Κεφάλαιο 1

Πίνακες και απαλοιφή Gauss

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Θα ξεκινήσουμε το βιβλίο με το κεντρικό πρόβλημα της γραμμικής άλγεβρας: την *επίλυση γραμμικών εξισώσεων*. Η σημαντικότερη και απλούστερη περίπτωση είναι όταν το πλήθος των αγνώστων ισούται με το πλήθος των εξισώσεων, δηλαδή όταν έχουμε ***n* εξισώσεις με *n* αγνώστους**, ξεκινώντας με $n = 2$:

$$\begin{array}{lrcrcl} \textbf{Δύο εξισώσεις} & 1x & + & 2y & = & 3 \\ \textbf{Δύο άγνωστοι} & 4x & + & 5y & = & 6. \end{array} \tag{1}$$

Οι άγνωστοι είναι το x και το y. Θα περιγράψουμε δύο τρόπους επίλυσης αυτών των εξισώσεων: την *απαλοιφή* και τις *ορίζουσες*. Ασφαλώς, τα x και y προσδιορίζονται μέσω των αριθμών $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Το ερώτημα είναι πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους έξι αριθμούς για να λύσουμε το σύστημα.

1. Απαλοιφή Αφαιρούμε 4 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη εξίσωση. Με αυτό τον τρόπο απαλείφεται το x από τη δεύτερη εξίσωση και απομένει μία εξίσωση ως προς y:

$$\textbf{(εξίσωση 2)} - \textbf{4 (εξίσωση 1)} \qquad \boxed{-3y = -6.} \tag{2}$$

Έπεται αμέσως ότι $y = 2$. Κατόπιν, το x προκύπτει από την πρώτη εξίσωση $1x + 2y = 3$:

$$\textbf{Ανάδρομη αντικατάσταση} \qquad \text{από την } 1x + 2(2) = 3 \text{ προκύπτει ότι } \boxed{x = -1.} \tag{3}$$

Προχωρώντας προσεκτικά, επιβεβαιώνουμε ότι τα x και y αποτελούν λύση και της δεύτερης εξίσωσης. Αυτό πρέπει να ισχύει και πράγματι ισχύει: 4 επί $(x = -1)$ συν 5 επί $(y = 2)$ ίσον 6.

2. Ορίζουσες Η λύση $y = 2$ προσδιορίζεται πλήρως από τους έξι αριθμούς που περιέχουν οι εξισώσεις. Θα πρέπει να υπάρχει κάποιος τύπος που να δίνει το y (και το x). Ο τύπος αυτός είναι ένας «λόγος οριζουσών» και ελπίζω να μου επιτρέψετε να τον γράψω απευθείας:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{1 \cdot 6 - 3 \cdot 4}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4}} = \frac{-6}{-3} = 2. \tag{4}$$

Αυτός ο τύπος μπορεί να φαίνεται κάπως περίεργος, εκτός αν γνωρίζετε ήδη κάποια πράγματα για τις 2 επί 2 ορίζουσες. Οι ορίζουσες έδωσαν την ίδια απάντηση $y = 2$, η οποία προέκυψε από τον ίδιο λόγο -6 δια -3. Αν συνεχίσουμε την επίλυση χρησιμοποιώντας ορίζουσες (το οποίο δεν σκοπεύουμε να κάνουμε), θα διαπιστώσουμε ότι υπάρχει ένας παρόμοιος τύπος για τον υπολογισμού του άλλου αγνώστου, του x:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \boxed{\frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 6}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 4}} = \frac{3}{-3} = -1. \tag{5}$$

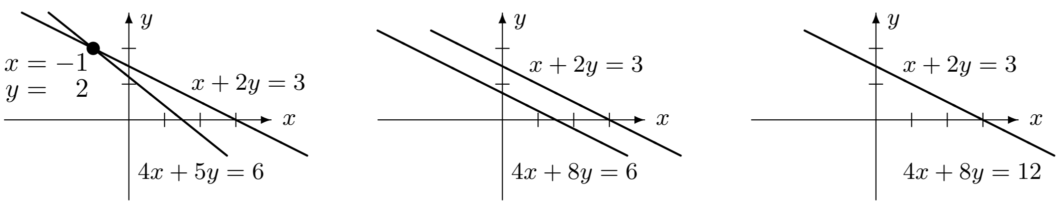
Ας συγκρίνουμε τις δύο προσεγγίσεις έχοντας κατά νου τα πραγματικά προβλήματα, όπου το n είναι πολύ μεγαλύτερο (η τιμή $n = 1000$ είναι πολύ μετριοπαθής στην υπολογιστική επιστήμη). Η αλήθεια είναι ότι η απευθείας χρήση του τύπου των οριζουσών για 1000 εξισώσεις θα ήταν απόλυτη καταστροφή. Θα χρησιμοποιούσε τους ένα εκατομμύριο αριθμούς που υπάρχουν στα αριστερά μέλη των εξισώσεων σωστά, αλλά όχι αποδοτικά. Θα βρούμε αυτόν τον τύπο (τον κανόνα του Cramer) στο Κεφάλαιο 4, αλλά στο Κεφάλαιο 1 θέλουμε μια καλή μέθοδο για να λύνουμε 1000 εξισώσεις.

