανένα στοιχείο της διαγωνίου δεν είναι μηδέν:

$$\text{Αν} \quad A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^{-1} = I.$$

Όταν έχουμε δύο πίνακες, δεν μπορούμε να κάνουμε πολλά για τον αντίστροφο του $A + B$. Το άθροισμα μπορεί να είναι ή να μην είναι αντιστρέψιμο. Ο βασικός τύπος για τις πράξεις μεταξύ πινάκων αφορά τον αντίστροφο του *γινομένου* AB δύο πινάκων. Το ίδιο ισχύει και για τους συνήθεις αριθμούς: δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε εύκολα το $(a + b)^{-1}$, αλλά το $1/ab$ διασπάται σε $1/a$ επί $1/b$. Όμως στην περίπτωση των πινάκων, *πρέπει να είναι σωστή η σειρά του πολλαπλασιασμού* —αν $ABx = y$ τότε $Bx = A^{-1}y$ και $x = B^{-1}A^{-1}y$. **Οι αντίστροφοι εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά**.

1IB Ένα γινόμενο AB αντιστρέψιμων πινάκων αντιστρέφεται μέσω του $B^{-1}A^{-1}$:

$$\textbf{Αντίστροφος του } \boldsymbol{AB} \qquad \boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.} \tag{4}$$

Απόδειξη Για να δείξουμε ότι ο $B^{-1}A^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του AB, τους πολλαπλασιάζουμε και χρησιμοποιούμε την προσεταιριστική ιδιότητα για να απομακρύνουμε τις παρενθέσεις. Επισημαίνουμε ότι ο B βρίσκεται δίπλα στον B^{-1}:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I. \end{aligned}$$

■

Αντίστοιχος κανόνας ισχύει για τρεις ή περισσότερους πίνακες:

$$\textbf{Αντίστροφος του } \boldsymbol{ABC} \qquad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Είδαμε αυτή την αλλαγή σειράς όταν αντιστρέψαμε τους πίνακες απαλοιφής E, F, G για να επανέλθουμε από τον U στον A. Στην ορθόδρομη κατεύθυνση, ο $GFEA$ ήταν ο U. Στην ανάδρομη κατεύθυνση, ο $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ ήταν το γινόμενο των αντιστρόφων. *Αφού ο G ήταν τελευταίος, ο G^{-1} είναι πρώτος*. Παρακαλώ επιβεβαιώστε ότι ο A^{-1} θα ήταν ο $U^{-1}GFE$.

Ο υπολογισμός του A^{-1}: Η μέθοδος Gauss–Jordan

Η εξίσωση $AA^{-1} = I$, αν θεωρηθεί ***στήλη προς στήλη***, προσδιορίζει κάθε στήλη του A^{-1}. Η πρώτη στήλη του A^{-1} πολλαπλασιάζεται με A και δίνει την πρώτη στήλη του ταυτοτικού πίνακα: $Ax_1 = e_1$. Με αντίστοιχο τρόπο, $Ax_2 = e_2$ και $Ax_3 = e_3$· τα e είναι οι στήλες του I. Σε ένα 3 επί 3 παράδειγμα, το γινόμενο A επί A^{-1} ισούται με I:

$$\boldsymbol{Ax_i = e_i} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Άρα έχουμε τρία συστήματα εξισώσεων (ή n συστήματα), τα οποία έχουν όλα τον ίδιο πίνακα συντελεστών A. Τα δεξιά μέλη e_1, e_2, e_3 είναι διαφορετικά, αλλά η απαλοιφή μπορεί να πραγματοποιηθεί *σε όλα τα συστήματα ταυτόχρονα*. Αυτή είναι η ***μέθοδος Gauss–Jordan***. Αντί να σταματήσει στον U και να αρχίσει την ανάδρομη αντικατάσταση, συνεχίζει αφαιρώντας πολλαπλάσια μιας γραμμής *από τις από πάνω γραμμές*. Με αυτό τον τρόπο παράγονται μηδενικά τόσο πάνω όσο και κάτω από τη διαγώνιο. Όταν φτάσει στον ταυτοτικό πίνακα έχει βρει τον A^{-1}.

Στο παράδειγμα κρατάμε και τις τρεις στήλες e_1, e_2, e_3, και εργαζόμαστε με γραμμές μήκους έξι:

Παράδειγμα 1 Χρήση της μεθόδου Gauss–Jordan για την εύρεση του A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{οδηγός} = \mathbf{2} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{-2} & -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{3} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{οδηγός} = \mathbf{-8} \to \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{-2} & -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & L^{-1} \end{bmatrix}.$$

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνεται το πρώτο μισό —η ορθόδρομη απαλοιφή. Ο άνω τριγωνικός U εμφανίζεται στις τρεις πρώτες στήλες. Οι άλλες τρεις στήλες είναι ίδιες με τις στήλες του L^{-1}. (Το αποτέλεσμα της εφαρμογής των στοιχειωδών πράξεων GFE στον ταυτοτικό πίνακα.) Στο δεύτερο μισό θα μεταβούμε από τον U στον I (πολλαπλασιάζοντας με U^{-1}). Αυτό θα μετατρέψει τον L^{-1} στον $U^{-1}L^{-1}$, που είναι ο A^{-1}. **Δημιουργώντας μηδενικά**

πάνω από τους οδηγούς, φτάνουμε στον A^{-1}:

$$\textbf{Δεύτερο μισό} \quad \begin{bmatrix} U & L^{-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{0} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & \mathbf{0} & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{μηδενικά πάνω από τους οδηγούς} \to \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & \mathbf{0} & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{διαίρεση με τους οδηγούς} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{12}{16}} & \mathbf{-\frac{5}{16}} & \mathbf{-\frac{6}{16}} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{\frac{4}{8}} & \mathbf{-\frac{3}{8}} & \mathbf{-\frac{2}{8}} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \boldsymbol{A^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Στο τελευταίο βήμα διαιρέσαμε τις γραμμές με τους αντίστοιχους οδηγούς 2, -8 και 1. Ο πίνακας συντελεστών στο αριστερό μισό έγινε ο ταυτοτικός πίνακας. Αφού από τον A οδηγηθήκαμε στον I, οι ίδιες πράξεις στο δεξιό μισό πρέπει να μας οδήγησαν από τον I στον A^{-1}. Άρα έχουμε υπολογίσει τον αντίστροφο.

Μια σημείωση για το μέλλον: Βλέπουμε ότι η ορίζουσα -16 εμφανίζεται στους παρανομαστές του A^{-1}. **Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των οδηγών $(2)(-8)(1)$**. Εμφανίζεται στο τέλος, όταν οι γραμμές διαιρούνται με τους οδηγούς.

Παρατήρηση 1 Παρά τη σπουδαία μας επιτυχία να υπολογίσουμε τον A^{-1}, δεν συνιστώ τον υπολογισμό του. Ομολογουμένως, ο A^{-1} λύνει την $Ax = b$ σε ένα βήμα. Ωστόσο, δύο τριγωνικά βήματα είναι καλύτερα:

$$\text{η} \quad x = A^{-1}b \quad \text{διασπάται στις} \quad Lc = b \quad \text{και} \quad Ux = c.$$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε $c = L^{-1}b$ και κατόπιν $x = U^{-1}c = U^{-1}L^{-1}b$. Προσέξτε όμως ότι δεν σχηματίσαμε ρητά, και όταν λύνουμε πραγματικά προβλήματα *δεν θα πρέπει να σχηματίζουμε*, τους πίνακες L^{-1} και U^{-1}. Θα ήταν σπατάλη χρόνου, αφού χρειαζόμαστε μόνο την ανάδρομη αντικατάσταση για το x (και η ορθόδρομη αντικατάσταση έδωσε το c).

Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει για τον A^{-1}· ο πολλαπλασιασμός $A^{-1}b$ θα απαιτούσε και αυτός n^2 βήματα. ***Αυτό που θέλουμε είναι η λύση, και όχι όλα τα στοιχεία του αντιστρόφου.***

Παρατήρηση 2 Από καθαρή περιέργεια, θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τις πράξεις που απαιτούνται για να βρούμε τον A^{-1}. Συνήθως, το πλήθος τους για κάθε νέο δεξί μέλος είναι n^2, οι μισές για την ορθόδρομη κατεύθυνση και οι άλλες μισές για την ανάδρομη αντικατάσταση. Για n δεξιά μέλη $e_1, \ldots, e_n$, αυτό δίνει n^3. Αν συμπεριλάβουμε και τις $n^3/3$ πράξεις επί του ίδιου του A, το άθροισμα φαίνεται να είναι $4n^3/3$.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι κάπως υψηλότερο από το πραγματικό λόγω των μηδενικών που περιέχει κάθε e_j. Η ορθόδρομη απαλοιφή αλλάζει μόνο τα μηδενικά κάτω από το 1. Αυτό το τμήμα έχει μόνο $n - j$ συνιστώσες, άρα το πλήθος για το e_j είναι στην πραγματικότητα $(n-j)^2/2$. Αθροίζοντας για όλα τα j, βρίσκουμε ότι το σύνολο για την ορθόδρομη απαλοιφή είναι $n^3/6$. Αυτό πρέπει να συνδυαστεί με τις συνήθεις $n^3/3$ πράξεις που εφαρμόζονται στον

A και τα $n(n^2/2)$ βήματα της ανάδρομης αντικατάστασης που παράγουν τελικά τις στήλες x_j του A^{-1}. *Το τελικό πλήθος πολλαπλασιασμών για τον υπολογισμό του A^{-1} είναι n^3:*

$$\textbf{Πλήθος πράξεων} \qquad \frac{n^3}{6} + \frac{n^3}{3} + n\left(\frac{n^2}{2}\right) = n^3.$$

Το πλήθος αυτό είναι αξιοσημείωτα χαμηλό. Δεδομένου ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων απαιτεί από μόνος του n^3 βήματα, για τον υπολογισμό του A^{-1} απαιτούνται τόσες πράξεις όσες απαιτούνται για τον υπολογισμό του A^2! Το γεγονός αυτό ακούγεται σχεδόν απίστευτο (και, από όσο μπορούμε να συμπεράνουμε, για τον υπολογισμό του A^3 απαιτούνται οι διπλάσιες πράξεις). Παρόλα αυτά, αν δεν μας χρειάζεται ο A^{-1}, δεν θα πρέπει να τον υπολογίσουμε.