Η καλή αυτή μέθοδος είναι η ***απαλοιφή Gauss***. Είναι ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται κατά κόρον για την επίλυση μεγάλων συστημάτων εξισώσεων. Αν στηριχτεί κανείς στα παραδείγματα που δίνονται στα διδακτικά βιβλία ($n = 3$ είναι το μέγιστο όριο υπομονής που μπορεί να επιδείξει συγγραφέας και αναγνώστης) ενδέχεται να μην αντιληφθεί σημαντική διαφορά. Οι εξισώσεις (2) και (4) μας έδωσαν $y = 2$ ουσιαστικά μέσω των ίδιων βημάτων. Ασφαλώς, το x προέκυψε πιο γρήγορα μέσω της ανάδρομης αντικατάστασης της εξίσωσης (3) από ό,τι μέσω του λόγου της εξίσωσης (5). Για μεγαλύτερα n δεν τίθεται καν ζήτημα. Η απαλοιφή κερδίζει (και μάλιστα είναι και ο καλύτερος τρόπος υπολογισμού των οριζουσών).

Η ιδέα της απαλοιφής δείχνει εξαιρετικά απλή —μετά από λίγα παραδείγματα θα την έχετε καταλάβει πλήρως. Θα αποτελέσει τη βάση της μισής ύλης του βιβλίου, επιτρέποντάς μας να απλοποιούμε πίνακες έτσι ώστε να μπορούμε να τους κατανοούμε καλύτερα. Μαζί με τον τρόπο λειτουργίας του αλγορίθμου, στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να εξηγήσουμε και τα εξής τέσσερα βαθύτερης σημασίας ζητήματα:

1. Οι γραμμικές εξισώσεις οδηγούν στη ***γεωμετρία των επιπέδων***. Δεν είναι εύκολο να οπτικοποιήσει κανείς ένα εννεαδιάστατο επίπεδο στον δεκαδιάστατο χώρο. Είναι ακόμη δυσκολότερο να δει δέκα από αυτά τα επίπεδα, που τέμνονται στη λύση των δέκα εξισώσεων —κατά κάποιο τρόπο, όμως, αυτό είναι σχεδόν δυνατό. Στο παράδειγμα του Σχήματος 1.1 έχουμε δύο ευθείες, οι οποίες τέμνονται στο σημείο $(x, y) = (-1, 2)$. Η γραμμική άλγεβρα μεταφέρει αυτή την εικόνα στις δέκα διαστάσεις, όπου πρέπει να αντιληφθούμε τη γεωμετρία μέσω της διαίσθησης (και το κατορθώνουμε).

2. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ***συμβολισμό πινάκων***, γράφοντας τους n αγνώστους σαν ένα



Μία λύση $(x, y) = (-1, 2)$ **Παράλληλες ευθείες: Καμία λύση** **Ολόκληρη ευθεία λύσεων**

Σχήμα 1.1 Το παράδειγμα έχει μία λύση. Οι ιδιόμορφες περιπτώσεις έχουν καμία ή πάρα πολλές.

διάνυσμα x και τις n εξισώσεις σαν $Ax = b$. Θα πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A με «πίνακες απαλοιφής» ώστε να βρούμε έναν άνω τριγωνικό πίνακα U. Μέσω αυτών των βημάτων, ο A παραγοντοποιείται στη μορφή L *επί* U, όπου L είναι ένας κάτω τριγωνικός πίνακας. Θα γράψουμε τον A και τους παράγοντές του για την περίπτωση τους παραδείγματός μας και θα τους εξηγήσουμε όταν έρθει η κατάλληλη στιγμή:

$$\textbf{Παραγοντοποίηση} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L} \textbf{\textit{ επί }} \boldsymbol{U}. \tag{6}$$

Αρχικά πρέπει να εισαγάγουμε την έννοια του πίνακα και του διανύσματος, και τους κανόνες πολλαπλασιασμού. Κάθε πίνακας έχει έναν ***ανάστροφο*** $\boldsymbol{A}^{\mathbf{T}}$. Ο παραπάνω πίνακας έχει και έναν ***αντίστροφο*** $\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$.

3. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η απαλοιφή προχωράει χωρίς δυσκολίες. Ο πίνακας έχει αντίστροφο, και το σύστημα $Ax = b$ έχει μία λύση. Σε ορισμένες όμως περιπτώσεις, η μέθοδος *αποτυγχάνει* —είτε διότι οι εξισώσεις ήταν γραμμένες με λάθος σειρά, το οποίο διορθώνεται εύκολα με αντιμετάθεσή τους, είτε διότι οι εξισώσεις δεν έχουν μοναδική λύση.

Αυτή η ***ιδιόμορφη περίπτωση*** θα εμφανιστεί αν αντικαταστήσουμε το 5 με το 8 στο παράδειγμά μας:

$$\begin{array}{lrcrcr} \textbf{Ιδιόμορφη περίπτωση} & 1x & + & 2y & = & 3 \\ \textbf{Δύο παράλληλες ευθείες} & 4x & + & \mathbf{8}y & = & 6. \end{array} \tag{7}$$

Η απαλοιφή θα αφαιρέσει ανυποψίαστη 4 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη. Κοιτάξτε όμως το αποτέλεσμα!

$$\textbf{(εξίσωση 2)} - \textbf{4 (εξίσωση 1)} \qquad \boxed{0 = -6.}$$

Η ιδιόμορφη αυτή περίπτωση δεν έχει ***καμία λύση***. Άλλες ιδιόμορφες περιπτώσεις έχουν ***άπειρες λύσεις***. (Αν στο παράδειγμα αλλάξουμε το 6 σε 12, η απαλοιφή θα δώσει $0 = 0$, οπότε το y μπορεί να έχει *οποιαδήποτε τιμή*.) Όταν η απαλοιφή αποτυγχάνει, θέλουμε να βρούμε όλες τις δυνατές λύσεις.

4. Χρειαζόμαστε μια χοντρική εκτίμηση του ***πλήθους των βημάτων απαλοιφής*** που απαιτούνται για να λύσουμε ένα σύστημα μεγέθους n. Το πλήθος των πράξεων καθορίζει συχνά την ακρίβεια του μοντέλου. Για εκατό εξισώσεις απαιτούνται ένα τρίτο του εκατομμυρίου βήματα (πολλαπλασιασμοί και αφαιρέσεις). Ο υπολογιστής μπορεί να κάνει εκατομμύρια πράξεις γρήγορα, όχι όμως πολλά τρισεκατομμύρια. Και ύστερα από ένα εκατομμύριο βήματα, το σφάλμα στρογγυλοποίησης μπορεί να είναι ήδη σημαντικό. (Μερικά προβλήματα είναι ευαίσθητα, άλλα όχι.) Χωρίς να υπεισέλθουμε σε όλες τις λεπτομέρειες, θέλουμε να δούμε τα μεγάλα συστήματα που συναντώνται στην πράξη και πώς ακριβώς λύνονται.

Το τελικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου θα είναι ένας όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερος αλγόριθμος απαλοιφής. Πρόκειται ουσιαστικά για τον αλγόριθμο που χρησιμοποιείται συστηματικά σε τεράστια ποικιλία εφαρμογών. Και ταυτόχρονα, η κατανόηση του μέσω των *πινάκων* —του πίνακα συντελεστών A, των πινάκων E για την απαλοιφή και P για τις αντιμεταθέσεις γραμμών, και των τελικών παραγόντων L και U— είναι απαραίτητη για τη θεμελίωση της θεωρίας. Ελπίζω ότι θα απολαύσετε το βιβλίο και το μάθημα.

1.2 Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

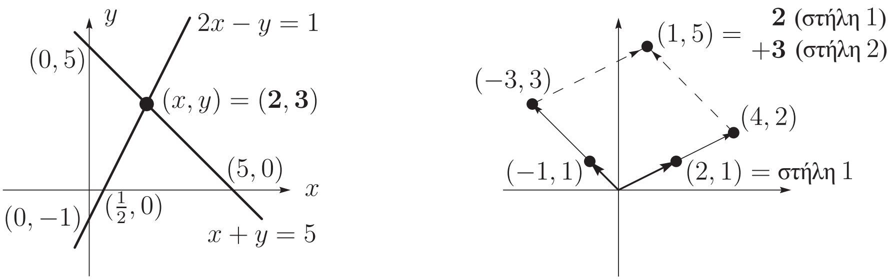
Ο καλύτερος τρόπος να γίνει κατανοητή η γεωμετρία των γραμμικών εξισώσεων είναι μέσω παραδειγμάτων. Θα ξεκινήσουμε με δύο εξαιρετικά ταπεινές εξισώσεις, αναγνωρίζοντας ότι θα μπορούσαμε να τις λύσουμε χωρίς να έχουμε παρακολουθήσει κάποιο μάθημα γραμμικής άλγεβρας. Παρόλα αυτά, ας δώσουμε μια ευκαιρία στον Gauss:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + y &= 5. \end{aligned}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό το σύστημα *κατά γραμμές ή κατά στήλες*. Θέλουμε να το εξετάσουμε και με τους δύο τρόπους.