Παρατήρηση 3 Στη μέθοδο Gauss–Jordan κινηθήκαμε ορθόδρομα μέχρι να φτάσουμε στον U, πριν ξεκινήσουμε την ανάδρομη πορεία παραγωγής των μηδενικών πάνω από τους οδηγούς. Κινηθήκαμε δηλαδή όπως στην απαλοιφή Gauss, αλλά τα πράγματα μπορούν να γίνουν και με διαφορετική σειρά. Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τον δεύτερο οδηγό μόλις φτάσαμε σε αυτόν, ώστε να δημιουργήσουμε ένα μηδέν τόσο από πάνω όσο και από κάτω του. Αυτό δεν είναι έξυπνο. Εκείνη τη στιγμή, η δεύτερη γραμμή είναι πρακτικά γεμάτη, ενώ προς το τέλος έχει μηδενικά που προέκυψαν από τις γραμμοπράξεις που έχουν ήδη λάβει χώρα στις από πάνω γραμμές.

Αντιστρέψιμος = Μη ιδιόμορφος (n οδηγοί)

Τελικά, θέλουμε να ξέρουμε ποιοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και ποιοι δεν είναι. Αυτό το ερώτημα είναι τόσο σημαντικό που έχει πολλές απαντήσεις. *Βλ. την τελευταία σελίδα του βιβλίου!*

Σε καθένα από τα πέντε πρώτα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε ένα διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) κριτήριο αντιστρεψιμότητας. Μερικές φορές, τα κριτήρια γενικεύονται για παραλληλόγραμμους πίνακες και μονόπλευρους αντιστρόφους: Στο Κεφάλαιο 2 αναζητούμε ανεξάρτητες γραμμές και ανεξάρτητες στήλες, και στο Κεφάλαιο 3 αντιστρέφουμε τον AA^{T} και τον $A^{\mathrm{T}}A$. Στα άλλα κεφάλαια αναζητούμε ***μη μηδενικές ορίζουσες***, ***μη μηδενικές ιδιοτιμές*** ή ***μη μηδενικούς οδηγούς***. Το τελευταίο είναι το κριτήριο που συναντάμε στην απαλοιφή Gauss. Θα δείξουμε (σε λίγες θεωρητικές παραγράφους) ότι το κριτήριο των οδηγών επιτυγχάνει.

Ας υποθέσουμε ότι ο A έχει ένα πλήρες σύνολο n οδηγών. Από το $AA^{-1} = I$ προκύπτουν n ξεχωριστά συστήματα $Ax_i = e_i$ για τις στήλες του A^{-1}, τα οποία μπορούν να επιλυθούν με απαλοιφή ή με τη μέθοδο Gauss–Jordan. Μπορεί να χρειαστούν αντιμεταθέσεις γραμμών, αλλά οι στήλες του A^{-1} είναι μονοσήμαντα ορισμένες.

Για να είμαστε ακριβείς, πρέπει να δείξουμε ότι ο πίνακας A^{-1} με αυτές τις στήλες είναι και *αριστερός* αντίστροφος. Λύνοντας την $AA^{-1} = I$ έχουμε λύσει ταυτόχρονα και την $A^{-1}A = I$, αλλά γιατί; **Ένας μονόπλευρος αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα είναι αυτομάτως και αμφίπλευρος αντίστροφος**. Για να καταλάβετε γιατί, προσέξτε ότι *κάθε βήμα της μεθόδου Gauss–Jordan είναι ένας πολλαπλασιασμός από αριστερά με έναν στοιχειώδη πίνακα*. Επιτρέπουμε τρία είδη στοιχειωδών πινάκων:

1. τους E_{ij} για να αφαιρούμε ένα πολλαπλάσιο ℓ της γραμμής j από τη γραμμή i,
2. τους P_{ij} για να αντιμεταθέτουμε τις γραμμές i και j,
3. τους D (ή D^{-1}) για να διαιρούμε όλες τις γραμμές με τους οδηγούς τους.

Η μέθοδος Gauss–Jordan είναι στην πραγματικότητα μια γιγάντια ακολουθία πολλαπλασιασμών πινάκων:

$$(D^{-1} \cdots E \cdots P \cdots E)A = I. \tag{6}$$

Ο πίνακας στην παρένθεση, στα αριστερά του A, είναι προφανώς ένας αριστερός αντίστροφος! Υπάρχει, ισούται με τον δεξιό αντίστροφο σύμφωνα με τη Σημείωση 2, άρα ***κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι αντιστρέψιμος***.

Ισχύει και το αντίστροφο: ***Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, έχει n οδηγούς***. Σε μια ακραία περίπτωση, αυτό είναι προφανές: Ο A δεν μπορεί να έχει μια ολόκληρη στήλη μηδενικών. Ο αντίστροφος δεν θα μπορούσε ποτέ να δώσει μια στήλη του I πολλαπλασιάζοντας μια στήλη μηδενικών. Σε μια λιγότερο ακραία περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι η απαλοιφή ξεκινάει με έναν αντιστρέψιμο πίνακα A, αλλά αποτυγχάνει όταν φτάσει στη στήλη 3:

Αποτυχία
Δεν υπάρχει οδηγός στη στήλη 3

$$A' = \begin{bmatrix} d_1 & x & x & x \\ 0 & d_2 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας δεν μπορεί να έχει αντίστροφο, ανεξάρτητα από το ποια είναι τα x. Μια απόδειξη είναι να χρησιμοποιήσουμε στηλοπράξεις (για πρώτη φορά;) ώστε να μηδενίσουμε ολόκληρη την τρίτη στήλη. Αφαιρώντας πολλαπλάσια της στήλης 2 και κατόπιν της στήλης 1, φτάνουμε σε έναν πίνακα που είναι σίγουρα μη αντιστρέψιμος. Συνεπώς, ο αρχικός A δεν ήταν αντιστρέψιμος. Η απαλοιφή μάς δίνει ένα πλήρες κριτήριο: *Ένας n επί n πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει n οδηγούς.*

Ο ανάστροφος πίνακας

Χρειαζόμαστε έναν ακόμη πίνακα, ο οποίος ευτυχώς είναι πολύ απλούστερος από τον αντίστροφο. Ο ***ανάστροφος*** του A συμβολίζεται με A^{T}. Οι στήλες του προκύπτουν απευθείας από τις γραμμές του A —*η i-οστή γραμμή του A γίνεται η i-οστή στήλη του A^{T}*:

Ανάστροφος Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ τότε $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Ταυτόχρονα, οι στήλες του A γίνονται οι γραμμές του A^{T}. Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, τότε ο A^{T} είναι n επί m. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο κατοπτρισμός του πίνακα ως προς την κύρια διαγωνιό του· το στοιχείο στη γραμμή i και στήλη j του A^{T} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή j και στήλη i του A:

Στοιχεία του A^{T}

$$(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}. \tag{7}$$

Ο ανάστροφος ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός. Ο ανάστροφος του A^{T} μας επαναφέρει στον A.

Αν προσθέσουμε δύο πίνακες και αναστρέψουμε το άθροισμα, θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το αν αναστρέφαμε πρώτα και στη συνέχεια προσθέταμε: ο $(A + B)^{\mathrm{T}}$ είναι ίδιος με τον $A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$. Ποιος είναι όμως ο ανάστροφος ενός γινομένου AB ή ενός αντιστρόφου A^{-1}; Ακολουθούν οι βασικές σχέσεις αυτής της ενότητας:

1ΙΓ (i) Ο ανάστροφος του AB είναι $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.
(ii) Ο ανάστροφος του A^{-1} είναι $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Προσέξτε ότι ο τύπος για τον $(AB)^{\mathrm{T}}$ μοιάζει με εκείνον για τον $(AB)^{-1}$. Και στις δύο περιπτώσεις, αντιστρέφουμε τη σειρά και παίρνουμε τους $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ και $B^{-1}A^{-1}$. Η απόδειξη για τον αντίστροφο ήταν εύκολη, αλλά η απόδειξη για τον ανάστροφο απαιτεί εξαιρετική υπομονή με τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Η πρώτη γραμμή του $(AB)^{\mathrm{T}}$ είναι η πρώτη στήλη του AB. Άρα οι στήλες του A σταθμίζονται με την πρώτη στήλη του B. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές του A^{T} σταθμίζονται με την πρώτη γραμμή του B^{T}. Αυτή ακριβώς είναι η πρώτη γραμμή του $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Οι άλλες γραμμές των $(AB)^{\mathrm{T}}$ και $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ ταυτίζονται και αυτές.

$$\textbf{Ξεκινάμε από τον} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Αναστρέφουμε} \qquad B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Για να αποδείξουμε τον τύπο για τον $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, ξεκινάμε από τις $AA^{-1} = I$ και $A^{-1}A = I$ και παίρνουμε αναστρόφους. Στο ένα μέλος, $I^{\mathrm{T}} = I$. Στο άλλο μέλος, από το μέρος (i) γνωρίζουμε τον ανάστροφο του γινομένου. Διαπιστώνουμε ότι ο $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ είναι ο αντίστροφος του A^{T}, άρα αποδείξαμε την (ii):

$$\textbf{Αντίστροφος του } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \textbf{Ανάστροφος του } \boldsymbol{A}^{-1} \qquad (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = I. \tag{8}$$

Συμμετρικοί πίνακες

Έχοντας αποδείξει τις παραπάνω ιδιότητες, μπορούμε να παρουσιάσουμε μια ειδική κατηγορία πινάκων, ίσως τη σημαντικότερη όλων. ***Ένας συμμετρικός πίνακας είναι ένας πίνακας που ισούται με τον ανάστροφό του***: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$. Ο πίνακας είναι υποχρεωτικά τετραγωνικός. Κάθε στοιχείο στη μία πλευρά της διαγωνίου ισούται με την «κατοπτρική του εικόνα» στην άλλη πλευρά: $a_{ij} = a_{ji}$. Δύο απλά παραδείγματα είναι οι A και D (και ο A^{-1}):

$$\textbf{Συμμετρικοί πίνακες} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ένας συμμετρικός πίνακας δεν χρειάζεται να είναι αντιστρέψιμος· θα μπορούσε να είναι και ένας πίνακας μηδενικών. *Αν όμως ο A^{-1} υπάρχει είναι και αυτός συμμετρικός*. Σύμφωνα με τη σχέση (ii), ο ανάστροφος του A^{-1} ισούται πάντα με $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$· για έναν συμμετρικό πίνακα αυτός είναι απλώς ο A^{-1}. Ο A^{-1} ισούται με τον ανάστροφό του· είναι συμμετρικός όποτε είναι και ο A. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ***αν πολλαπλασιάσουμε οποιονδήποτε πίνακα $\boldsymbol{R}$ με τον $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ παίρνουμε έναν συμμετρικό πίνακα***.