Η πρώτη προσέγγιση επικεντρώνεται στις εξισώσεις του γραμμικού συστήματος (τις ***γραμμές***). Είναι η πιο συνηθισμένη και στις δύο διαστάσεις μπορεί να γίνει γρήγορα. Η εξίσωση $2x - y = 1$ αναπαριστάται με μια *ευθεία* στο επίπεδο x-y. Η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $x = 1$, $y = 1$ και $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$ (καθώς και από το $(2, 3)$ και από όλα τα ενδιάμεσα σημεία). Η δεύτερη εξίσωση $x + y = 5$ δίνει τη δεύτερη ευθεία (Σχήμα 1.2α). Η κλίση της είναι $dy/dx = -1$ και τέμνει την πρώτη ευθεία στη λύση.

Το σημείο τομής ανήκει και στις δύο ευθείες. Είναι η μοναδική λύση και των δύο εξισώσεων. Θα βρούμε σύντομα αυτό το σημείο $x = 2$ και $y = 3$ μέσω «απαλοιφής».



(α) **Οι ευθείες τέμνονται στο $\boldsymbol{x = 2, y = 3}$**

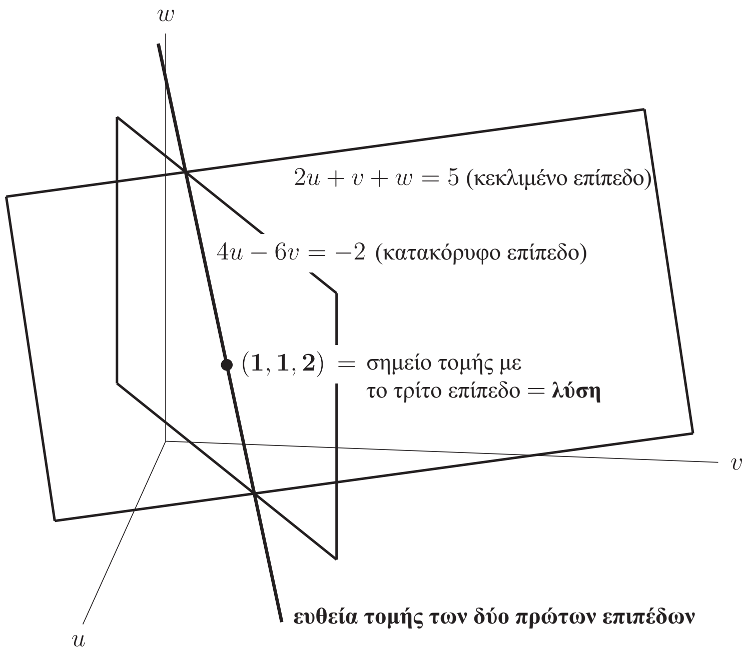
(β) **Οι στήλες συνδυάζονται μέσω του 2 και του 3**

Σχήμα 1.2 Εικόνα γραμμών (δύο ευθείες) και εικόνα στηλών (συνδυασμός στηλών).

Η δεύτερη προσέγγιση επικεντρώνεται στις ***στήλες*** του γραμμικού συστήματος. Οι δύο εξισώσεις αποτελούν ουσιαστικά ***μία διανυσματική εξίσωση***:

$$\textbf{Μορφή στηλών} \qquad x\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}.$$

Το πρόβλημα είναι ***η εύρεση του συνδυασμού των διανυσμάτων στηλών του αριστερού μέλους που παράγουν το διάνυσμα του δεξιού μέλους.*** Τα διανύσματα αυτά, τα $(2, 1)$ και $(-1, 1)$, αναπαριστώνται στο Σχήμα 1.2β με έντονες γραμμές. Οι άγνωστοι είναι οι αριθμοί x και y με τους οποίους πολλαπλασιάζονται τα διανύσματα στήλες. Η ιδέα καταδεικνύεται πλήρως στο σχήμα, όπου το 2 επί στήλη 1 προστίθεται στο 3 επί στήλη 2. Γεωμετρικά, με αυτό τον τρόπο παράγεται ένα διάσημο παραλληλόγραμμο. Αλγεβρικά, παράγεται το σωστό διάνυσμα $(1, 5)$, που σχηματίζουν τα δεξιά μέλη των εξισώσεών μας. Από την εικόνα στηλών



Σχήμα 1.3 Η εικόνα γραμμών: τρία τεμνόμενα επίπεδα από τρεις γραμμικές εξισώσεις.