Συμμετρικά γινόμενα $R^{\mathrm{T}}R$, RR^{T} και LDL^{T}

Επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε πίνακα R, πιθανώς παραλληλόγραμμο. Αν πολλαπλασιάσουμε τον R^{T} με τον R, το γινόμενο $R^{\mathrm{T}}R$ είναι αυτομάτως ένας τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας:

$$\textbf{\textit{Ο ανάστροφος του}}\quad \boldsymbol{R^{\mathrm{T}}R}\quad \textbf{\textit{είναι ο}}\quad \boldsymbol{R^{\mathrm{T}}(R^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}},\quad \textbf{\textit{ο οποίος είναι ο}}\quad \boldsymbol{R^{\mathrm{T}}R}. \tag{9}$$

Αυτή είναι μια γρήγορη απόδειξη της συμμετρίας του $R^{\mathrm{T}}R$. Κάθε στοιχείο i, j είναι το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του R^{T} (στήλη i του R) με τη στήλη j του R. Το στοιχείο (j, i) είναι το ίδιο εσωτερικό γινόμενο, στήλη j επί στήλη i. Άρα ο $R^{\mathrm{T}}R$ είναι συμμετρικός.

Ο RR^{T} είναι επίσης συμμετρικός, αλλά διαφορετικός από τον $R^{\mathrm{T}}R$. Η εμπειρία δείχνει ότι τα περισσότερα επιστημονικά προβλήματα που ξεκινούν με έναν παραλληλόγραμμο πίνακα R καταλήγουν στον $R^{\mathrm{T}}R$, ή στον RR^{T}, ή και στους δύο.

Παράδειγμα 2 Από τους $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $R^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ προκύπτουν οι $R^{\mathrm{T}}R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $RR^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

Το γινόμενο $R^{\mathrm{T}}R$ είναι n επί n. Με την αντίστροφη σειρά, ο RR^{T} είναι m επί m. Ακόμα και αν $m = n$, δεν είναι ιδιαίτερα πιθανό να έχουμε $R^{\mathrm{T}}R = RR^{\mathrm{T}}$. Μπορεί να συμβεί να ισχύει η ισότητα, αλλά δεν είναι το συνηθισμένο.

Οι συμμετρικοί πίνακες εμφανίζονται σε κάθε αντικείμενο που διέπεται από δίκαιους νόμους. «Για κάθε δράση υπάρχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση». Στο στοιχείο a_{ij} που δίνει τη δράση του i επί του j αντιστοιχεί το a_{ji}. Θα δούμε αυτή τη συμμετρία στην επόμενη ενότητα, στις διαφορικές εξισώσεις. Στην παρούσα ενότητα, ο LU δεν αποτυπώνει τη συμμετρία αλλά ο LDL^{T} την αποτυπώνει τέλεια.

1ΙΔ Αν ο $A = A^{\mathrm{T}}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $A = LDU$ χωρίς αντιμετάθεση γραμμών, τότε ο U είναι ο ανάστροφος του L. ***Η συμμετρική παραγοντοποίηση γίνεται*** $\boldsymbol{A = LDL^{\mathrm{T}}}$.

Ο ανάστροφος του $A = LDU$ είναι ο $A^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}$. Αφού $A = A^{\mathrm{T}}$, έχουμε δύο παραγοντοποιήσεις του A σε ένα γινόμενο κάτω τριγωνικού επί διαγώνιο επί άνω τριγωνικό πίνακα. (Ο L^{T} είναι άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο, ακριβώς όπως ο U.) Αφού η παραγοντοποίηση είναι μοναδική (βλ. Πρόβλημα 17), ο L^{T} πρέπει να ταυτίζεται με τον U.

$$\boldsymbol{L^{\mathrm{T}} = U \text{ και } A = LDL^{\mathrm{T}}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = LDL^{\mathrm{T}}.$$

Όταν εφαρμόζουμε απαλοιφή σε έναν συμμετρικό πίνακα, η $A^{\mathrm{T}} = A$ αποτελεί πλεονέκτημα. Οι μικρότεροι πίνακες παραμένουν συμμετρικοί καθώς προχωράει η απαλοιφή, και μπορούμε να δουλεύουμε με τον μισό πίνακα! Η κάτω δεξιά γωνία παραμένει συμμετρική:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d - \dfrac{b^2}{a} & \boldsymbol{e - \dfrac{bc}{a}} \\ 0 & \boldsymbol{e - \dfrac{bc}{a}} & f - \dfrac{c^2}{a} \end{bmatrix}.$$

Ο όγκος εργασίας της απαλοιφής μειώνεται από $n^3/3$ σε $n^3/6$. Δεν χρειάζεται να αποθηκεύουμε τα στοιχεία και των δύο πλευρών της διαγωνίου ή να αποθηκεύουμε και τον L και τον U.

Προβλήματα 1.6

1. Βρείτε τους αντιστρόφους (δεν απαιτείται ειδικό σύστημα) των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. (α) Βρείτε τους αντιστρόφους των πινάκων μετάθεσης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Εξηγήστε γιατί στην περίπτωση των πινάκων μετάθεσης ο P^{-1} *είναι πάντα ίδιος με τον* P^{T}. Δείξτε ότι οι μονάδες βρίσκονται στις σωστές θέσεις ώστε να έχουμε $PP^{\mathrm{T}} = I$.

3. Αν $AB = C$, βρείτε έναν τύπο για τον A^{-1}. Βρείτε επίσης τον A^{-1} αν $PA = LU$.

4. (α) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = AC$, αποδείξτε γρήγορα ότι $B = C$.
(β) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, βρείτε ένα παράδειγμα όπου $AB = AC$ αλλά $B \neq C$.

5. Αν ο αντίστροφος του A^2 είναι ο B, δείξτε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο AB. (Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος όποτε είναι αντιστρέψιμος ο A^2.)

6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gauss–Jordan αντιστρέψτε τους

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Βρείτε τρεις 2 επί 2 πίνακες, διαφορετικούς από τους $A = I$ και $A = -I$, που να είναι αντίστροφοι του εαυτού τους: $A^2 = I$.

8. Δείξτε ότι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο λύνοντας την $Ax = 0$ και αποτυγχάνοντας να λύσετε την

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Υποθέστε ότι η απαλοιφή αποτυγχάνει διότι δεν υπάρχει οδηγός στη στήλη 3:

$$\textbf{Ανυπαρξία οδηγού} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι ο A δεν μπορεί να αντιστρέψιμος. Η τρίτη γραμμή του A^{-1}, πολλαπλασιαζόμενο με τον A, θα πρέπει να δώσει την τρίτη γραμμή $[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$ του $A^{-1}A = I$. Γιατί είναι αυτό αδύνατο;

10. Βρείτε τους αντιστρόφους (με οποιονδήποτε έγκυρο τρόπο) των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

11. Δώστε παραδείγματα πινάκων A και B για τους οποίους

(α) ο $A+B$ δεν είναι αντιστρέψιμος μολονότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.
(β) ο $A+B$ είναι αντιστρέψιμος μολονότι οι A και B δεν είναι αντιστρέψιμοι.
(γ) οι A, B και $A+B$ είναι όλοι αντιστρέψιμοι.

Στην τελευταία περίπτωση, χρησιμοποιώντας την $A^{-1}(A+B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, δείξτε ότι ο $C = B^{-1} + A^{-1}$ είναι και αυτός αντιστρέψιμος —και βρείτε έναν τύπο για τον C^{-1}.

12. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ποιες ιδιότητες του A ισχύουν και για τον A^{-1};

(α) Ο A είναι τριγωνικός.
(β) Ο A είναι συμμετρικός.
(γ) Ο A είναι τριδιαγώνιος.
(δ) Όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί.
(ε) Όλα τα στοιχεία είναι κλάσματα (περιλαμβάνονται αριθμοί όπως το $\frac{3}{1}$).

13. Αν $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, υπολογίστε τους $A^{\mathrm{T}}B$, $B^{\mathrm{T}}A$, AB^{T} και BA^{T}.

14. Αν ο B είναι τετραγωνικός, δείξτε ότι ο $A = B + B^{\mathrm{T}}$ είναι πάντα συμμετρικός και ότι ο $K = B - B^{\mathrm{T}}$ είναι πάντα *αντισυμμετρικός* —το οποίο σημαίνει ότι $K^{\mathrm{T}} = -K$. Βρείτε τους πίνακες A και K όταν $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, και γράψτε τον B σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

15. (α) Πόσα στοιχεία μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα σε έναν συμμετρικό πίνακα μεγέθους n;
(β) Πόσα στοιχεία μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα ($K^{\mathrm{T}} = -K$) μεγέθους n; Η διαγώνιος του K είναι μηδέν!

16. (α) Αν $A = LDU$, με μονάδες στις διαγωνίους των L και U, ποια είναι η αντίστοιχη παραγοντοποίηση του A^{T}; Προσέξτε ότι οι A και A^{T} (τετραγωνικοί πίνακες χωρίς αντιμεταθέσεις γραμμών) έχουν τους ίδιους οδηγούς.
(β) Ποια τριγωνικά συστήματα θα δώσουν τη λύση του $A^{\mathrm{T}}y = b$;

17. Αν $A = L_1D_1U_1$ και $A = L_2D_2U_2$, αποδείξτε ότι $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$ και $U_1 = U_2$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η παραγοντοποίηση είναι μοναδική.

(α) Συναγάγετε την εξίσωση $L_1^{-1}L_2D_2 = D_1U_1U_2^{-1}$ και εξηγήστε γιατί το ένα μέλος είναι κάτω τριγωνικός και το άλλο άνω τριγωνικός πίνακας.
(β) Συγκρίνετε τις κύριες διαγωνίους και κατόπιν συγκρίνετε τα εκτός διαγωνίων στοιχεία.

18. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των A και B ώστε οι πίνακες να είναι αντιστρέψιμοι;

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

19. Υπολογίστε τη συμμετρική LDL^{T} παραγοντοποίηση των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

20. Βρείτε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

21. (Αξιοσημείωτο) Αν οι A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες, δείξτε ότι ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος αν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Ξεκινήστε από την $B(I - AB) = (I - BA)B$.

22. Βρείτε τους αντιστρόφους (απευθείας ή χρησιμοποιώντας τον 2 επί 2 τύπο) των A, B και C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

23. Λύστε ως προς τις στήλες του $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

24. Δείξτε ότι ο $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο προσπαθώντας να λύσετε ως προς τη στήλη (x, y):

$$\text{το} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{πρέπει να περιλαμβάνει το} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

25. (Σημαντικό) Αν για τον A ισχύει γραμμή $1 +$ γραμμή $2 =$ γραμμή 3, δείξτε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος:

(α) Εξηγήστε γιατί το $Ax = (1, 0, 0)$ δεν μπορεί να έχει λύση.
(β) Για ποια δεξιά μέλη (b_1, b_2, b_3) ενδέχεται να έχει λύση το $Ax = b$;
(γ) Τι συμβαίνει στη γραμμή 3 κατά την απαλοιφή;

26. Αν για τον A ισχύει στήλη $1 +$ στήλη $2 =$ στήλη 3, δείξτε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος:

(α) Βρείτε μια μη μηδενική λύση x του $Ax = 0$. Ο πίνακας είναι 3 επί 3.
(β) Μετά την απαλοιφή εξακολουθεί να ισχύει ότι στήλη $1 +$ στήλη $2 =$ στήλη 3. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τρίτος οδηγός.

27. Υποθέστε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι αντιμεταθέτουμε τις δύο πρώτες γραμμές του ώστε να καταλήξουμε στον B. Είναι ο νέος πίνακας B αντιστρέψιμος; Πώς θα βρίσκατε τον B^{-1} από τον A^{-1};

28. Αν το γινόμενο $M = ABC$ τριών τετραγωνικών πινάκων είναι αντιστρέψιμο, τότε οι A, B, C είναι αντιστρέψιμοι. Βρείτε έναν τύπο για τον B^{-1} που να περιέχει τους M^{-1}, A και C.

29. Αποδείξτε ότι ένας πίνακας με μια στήλη μηδενικών δεν μπορεί να έχει αντίστροφο.

30. Κάντε τον πολλαπλασιασμό $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ επί $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Ποιος είναι ο αντίστροφος κάθε πίνακα αν $ad \neq bc$;

31. (α) Ποιος πίνακας E έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τα εξής τρία βήματα; Αφαίρεση της γραμμής 1 από τη γραμμή 2, αφαίρεση της γραμμής 1 από τη γραμμή 3, κατόπιν αφαίρεση της γραμμής 2 από τη γραμμή 3.

(β) Ποιος πίνακας L έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τα εξής τρία αντίστροφα βήματα; Πρόσθεση της γραμμής 2 στη γραμμή 3, πρόσθεση της γραμμής 1 στη γραμμή 3, κατόπιν πρόσθεση της γραμμής 1 στη γραμμή 2.

32. Βρείτε τους αριθμούς a και b που απαρτίζουν τον αντίστροφο του `5 * eye(4) - ones(4,4)`:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}.$$

Ποια είναι τα a και b στον αντίστροφο του `6 * eye(5) - ones(5,5)`;

33. Δείξτε ότι ο `A = 4 * eye(4) - ones(4,4)` *δεν* είναι αντιστρέψιμος: Κάντε τον πολλαπλασιασμό `A * ones(4,1)`.

34. Υπάρχουν δεκαέξι 2 επί 2 πίνακες με στοιχεία μονάδες και μηδενικά. Πόσοι από αυτούς είναι αντιστρέψιμοι;

Τα προβλήματα 35–39 αφορούν τη μέθοδο Gauss–Jordan για τον υπολογισμό του A^{-1}.

35. Μετατρέψτε τον I στον A^{-1} καθώς ανάγετε τον A στον I (με γραμμοπράξεις):

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. Θεωρήστε το παράδειγμα 3 επί 3 του κειμένου αλλά με θετικά πρόσημα στον A. Απαλείψτε τα στοιχεία πάνω και κάτω από τους οδηγούς ώστε να αναγάγετε τον $[A \;\; I]$ στον $[I \;\; A^{-1}]$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss–Jordan στον $[A \quad I]$, λύστε το $AA^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38. Αντιστρέψτε τους παρακάτω πίνακες A με τη μέθοδο Gauss–Jordan ξεκινώντας από τον $[A \quad I]$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

39. Αντιμεταθέτοντας γραμμές και συνεχίζοντας με τη μέθοδο Gauss–Jordan, βρείτε τον A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

40. Σωστό ή λάθος (με αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος και αιτιολόγηση αν είναι σωστό):

(α) Ένας 4 επί 4 πίνακας με μια γραμμή μηδενικών δεν είναι αντιστρέψιμος.
(β) Ένας πίνακας με μονάδες κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι αντιστρέψιμος.
(γ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος.
(δ) Αν ο A^{T} είναι αντιστρέψιμος τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

41. Για ποιους τρεις αριθμούς c δεν είναι αντιστρέψιμος ο παρακάτω πίνακας. Γιατί δεν είναι;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{bmatrix}.$$

42. Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν $a \neq 0$ και $a \neq b$ (βρείτε τους οδηγούς και τον A^{-1}):

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

43. Ο παρακάτω πίνακας έχει έναν αξιοσημείωτο αντίστροφο. Βρείτε τον A^{-1} εφαρμόζοντας απαλοιφή στον $[A \quad I]$. Γενικεύοντας για την περίπτωση του «εναλλασσόμενου 5 επί 5 πίνακα», μαντέψτε τον αντίστροφό του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

44. Αν ο B έχει τις στήλες του A με αντίστροφη σειρά, δείξτε ότι ο $A - B$ δεν είναι αντιστρέψιμος λύνοντας το $(A - B)x = 0$. Ένα παράδειγμα θα σας οδηγήσει στο x.

45. Βρείτε τους αντιστρόφους (θεωρώντας ότι υπάρχουν) των παρακάτω μπλοκ πινάκων και επιβεβαιώστε ότι είναι αντίστροφοι:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & D \end{bmatrix}.$$

46. Χρησιμοποιώντας την inv(S), αντιστρέψτε τον συμμετρικό 4 επί 4 πίνακα S = pascal(4) της MATLAB. Κατασκευάστε τον κάτω τριγωνικό πίνακα του Pascal A = abs(pascal(4,1)) και ελέγξτε αν inv(S) = inv(A') * inv(A).

47. Αν A = ones(4,4) και b = rand(4,1), με ποιον τρόπο θα διαπιστώσει η MATLAB ότι το $Ax = b$ δεν έχει λύση; Αν b = ones(4,1), ποια λύση του $Ax = b$ βρίσκει η A\b;

48. Ο M^{-1} δείχνει την αλλαγή που υφίσταται ο A^{-1} (είναι χρήσιμο να το γνωρίζουμε) όταν αφαιρείται από τον A κάποιος πίνακας. Επαληθεύστε το 3ο μέρος κάνοντας προσεκτικά τον πολλαπλασιασμό MM^{-1} ώστε να πάρετε τον I:

1. $M = I - uv^{\mathrm{T}}$ και $M^{-1} = I + uv^{\mathrm{T}}/(1 - v^{\mathrm{T}}u)$.
2. $M = A - uv^{\mathrm{T}}$ και $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}/(1 - v^{\mathrm{T}}A^{-1}u)$.
3. $M = I - UV$ και $M^{-1} = I_n + U(I_m - VU)^{-1}V$.
4. $M = A - UW^{-1}V$ και $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

Οι τέσσερις ταυτότητες προκύπτουν από το $1, 1$ μπλοκ με αντιστροφή των εξής πινάκων:

$$\begin{bmatrix} I & u \\ v^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & u \\ v^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_n & U \\ V & I_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & U \\ V & W \end{bmatrix}.$$

Τα Προβλήματα 49–55 αφορούν τις ιδιότητες των ανάστροφων πινάκων.

49. Βρείτε τους A^{T}, A^{-1}, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ και $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ για τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

50. Επιβεβαιώστε ότι ο $(AB)^{\mathrm{T}}$ ισούται με τον $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ αλλά είναι διαφορετικός από τον $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Σε περίπτωση που $AB = BA$ (που εν γένει δεν ισχύει!), πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$;

51. (α) Ο πίνακας $((AB)^{-1})^{\mathrm{T}}$ προκύπτει από τους $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ και $(B^{-1})^{\mathrm{T}}$. *Με ποια σειρά;*
(β) Αν ο U είναι άνω τριγωνικός τότε ο $(U^{-1})^{\mathrm{T}}$ είναι ______τριγωνικός.

52. Δείξτε ότι είναι δυνατό να έχουμε $A^2 = 0$ αλλά αδύνατο να έχουμε $A^{\mathrm{T}}A = 0$ (εκτός αν A είναι ο μηδενικός πίνακας).

53. (α) Ποιος αριθμός είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού διάνυσμα γραμμή x^{T} επί A επί στήλη y;

$$x^{\mathrm{T}}Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \_\_\_.$$

(β) Αυτό ισούται με γραμμή $x^{\mathrm{T}}A =$ ______ επί στήλη $y = (0, 1, 0)$.
(γ) Αυτό ισούται με γραμμή $x^{\mathrm{T}} = [0 \ \ 1]$ επί στήλη $Ay =$ ______.

54. Όταν αναστρέφουμε έναν μπλοκ πίνακα $M = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, το αποτέλεσμα είναι $M^{\mathrm{T}} =$ ______. Επαληθεύστε το. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι A, B, C, D ώστε ο μπλοκ πίνακας να είναι συμμετρικός;

55. Εξηγήστε γιατί το εσωτερικό γινόμενο των x και y ισούται με το εσωτερικό γινόμενο των Px και Py. Επομένως, η $(Px)^{\mathrm{T}}(Py) = x^{\mathrm{T}}y$ λέει ότι $P^{\mathrm{T}}P = I$ για οποιαδήποτε μετάθεση. Για $x = (1,2,3)$ και $y = (1,4,2)$, επιλέγοντας κατάλληλα τον P, δείξτε ότι ο $(Px)^{\mathrm{T}}y$ δεν ισούται πάντα με τον $x^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}y)$.

Τα Προβλήματα 56–60 αφορούν τους συμμετρικός πίνακες και τις παραγοντοποιήσεις τους.

56. Αν $A = A^{\mathrm{T}}$ και $B = B^{\mathrm{T}}$, ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι σίγουρα συμμετρικός;
(α) $A^2 - B^2$ (β) $(A+B)(A-B)$ (γ) ABA (δ) $ABAB$.

57. Αν ο $A = A^{\mathrm{T}}$ χρειάζεται μια αντιμετάθεση γραμμών, τότε χρειάζεται και μια αντιμετάθεση στηλών για να παραμείνει συμμετρικός. Στη γλώσσα των πινάκων, ο PA χάνει τη συμμετρία του A, ενώ ο ___ ανακτά τη συμμετρία.

58. (α) Πόσα στοιχεία του A μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα, αν ο $A = A^{\mathrm{T}}$ είναι 5 επί 5;
(β) Πώς δίνουν οι L και D (5 επί 5) το ίδιο πλήθος επιλογών στην περίπτωση του LDL^{T};

59. Υποθέστε ότι ο R είναι παραλληλόγραμμος (m επί n) και ο A συμμετρικός (m επί m).
(α) Αναστρέφοντας τον $R^{\mathrm{T}}AR$, αποδείξτε τη συμμετρία του. Ποιο είναι το σχήμα αυτού του πίνακα;
(β) Δείξτε γιατί ο $R^{\mathrm{T}}R$ δεν έχει αρνητικούς αριθμούς στη διαγώνιό του.

60. Παραγοντοποιήστε τους παρακάτω συμμετρικούς πίνακες στη μορφή $A = LDL^{\mathrm{T}}$. Ο πίνακας D είναι διαγώνιος:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τα τρία προβλήματα που ακολουθούν αφορούν εφαρμογές της $(Ax)^{\mathrm{T}}y = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$.

61. Καλώδια μεταξύ Βοστώνης, Σικάγου και Σιάτλ. Η τάση σε αυτές τις πόλεις είναι x_{B}, x_{C}, x_{S}. Αν μεταξύ των πόλεων υπάρχει μοναδιαία αντίσταση, το y περιέχει τα τρία ρεύματα:

$$\text{Το} \quad y = Ax \quad \text{είναι το} \quad \begin{bmatrix} y_{\mathrm{BC}} \\ y_{\mathrm{CS}} \\ y_{\mathrm{BS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{C}} \\ x_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}.$$

(α) Βρείτε τα συνολικά ρεύματα $A^{\mathrm{T}}y$ έξω από τις τρεις πόλεις.
(β) Επαληθεύστε ότι ο $(Ax)^{\mathrm{T}}y$ ταυτίζεται με τον $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$ —και οι δύο έχουν έξι όρους.

62. Για την παραγωγή x_1 φορτηγών και x_2 αεροπλάνων απαιτούνται $x_1 + 50x_2$ τόνοι ατσαλιού, $40x_1 + 1000x_2$ κιλά λάστιχου και $2x_1 + 50x_2$ μήνες εργασίας. Αν τα μοναδιαία κόστη y_1, y_2, y_3 είναι 700 δολάρια ανά τόνο, 3 δολάρια ανά κιλό και 3000 δολάρια ανά μήνα, ποια είναι η τιμή ενός φορτηγού και ενός αεροπλάνου; Οι τιμές αυτές είναι οι συνιστώσες του $A^{\mathrm{T}}y$.

63. Το Ax δίνει την ποσότητα ατσαλιού, λάστιχου και εργασίας που απαιτούνται για την παραγωγή του x στο Πρόβλημα 62. Βρείτε τον A. $(Ax)^{\mathrm{T}}y$ είναι __ ______ των εισροών ενώ $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$ είναι η τιμή τ__ ______.

64. Ακολουθεί μια νέα παραγοντοποίηση του A σε γινόμενο *ενός τριγωνικού επί έναν συμμετρικό πίνακα*:

$$\text{Ξεκινάμε με τον } A = LDU. \text{ Έπεται ότι ο } A \text{ ισούται με } L(U^{\mathrm{T}})^{-1} \text{ επί } U^{\mathrm{T}}DU.$$

Γιατί είναι τριγωνικός ο $L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$; Η διαγώνιός του αποτελείται μόνο από μονάδες. Γιατί είναι συμμετρικός ο $U^{\mathrm{T}}DU$;

65. Μια *ομάδα* πινάκων περιλαμβάνει τους AB και A^{-1} αν περιλαμβάνει τους A και B. «Τα γινόμενα και οι αντίστροφοι περιλαμβάνονται στην ομάδα». Ποια από τα ακόλουθα σύνολα είναι ομάδες; Κάτω τριγωνικοί πίνακες L με μονάδες στη διαγώνιο, συμμετρικοί πίνακες S, θετικοί πίνακες M, διαγώνιοι αντιστρέψιμοι πίνακες D, πίνακες μετάθεσης P. Σκεφτείτε δύο ακόμη ομάδες πινάκων.

66. Αν κάθε γραμμή ενός 4 επί 4 πίνακα περιέχει τους αριθμούς $0, 1, 2, 3$ με κάποια σειρά, μπορεί να είναι συμμετρικός ο πίνακας; Μπορεί να είναι αντιστρέψιμος;

67. Αποδείξτε ότι ένας τυπικός πίνακας δεν μπορεί να αναστραφεί μέσω μιας αναδιάταξης γραμμών και στηλών.

68. Ένας τετραγωνικός ***βορειοδυτικός πίνακας*** B έχει μηδενικά στη νοτιοανατολική του γωνία, κάτω από την αντιδιαγώνιο που συνδέει το $(1, n)$ με το $(n, 1)$. Θα είναι βορειοδυτικοί πίνακες οι B^{T} και B^2; Ο B^{-1} θα είναι βορειοδυτικός ή νοτιοανατολικός; Ποιο είναι το σχήμα του $BC =$ ***βορειοδυτικός επί νοτιοανατολικός*** πίνακας; Μπορείτε να συνδυάσετε μεταθέσεις με τους συνήθεις L και U (νοτιοδυτικός και βορειανατολικός).

69. Συγκρίνετε τους χρόνους tic; inv(A); toc για A = rand(500) και A = rand(1000). Το πλήθος n^3 των πράξεων λέει ότι ο χρόνος υπολογισμού (τον οποίο μετρούν οι tic; toc) οκταπλασιάζεται όταν διπλασιάζεται το n. Περιμένετε να είναι αντιστρέψιμοι οι τυχαίοι αυτοί A;

70. Οι εντολές I = eye(1000); A = rand(1000); B = triu(A); παράγουν έναν τυχαίο *τριγωνικό* πίνακα B. Συγκρίνετε τον χρόνο εκτέλεσης των inv(B) και B\I. Η πράξη \ της MATLAB είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε να χρησιμοποιεί τα μηδενικά του B, ενώ η εντολή inv χρησιμοποιεί τα μηδενικά του I όταν ανάγει τον $[B \quad I]$ με τη μέθοδο Gauss–Jordan. (Συγκρίνετε επίσης με τις inv(A) και A\I για τον πλήρη πίνακα A.)

71. Δείξτε ότι ο L^{-1} έχει στοιχεία j/i για $i \le j$ (ο $-1, 2, -1$ πίνακας έχει αυτόν τον L):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε αν οι L = eye(5) - diag(1:5)\diag(1:4,-1) και inv(L) έχουν αυτή τη μορφή.

1.7 ΕΙΔΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σε αυτή την ενότητα έχουμε δύο στόχους. Ο πρώτος είναι να εξηγήσουμε έναν τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται στην πράξη μεγάλα γραμμικά συστήματα της μορφής $Ax = b$. Η αλήθεια είναι ότι ένα μεγάλο και πλήρως ρεαλιστικό πρόβλημα από τη μηχανική ή τα οικονομικά θα μας ανάγκαζε να ξεφύγουμε από το θέμα μας. Υπάρχει όμως μια φυσική και σημαντική εφαρμογή που δεν απαιτεί ιδιαίτερη προετοιμασία.

Ο άλλος στόχος είναι να καταδείξουμε, μέσω της ίδιας εφαρμογής, τις ιδιαίτερες ιδιότητες που έχουν συχνά οι πίνακες συντελεστών. Οι μεγάλοι πίνακες έχουν σχεδόν πάντα μια ξεκάθαρη δομή —συνήθως μια συμμετρική δομή και *πάρα πολλά μηδενικά στοιχεία*. Αφού ένας αραιός πίνακας περιέχει πολύ λιγότερα από n^2 κομμάτια πληροφορίας, οι υπολογισμοί θα πρέπει να είναι γρήγοροι. Θα εξετάσουμε τους *ταινιωτούς πίνακες* για να δούμε πώς η συγκέντρωση κοντά στη διαγώνιο επιταχύνει την απαλοιφή. Στην πραγματικότητα, θα εξετάσουμε έναν ειδικό τριδιαγώνιο πίνακα.

Ο πίνακας φαίνεται στην εξίσωση (6). Προέρχεται από τη μετατροπή μιας διαφορικής εξίσωσης σε εξίσωση πινάκων. Στο συνεχές πρόβλημα αναζητούμε την $u(x)$ σε κάθε x, αλλά ένας υπολογιστής δεν μπορεί να λύσει αυτό το πρόβλημα με ακρίβεια. Πρέπει να το προσεγγίσει μέσω ενός διακριτού προβλήματος —όσο περισσότερους αγνώστους κρατήσουμε, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ακρίβεια και τόσο μεγαλύτερο το κόστος. Το απλό αλλά πολύ τυπικό συνεχές πρόβλημα που θα επιλέξουμε είναι η διαφορική εξίσωση

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{1}$$

Πρόκειται για μια γραμμική εξίσωση με άγνωστο τη συνάρτηση $u(x)$. Στη λύση μπορεί να προστεθεί οποιοσδήποτε συνδυασμός $C + Dx$, αφού η δεύτερη παράγωγος του $C + Dx$ δεν συνεισφέρει τίποτα. Η αβεβαιότητα που εισάγουν οι δύο αυθαίρετες σταθερές C και D αίρεται μέσω μιας «*συνοριακής συνθήκης*» σε καθένα από τα δύο άκρα του διαστήματος:

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \tag{2}$$

Το αποτέλεσμα είναι ένα *πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων*, το οποίο δεν περιγράφει ένα παροδικό άλλα ένα φαινόμενο σταθερής κατάστασης —για παράδειγμα, την κατανομή θερμοκρασίας σε μία ράβδο τα άκρα της οποίας διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία 0° και η οποία θερμαίνεται από μια πηγή θερμότητας $f(x)$.

Υπενθυμίζουμε ότι στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα διακριτό πρόβλημα —με άλλα λόγια, ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας. Για αυτό τον λόγο μπορούμε να δεχτούμε πεπερασμένο μόνο πλήθος πληροφοριών σχετικά με την $f(x)$, φερ' ειπειν τις τιμές της στα n ισαπέχοντα σημεία $x = h, x = 2h, \ldots, x = nh$. Θα υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές τιμές $u_1, \ldots, u_n$ της πραγματικής λύσης u στα ίδια σημεία. Στα άκρα $x = 0$ και $x = 1 = (n+1)h$, οι συνοριακές τιμές είναι $u_0 = 0$ και $u_{n+1} = 0$.

Το πρώτο ερώτημα είναι το εξής: Με τι αντικαθιστούμε την παράγωγο d^2u/dx^2; Μπορούμε να προσεγγίσουμε την πρώτη παράγωγο υπολογίζοντας τον λόγο $\Delta u/\Delta x$ χρησιμοποιώντας πεπερασμένο μέγεθος βήματος και μη επιτρέποντας στο h (ή το Δx) να προσεγγίσει το μηδέν. Η διαφορά Δu μπορεί να υπολογιστεί *προς τα πίσω*, *προς τα εμπρός* ή *και προς τις δύο πλευρές*:

$$\frac{\boldsymbol{\Delta}\mathrm{u}}{\boldsymbol{\Delta}\mathrm{x}} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{3}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι συμμετρικός περί το x και είναι ο ακριβέστερος. Για τη δεύτερη παράγωγο υπάρχει μόνο ένας συνδυασμός, που χρησιμοποιεί μόνο τις τιμές στα x και $x \pm h$:

Δεύτερη διαφορά $$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{\boldsymbol{\Delta^2}\mathrm{u}}{\boldsymbol{\Delta}\mathrm{x}^{\mathbf{2}}} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \tag{4}$$

Αυτός ο τύπος έχει επίσης το πλεονέκτημα ότι είναι συμμετρικός περί το x. Επαναλαμβάνουμε ότι το δεξί μέλος προσεγγίζει την πραγματική τιμή της d^2u/dx^2 καθώς $h \to 0$, αλλά το βήμα h πρέπει να είναι θετικό.

Σε κάθε σημείο $x = jh$ του πλέγματος, η εξίσωση $-d^2u/dx^2 = f(x)$ αντικαθίσταται από το διακριτό της ανάλογο (5). Πολλαπλασιάσαμε με h^2 ώστε να πάρουμε τις n εξισώσεις του συστήματος $Au = b$:

Εξίσωση διαφορών $$-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} = h^2 f(jh) \quad \text{για } j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Η πρώτη και τελευταία εξίσωση ($j = 1$ και $j = n$) περιλαμβάνουν τις $u_0 = 0$ και $u_{n+1} = 0$, τις οποίες γνωρίζουμε από τις συνοριακές συνθήκες. Οι τιμές αυτές θα μπορούσαν να μετακινηθούν στο δεξί μέλος της εξίσωσης αν δεν ήταν μηδέν. Η δομή αυτών των n εξισώσεων (5) αναπαρίσταται καλύτερα σε μορφή πινάκων. Επιλέγουμε $h = \frac{1}{6}$, ώστε να πάρουμε έναν 5 επί 5 πίνακα A:

Εξίσωση πινάκων $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ f(4h) \\ f(5h) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Από εδώ και στο εξής, *θα εργαστούμε με την εξίσωση* (6). Έχει έναν πολύ κανονικό πίνακα συντελεστών, το μέγεθος n του οποίου μπορεί να είναι πολύ μεγάλο. Ο πίνακας A έχει πολλές ιδιαίτερες ιδιότητες, τρεις από τις οποίες είναι θεμελιώδεις:

1. ***Ο πίνακας A είναι τριδιαγώνιος.*** Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο και τις δύο παρακείμενες διαγωνίους. Εκτός αυτής της ζώνης, όλα τα στοιχεία είναι $a_{ij} = 0$. Τα μηδενικά αυτά θα απλουστεύσουν δραματικά την απαλοιφή Gauss.
2. ***Ο πίνακας είναι συμμετρικός.*** Κάθε στοιχείο a_{ij} ισούται με το κατοπτρικό του στοιχείο a_{ji}, άρα $A^{\mathrm{T}} = A$. Ο άνω τριγωνικός πίνακας U θα είναι ο ανάστροφος του κάτω τριγωνικού πίνακα L, και $A = LDL^{\mathrm{T}}$. Αυτή η συμμετρία του A αντανακλά τη συμμετρία της d^2u/dx^2. Μια περιττή παράγωγος σαν την du/dx ή την d^3u/dx^3 θα κατέστρεφε τη συμμετρία.
3. ***Ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.*** Αυτή η επιπλέον ιδιότητα λέει ότι *οι οδηγοί είναι θετικοί*. Οι αντιμεταθέσεις γραμμών δεν είναι απαραίτητες ούτε στη θεωρία ούτε στην πράξη. Αντιθέτως, ο πίνακας B που θα δούμε στο τέλος αυτής της ενότητας δεν είναι θετικά ορισμένος και χωρίς αντιμετάθεση γραμμών είναι εξαιρετικά ευάλωτος σε σφάλματα στρογγυλοποίησης.

   Η έννοια της θετικής ορισιμότητας συνδέει μεταξύ τους τα διάφορα μέρη αυτού του μαθήματος (βλ. Κεφάλαιο 6)!

Επιστρέφουμε στο γεγονός ότι ο A είναι τριδιαγώνιος. Πώς επηρεάζει αυτό την απαλοιφή; Το πρώτο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής παράγει μηδενικά κάτω από τον πρώτο οδηγό:

Απαλοιφή επί του A: Βήμα 1
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ 0 & \mathbf{\frac{3}{2}} & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Συγκρινόμενο με το αντίστοιχο βήμα για έναν γενικό 5 επί 5 πίνακα, το συγκεκριμένο βήμα είναι απλούστερο κατά δύο σημαντικούς τρόπους:

(α) Υπήρχε *μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο* κάτω από τον οδηγό.
(β) Η γραμμή οδηγός ήταν *πολύ μικρή*.

Ο πολλαπλασιαστής $\ell_{21} = -\frac{1}{2}$ προέκυψε με μία διαίρεση. Ο νέος οδηγός $\frac{3}{2}$ προέκυψε με *μια μόνο πράξη πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης*. Επιπλέον, *η τριδιαγώνια δομή διατηρείται*: Σε κάθε βήμα της απαλοιφής ισχύουν και οι δύο απλοποιήσεις (α) και (β).

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η παραγοντοποίηση $LDU = LDL^{\mathrm{T}}$ του A. Προσέξτε τους οδηγούς!

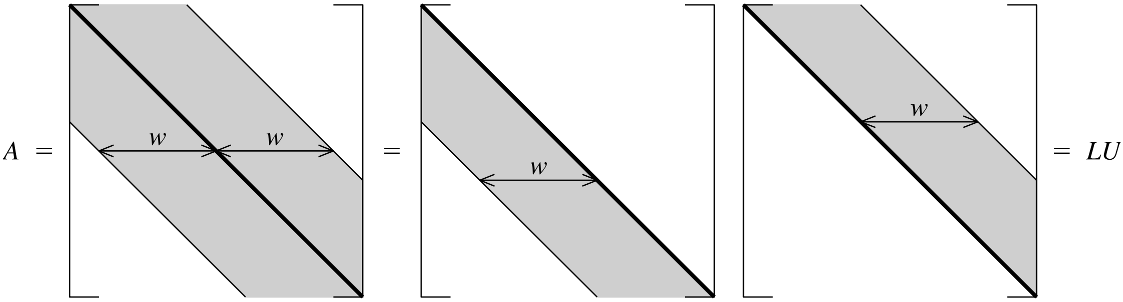
$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{2}{1}} & & & & \\ & \mathbf{\frac{3}{2}} & & & \\ & & \mathbf{\frac{4}{3}} & & \\ & & & \mathbf{\frac{5}{4}} & \\ & & & & \mathbf{\frac{6}{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι παράγοντες L και U ενός τριδιαγώνιου πίνακα είναι διδιαγώνιοι. Οι τρεις παράγοντες μαζί έχουν την ίδια ταινιωτή δομή τριών διαγωνίων ($3n - 2$ παράμετροι) με τον A. Προσέξτε επίσης ότι οι L και U είναι ανάστροφοι ο ένας του άλλου, όπως είναι αναμενόμενο λόγω της συμμετρίας. Οι οδηγοί 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5 είναι όλοι θετικοί. Το γινόμενό τους είναι η ***ορίζουσα*** του A: $\det A = 6$. Οι οδηγοί συγκλίνουν προφανώς στο 1, καθώς μεγαλώνει το n. Οι υπολογιστές χαίρονται να δουλεύουν με τέτοιου είδους πίνακες.

Οι αραιοί παράγοντες L και U αλλάζουν εντελώς το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων. Για την εφαρμογή της απαλοιφής σε κάθε στήλη απαιτούνται μόνο δύο πράξεις, όπως παραπάνω, και υπάρχουν n στήλες. *Αντί για $n^3/3$ πράξεις χρειαζόμαστε μόνο $2n$.* Τα τριδιαγώνια συστήματα $Ax = b$ επιλύονται σχεδόν ακαριαία. *Το κόστος επίλυσης ενός τριδιαγώνιου συστήματος είναι ανάλογο του n.*

Όλα τα στοιχεία ενός **ταινιωτού πίνακα** που βρίσκονται εκτός της ταινίας $|i - j| < w$ είναι $a_{ij} = 0$ (Σχήμα 1.8). Το «ταινιακό ημιεύρος» είναι $w = 1$ για τους διαγώνιους πίνακες, $w = 2$ για τους τριδιαγώνιους πίνακες και $w = n$ για τους πλήρεις πίνακες. Για κάθε στήλη, η απαλοιφή απαιτεί $w(w - 1)$ πράξεις: μια γραμμή μήκους w επιδρά στις $w - 1$ γραμμές που βρίσκονται από κάτω της. *Για την εφαρμογή της απαλοιφής στις n στήλες ενός ταινιωτού πίνακα απαιτούνται περίπου $w^2 n$ πράξεις.*

Καθώς το w προσεγγίζει το n, ο πίνακας γίνεται πλήρης και το πλήθος των πράξεων είναι χοντρικά n^3. Για να υπολογίσουμε το ακριβές πλήθος πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι στην κάτω δεξιά γωνία δεν υπάρχει αρκετός χώρος για το ταινιακό εύρος w. Το ακριβές πλήθος διαιρέσεων και πράξεων πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης που απαιτούνται για την παραγωγή



Σχήμα 1.8 Ένας ταινιωτός πίνακας A και οι παράγοντές του L και U.

των L, D και U (χωρίς να υποθέσουμε ότι ο A είναι συμμετρικός) είναι $P = \frac{1}{3}w(w-1)(3n-2w+1)$. Για έναν πλήρη πίνακα με $w = n$, βρίσκουμε ότι $P = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$. Ο αριθμός αυτός είναι ακέραιος, αφού οι $n-1$, n και $n+1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι και κάποιος από αυτούς διαιρείται με το 3.

Αυτό είναι το τελικό πλήθος πράξεων. Θα υπογραμμίσουμε το βασικό συμπέρασμα. Ένας πίνακας πεπερασμένων διαφορών σαν τον A έχει πλήρη αντίστροφο. Όταν λύνουμε το $Ax = b$, *στην πραγματικότητα είναι πολύ καλύτερο να γνωρίζουμε τους L και U από ό,τι τον A^{-1}*. Για τον πολλαπλασιασμό του A^{-1} με το b απαιτούνται n^2 βήματα, ενώ για την ορθόδρομη απαλοιφή και την ανάδρομη αντικατάσταση που δίνουν το $x = U^{-1}c = U^{-1}L^{-1}b = A^{-1}b$ αρκούν $4n$ βήματα.

Αυτό το παράδειγμα θα πρέπει να σας βοήθησε να κατανοήσετε καλύτερα την απαλοιφή (την οποία θεωρούμε πλέον ότι έχετε κατανοήσει πλήρως!). Είναι ένα αυθεντικό παράδειγμα μεγάλου γραμμικού συστήματος που συναντάται στην πράξη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα στρέψουμε την προσοχή μας στην ύπαρξη και τη μοναδικότητα του x, για m εξισώσεις με n αγνώστους.

Σφάλμα στρογγυλοποίησης

Θεωρητικά, έχουμε ολοκληρώσει τη μελέτη της μη ιδιόμορφης περίπτωσης. Υπάρχει πλήρες σύνολο οδηγών (με αντιμεταθέσεις γραμμών). Στην πράξη, μπορεί να είναι εξίσου απαραίτητο να κάνουμε *επιπλέον αντιμεταθέσεις γραμμών* —διαφορετικά η λύση που θα υπολογίσουμε μπορεί εύκολα να γίνει άχρηστη. Θα αφιερώσουμε δύο σελίδες (τελείως προαιρετικές για το μάθημα στην τάξη) για να κάνουμε την απαλοιφή πιο ευσταθή —θα δούμε γιατί χρειάζεται αυτό και πώς γίνεται.

Για ένα σύστημα μετρίου μεγέθους, φερ' ειπείν 100 επί 100, η απαλοιφή απαιτεί ένα εκατομμύριο πράξεις δια τρία ($\frac{1}{3}n^3$). Από κάθε πράξη πρέπει να αναμένουμε κάποιο σφάλμα στρογγυλοποίησης. Κανονικά, κρατάμε ένα σταθερό πλήθος σημαντικών ψηφίων (φερ' ειπείν τρία, για έναν εξαιρετικά ανίσχυρο υπολογιστή). Με αυτό τον τρόπο όμως, όταν προσθέτουμε δύο αριθμούς διαφορετικού μεγέθους προκύπτει κάποιο σφάλμα:

Σφάλμα στρογγυλοποίησης από το $0{,}456 + 0{,}00123 \to 0{,}457$ χάνονται τα ψηφία 2 και 3.

Ποια είναι η συμβολή όλων αυτών των επιμέρους σφαλμάτων στο τελικό σφάλμα του Ax=b;

Το πρόβλημα δεν είναι εύκολο. Μελετήθηκε από τον John von Neumann, ο οποίος ήταν η κυρίαρχη μαθηματική φυσιογνωμία την εποχή που οι υπολογιστές κατέστησαν ξαφνικά εφικτή την εκτέλεση εκατομμυρίων πράξεων. Μάλιστα, ο συνδυασμός Gauss με τον von Neumann δίνει στον απλό αλγόριθμο της απαλοιφής μια ιδιαίτερα ξεχωριστή ιστορία, μολονότι ακόμη και ο von Neumann υπερεκτίμησε το τελικό σφάλμα στρογγυλοποίησης. Τον σωστό τρόπο απάντησης στο ερώτημα βρήκε ο Wilkinson, τα βιβλία του οποίου είναι πλέον κλασικά.

Θα κάνουμε τρεις σημαντικές παρατηρήσεις σημεία σχετικά με το σφάλμα στρογγυλοποίησης με τη βοήθεια δύο απλών παραδειγμάτων. Τα παραδείγματα είναι τα εξής:

Πίνακας σε κακή κατάσταση $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0001 \end{bmatrix}$ **Πίνακας σε καλή κατάσταση** $B = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Ο A είναι παρ' ολίγο ιδιόμορφος ενώ ο B δεν είναι σε καμία περίπτωση ιδιόμορφος. Αν αλλάξουμε ελαφρώς το τελευταίο στοιχείο του A σε $a_{22} = 1$, ο A *είναι* ιδιόμορφος. Ας θεωρήσουμε δύο παραπλήσια δεξιά μέλη b:

$$\begin{aligned} u + \phantom{1{,}0001}v &= 2 \\ u + 1{,}0001v &= 2 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + \phantom{1{,}0001}v &= 2 \\ u + 1{,}0001v &= 2{,}0001 \end{aligned}$$

Η λύση του πρώτου είναι $u = 2$, $v = 0$, ενώ η λύση του δεύτερου είναι $u = v = 1$. *Μια αλλαγή στο πέμπτο ψηφίο του b μεγεθύνθηκε σε αλλαγή του πρώτου ψηφίου της λύσης. Καμία αριθμητική μέθοδος δεν μπορεί να αποφύγει αυτή την ευαισθησία σε μικρές διαταραχές.* Η κακή κατάσταση μπορεί να μεταφερθεί από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, αλλά δεν μπορεί να εξαλειφθεί. Η πραγματική λύση είναι πολύ ευαίσθητη, οπότε η λύση που υπολογίζουμε δεν μπορεί να είναι λιγότερο ευαίσθητη.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι η εξής.

1IE Ακόμη και ένας πίνακας σε καλή κατάσταση όπως ο B μπορεί να καταστραφεί από έναν κακό αλγόριθμο.

Δυστυχώς είμαστε υποχρεωμένοι να πούμε ότι, για τον πίνακα B, η απευθείας απαλοιφή Gauss είναι ένας κακός αλγόριθμος. Ας υποθέσουμε ότι δεχόμαστε ως πρώτο οδηγό το 0,0001. Κατόπιν αφαιρούμε 10.000 επί την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη. Το κάτω δεξιά στοιχείο γίνεται -9999, αλλά η στρογγυλοποίηση στα τρία ψηφία θα έδινε -10.000. Κάθε ίχνος του στοιχείου 1 θα εξαφανιζόταν:

Απαλοιφή στον B με μικρό οδηγό $$\begin{aligned} 0{,}0001u + v &= 1 \\ u + v &= 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 0{,}0001u + v &= 1 \\ -9999v &= -9998. \end{aligned}$$

Η στρογγυλοποίηση θα έδινε $-10.000v = -10.000$, ή $v = 1$. Αυτό είναι σωστό με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων. Η ανάδρομη αντικατάσταση με χρήση του σωστού $v = 0{,}9999$ θα άφηνε $u = 1$:

Σωστό αποτέλεσμα $0{,}0001u + 0{,}9999 = 1, \qquad \text{ή} \qquad u = 1.$

Αντ' αυτού, αν αποδεχτούμε το $v = 1$, το οποίο είναι λάθος μόνο ως προς το τέταρτο ψηφίο, παίρνουμε $u = 0$:

Λανθασμένο αποτέλεσμα $0{,}0001u + 1 = 1, \qquad \text{ή} \qquad u = 0.$

Το u που υπολογίσαμε είναι εντελώς λάθος. Ο B είναι πίνακας σε καλή κατάσταση, αλλά η απαλοιφή είναι εξαιρετικά ασταθής. Οι L, D και U έχουν τελείως διαφορετική κλίμακα από τον B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10{,}000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 0 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10.000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο μικρός οδηγός $0{,}0001$ προκάλεσε αστάθεια, αλλά η θεραπεία είναι προφανής —*αντιμετάθεση γραμμών*.

1ΙΣΤ Ένας μικρός οδηγός επιβάλλει μια πρακτική αλλαγή στη διαδικασία της απαλοιφής. Κανονικά, συγκρίνουμε κάθε οδηγό με όλους τους δυνατούς οδηγούς στην ίδια στήλη. Η αντιμετάθεση γραμμών με σκοπό τη λήψη του μεγαλύτερου δυνατού οδηγού καλείται ***μερική οδήγηση.***

Στην περίπτωση του B, θα συγκρίναμε τον οδηγό $0{,}0001$ με τον δυνατό οδηγό 1 που υπάρχει από κάτω του και θα προχωρούσαμε αμέσως σε αντιμετάθεση γραμμών. Στη γλώσσα των πινάκων, αυτό είναι ένας πολλαπλασιασμός με τον πίνακα μετάθεσης $P = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ο νέος πίνακας $C = PB$ έχει καλούς παράγοντες:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}0001 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}0001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί του C είναι 1 και $0{,}9999$, οι οποίοι είναι πολύ καλύτεροι από τους $0{,}0001$ και -9999 του B.

Η στρατηγική της *πλήρους οδήγησης* εξετάζει και όλες τις επόμενες στήλες για να βρει τον μεγαλύτερο δυνατό οδηγό. Ενδέχεται να χρειαστεί όχι μόνο αντιμετάθεση γραμμών αλλά και αντιμετάθεση στηλών (το οποίο είναι ένας πολλαπλασιασμός από δεξιά με έναν πίνακα μετάθεσης.) Το μειονέκτημα μιας τόσο συντηρητικής προσέγγισης είναι το κόστος, αλλά η μερική οδήγηση είναι αρκετά καλή.

Φτάσαμε τελικά στον θεμελιώδη αλγόριθμο της αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας: την ***απαλοιφή με μερική οδήγηση.*** Μπορούμε να κάνουμε επιπλέον βελτιώσεις, όπως να ελέγχουμε αν πρέπει να αλλάξουμε την κλίμακα μιας ολόκληρης γραμμής ή στήλης. Ωστόσο, ο αναγνώστης γνωρίζει πλέον πώς μεταχειρίζεται ένας υπολογιστής ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Συγκρινόμενη με τη «θεωρητική» περιγραφή —*βρίσκουμε τον A^{-1} και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $A^{-1}b$*— η περιγραφή μας κατανάλωσε αρκετό από τον χρόνο (και την υπομονή) του αναγνώστη. Μακάρι να υπήρχε ευκολότερος τρόπος να εξηγηθεί πώς βρίσκεται πραγματικά το x, αλλά νομίζω πως δεν υπάρχει.

Προβλήματα 1.7

1. Γράψτε τους παράγοντες $LDU = LDL^{\mathrm{T}}$ του A της εξίσωσης (6) όταν $n = 4$. Βρείτε την ορίζουσα ως το γινόμενο των οδηγών που περιέχει ο D.

2. Στην εξίσωση (6), αλλάξτε το a_{11} από $a_{11} = 2$ σε $a_{11} = 1$ και βρείτε τους παράγοντες LDU του νέου αυτού τριδιαγώνιου πίνακα.

3. Βρείτε τον 5 επί 5 πίνακα A_0 $\left(h = \frac{1}{6}\right)$ που προσεγγίζει την

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \qquad \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0,$$

αντικαθιστώντας αυτές τις συνοριακές συνθήκες με τις $u_0 = u_1$ και $u_6 = u_5$. Επαληθεύστε ότι το γινόμενο του A_0 που βρήκατε επί το σταθερό διάνυσμα (C, C, C, C, C) είναι μηδέν· ο A_0 είναι *ιδιόμορφος*. Με αντίστοιχο τρόπο, δείξτε ότι αν $u(x)$ είναι μια λύση του συνεχούς προβλήματος, το ίδιο είναι και η $u(x) + C$.

4. Γράψτε την 3 επί 3 εξίσωση πινάκων πεπερασμένων διαφορών $\left(h = \frac{1}{4}\right)$ που αντιστοιχεί στην

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = x, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

5. Για $h = \frac{1}{4}$ και $f(x) = 4\pi^2 \sin 2\pi x$, η εξίσωση διαφορών (5) είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Λύστε ως προς u_1, u_2, u_3 και βρείτε το σφάλμα σε σχέση με την πραγματική λύση $u = \sin 2\pi x$ στα $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ και $x = \frac{3}{4}$.

6. Με ποιο 5 επί 5 σύστημα αντικαθίσταται η (6) αν οι συνοριακές συνθήκες γίνουν $u(0) = 1$, $u(1) = 0$;

Τα προβλήματα 7–11 αφορούν το σφάλμα στρογγυλοποίησης και τις αντιμεταθέσεις γραμμών.

7. Υπολογίστε με δύο τρόπους τον H^{-1} για τον 3 επί 3 πίνακα Hilbert

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

πρώτον κάνοντας τις πράξεις με ακρίβεια και δεύτερον στρογγυλοποιώντας κάθε αριθμό κρατώντας τρία ψηφία. Ο συγκεκριμένος πίνακας H είναι σε κακή κατάσταση και η αντιμετάθεση γραμμών δεν βοηθάει.

8. Για τον ίδιο πίνακα H, συγκρίνετε τα δεξιά μέλη του $Hx = b$ όταν οι λύσεις είναι $x = (1, 1, 1)$ και $x = (0, 6, -3.6)$.

9. Λύστε την $Hx = b = (1, 0, \ldots, 0)$ για τον 10 επί 10 πίνακα Hilbert με $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$, χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε πρόγραμμα επίλυσης γραμμικών εξισώσεων. Κατόπιν μεταβάλετε ένα στοιχείο του b κατά 0,0001 και συγκρίνετε τις λύσεις.

10. Συγκρίνετε τους οδηγούς που παράγονται κατά την απευθείας απαλοιφή με τους οδηγούς που παράγονται κατά την απαλοιφή με μερική οδήγηση για τον

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}.$$

(Αυτό είναι ένα παράδειγμα όπου χρειάζεται αλλαγή κλίμακας πριν από την απαλοιφή.)

11. Εξηγήστε γιατί οι πολλαπλασιαστές ℓ_{ij} που παράγονται και τοποθετούνται στον L κατά την απαλοιφή με μερική οδήγηση ικανοποιούν την $|\ell_{ij}| \leq 1$. Μπορείτε να κατασκευάστε ένα 3 επί 3 παράδειγμα όπου για όλα τα στοιχεία να ισχύει $|a_{ij}| \leq 1$ και ο τελευταίος οδηγός να είναι 4; Αυτό είναι το χειρότερο δυνατό, αφού κάθε στοιχείο το πολύ διπλασιάζεται όταν $|\ell_{ij}| \leq 1$.

Επαναληπτικές ασκήσεις

1.1 (α) Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \qquad \text{και} \qquad b_{ij} = \frac{i}{j}.$$

(β) Υπολογίστε τα γινόμενα AB και BA και A^2.

1.2 Υπολογίστε τους πίνακες AB, BA, A^{-1}, B^{-1} και $(AB)^{-1}$ αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1.3 Βρείτε παραδείγματα 2 επί 2 πινάκων με $a_{12} = \frac{1}{2}$ για τους οποίους

(α) $A^2 = I$. (β) $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. (γ) $A^2 = A$.

1.4 Λύστε με απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση τα εξής συστήματα:

$$\begin{aligned} u \phantom{{}+v} + w &= 4 \\ u + v \phantom{{}+w} &= 3 \\ u + v + w &= 6 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u \phantom{{}+v} + w &= 0 \\ u + v \phantom{{}+w} &= 6. \end{aligned}$$

1.5 Παραγοντοποιήστε τους προηγούμενους πίνακες στη μορφή $A = LU$ ή $PA = LU$.

1.6 (α) Υπάρχουν δεκαέξι 2 επί 2 πίνακες με στοιχεία μονάδες και μηδενικά. Πόσοι είναι αντιστρέψιμοι;

(β) (Πολύ δυσκολότερο!) Αν χρησιμοποιήσετε τυχαία μονάδες και μηδενικά ως στοιχεία ενός 10 επί 10 πίνακα, ο πίνακας είναι πιθανότερο να είναι αντιστρέψιμος ή ιδιόμορφος;

1.7 Υπάρχουν δεκαέξι 2 επί 2 πίνακες με στοιχεία το 1 και το -1. Πόσοι είναι αντιστρέψιμοι;

1.8 Πώς σχετίζονται οι γραμμές του EA με τις γραμμές του A στις παρακάτω περιπτώσεις;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.9 Γράψτε ένα 2 επί 2 σύστημα με άπειρες λύσεις.

1.10 Βρείτε τους αντιστρόφους αν υπάρχουν, είτε με το μάτι είτε με τη μέθοδο Gauss–Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.11 Αν ο E είναι 2 επί 2 και προσθέτει την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη, ποιοι είναι οι E^2, E^8 και $8E$;

1.12 Σωστό ή λάθος, με *αιτιολόγηση* αν είναι σωστό ή *αντιπαράδειγμα* αν είναι λάθος:

(1) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και οι γραμμές του εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά στον B, τότε ο B είναι αντιστρέψιμος.
(2) Αν οι A και B είναι συμμετρικοί, τότε ο AB είναι συμμετρικός.
(3) Αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο BA είναι αντιστρέψιμος.
(4) Κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας μπορεί να παραγοντοποιηθεί στο γινόμενο $A = LU$ ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με εναν άνω τριγωνικό πίνακα U.

1.13 Λύστε το $Ax = b$ λύνοντας τα τριγωνικά συστήματα $Lc = b$ και $Ux = c$:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ποιο μέρος του A^{-1} βρήκατε με το συγκεκριμένο b;

1.14 Αν είναι δυνατόν, βρείτε 3 επί 3 πίνακες B τέτοιους ώστε

(α) $BA = 2A$ για κάθε A.
(β) $BA = 2B$ για κάθε A.
(γ) Ο BA να έχει τις πρώτες και τις τελευταίες γραμμές του A αντεστραμμένες.
(δ) Ο BA να έχει τις πρώτες και τις τελευταίες στήλες του A αντεστραμμένες.

1.15 Βρείτε την τιμή του c στον παρακάτω n επί n αντίστροφο:

$$\text{αν} \quad A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

1.16 Για ποιες τιμές του k έχει το

$$\begin{aligned} kx + y &= 1 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}$$

καμία, μία ή άπειρες λύσεις;

1.17 Βρείτε τη συμμετρική παραγοντοποίηση $A = LDL^{\mathrm{T}}$ των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

1.18 Υποθέστε ότι A είναι ο ταυτοτικός 4 επί 4 πίνακας με τη διαφορά ότι ως στήλη 2 έχει ένα διάνυσμα v:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(α) Παραγοντοποιήστε τον A στη μορφή LU, θεωρώντας ότι $v_2 \neq 0$.
(β) Βρείτε τον A^{-1}, ο οποίος έχει την ίδια μορφή με τον A.

1.19 Λύστε με απαλοιφή τα παρακάτω συστήματα ή δείξτε ότι δεν υπάρχει λύση:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1. \end{aligned}$$

1.20 Οι n επί n πίνακες μετάθεσης είναι ένα σημαντικό παράδειγμα «ομάδας». Αν τους πολλαπλασιάσουμε παραμένουμε εντός της ομάδας, οι αντίστροφοί τους ανήκουν στην ομάδα, ο ταυτοτικός πίνακας ανήκει στην ομάδα και η ιδιότητα $P_1(P_2P_3) = (P_1P_2)P_3$ ισχύει —αφού ισχύει για όλους τους πίνακες.

(α) Πόσα μέλη αριθμούν οι ομάδες των 4 επί 4 και n επί n πινάκων μετάθεσης;
(β) Βρείτε μια δύναμη k για την οποία όλοι οι 3 επί 3 πίνακες μετάθεσης να ικανοποιούν την $P^k = I$.

1.21 Περιγράψτε τις γραμμές του DA και τις στήλες του AD αν $D = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

1.22 (α) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος ποιος είναι ο αντίστροφος του A^{T};
(β) Αν ο A είναι και συμμετρικός ποιος είναι ο ανάστροφος του A^{-1};
(γ) Εφαρμόστε και τους δύο τύπους αν $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

1.23 Πειραματιζόμενοι με $n = 2$ και $n = 3$, βρείτε τους

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

1.24 Ξεκινώντας με το $u + 2v - w = 6$ ως πρώτο επίπεδο, βρείτε την εξίσωση

(α) του παράλληλου επιπέδου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
(β) ενός δεύτερου επιπέδου που περιέχει επίσης τα σημεία $(6, 0, 0)$ και $(2, 2, 0)$.
(γ) ενός τρίτου επιπέδου που τέμνει το πρώτο και το δεύτερο στο σημείο $(4, 1, 0)$.

1.25 Ποιο πολλαπλάσιο της γραμμής 2 αφαιρείται από τη γραμμή 3 κατά την εφαρμογή της ορθόδρομης απαλοιφής στον A;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πώς ξέρετε (χωρίς να πολλαπλασιάσετε τους δύο παράγοντες) ότι ο A είναι *αντιστρέψιμος*, *συμμετρικός* και *τριδιαγώνιος*; Ποιοι είναι οι οδηγοί του;

1.26 (α) Για ποιο διάνυσμα x θα ισχύει $Ax =$ στήλη 1 του A + 2 (στήλη 3), για έναν 3 επί 3 πίνακα A;

(β) Κατασκευάστε έναν πίνακα για τον οποίο στήλη $1 + 2\,(\text{στήλη } 3) = 0$. Επιβεβαιώστε ότι ο A είναι ιδιόμορφος (έχει λιγότερους από 3 οδηγούς) και εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

1.27 Σωστό ή λάθος, με αιτιολόγηση αν είναι σωστό και αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος:

(1) Αν $L_1U_1 = L_2U_2$ (οι U είναι άνω τριγωνικοί με μη μηδενική διαγώνιο, οι L είναι κάτω τριγωνικοί με μοναδιαία διαγώνιο), τότε $L_1 = L_2$ και $U_1 = U_2$. Η παραγοντοποίηση LU είναι μοναδική.

(2) Αν $A^2 + A = I$, τότε $A^{-1} = A + I$.

(3) Αν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του A είναι μηδέν, τότε ο A είναι ιδιόμορφος.

1.28 Δοκιμάζοντας ή χρησιμοποιώντας με τη μέθοδο Gauss–Jordan υπολογίστε τους

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

1.29 Γράψτε τους 2 επί 2 πίνακες που

(α) αντιστρέφουν την κατεύθυνση κάθε διανύσματος.

(β) προβάλλουν κάθε διάνυσμα στον άξονα x_2.

(γ) στρέφουν κάθε διάνυσμα κατά την αντιωρολόγια φορά κατά $90°$.

(δ) ανακλούν κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία $x_1 = x_2$ με κλίση $45°$.