επιβεβαιώνουμε ότι $x = 2$ και $y = 3$.

Θα μπορούσαμε να ξοδέψουμε περισσότερο χρόνο σε αυτό το παράδειγμα, αλλά είναι προτιμότερο να προχωρήσουμε στην περίπτωση $n = 3$. Τρεις εξισώσεις είναι διαχειρίσιμες, αλλά εμφανίζουν πολύ μεγαλύτερη ποικιλία:

$$\textbf{Τρία επίπεδα} \qquad \begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

Μπορούμε και πάλι να μελετήσουμε τις γραμμές ή τις στήλες. Θα ξεκινήσουμε με τις γραμμές. Κάθε εξίσωση περιγράφει ένα ***επίπεδο*** στις τρεις διαστάσεις. Το πρώτο επίπεδο είναι το $2u + v + w = 5$ και έχει σχεδιαστεί στο Σχήμα 1.3. Περιέχει τα σημεία $(\frac{5}{2}, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ και $(0, 0, 5)$. Προσδιορίζεται από οποιαδήποτε τρία σημεία του —αρκεί να μην είναι συνευθειακά.

Αν αλλάζαμε το 5 *σε* 10, *το επίπεδο* $2u+v+w = 10$ *θα ήταν παράλληλο σε αυτό*. Περιέχει τα $(5, 0, 0)$, $(0, 10, 0)$ και $(0, 0, 10)$, τα οποία απέχουν διπλάσια απόσταση από την αρχή των αξόνων —που είναι το κεντρικό σημείο $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Μεταβάλλοντας το δεξί μέλος μετατοπίζουμε το επίπεδο παράλληλα στον εαυτό του· το επίπεδο $2u + v + w = 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Το δεύτερο επίπεδο είναι το $4u - 6v = -2$. Είναι σχεδιασμένο κατακόρυφα, διότι το w μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Ο συντελεστής του w είναι μηδέν, αλλά το επίπεδο παραμένει επίπεδο του τριδιάστατου χώρου. (Η εξίσωση $4u = 3$, ή στην ακραία περίπτωση $u = 0$, θα περιέγραφε και αυτή ένα επίπεδο.) Στο σχήμα παρουσιάζεται η τομή του δεύτερου επιπέδου με το πρώτο. Η τομή είναι μια ευθεία. *Στις τρεις διαστάσεις για την περιγραφή μιας ευθείας απαιτούνται δύο εξισώσεις·* στις n διαστάσεις απαιτούνται $n-1$.

Τέλος, το τρίτο επίπεδο τέμνει αυτή την ευθεία σε ένα σημείο. Το επίπεδο (που δεν είναι σχεδιασμένο) αναπαριστά την τρίτη εξίσωση $-2u+7v+2w=9$ και τέμνει την ευθεία στο $u=1$, $v=1$, $w=2$. Το σημείο αυτό τριπλής τομής $(1,1,2)$ είναι η λύση του γραμμικού συστήματος.

Πώς γενικεύεται η εικόνα γραμμών στις n διαστάσεις; Οι n εξισώσεις θα περιέχουν n αγνώστους. Η πρώτη εξίσωση θα προσδιορίζει και πάλι ένα «επίπεδο». Δεν θα είναι πια ένα διδιάστατο επίπεδο του τριδιάστατου χώρου· κατά κάποιο τρόπο θα έχει «διάσταση» $n-1$. Θα πρέπει να είναι ισόπεδο και εξαιρετικά λεπτό εντός του n-διάστατου χώρου, μολονότι σε εμάς θα φαινόταν στερεό.

Αν ο χρόνος είναι η τέταρτη διάσταση, τότε το επίπεδο $t=0$ διασχίζει τον τετραδιάστατο χώρο και παράγει το τριδιάστατο σύμπαν όπου ζούμε (ή μάλλον το σύμπαν όπως ήταν τη στιγμή $t=0$). Ένα άλλο επίπεδο είναι το $z=0$, το οποίο είναι επίσης τριδιάστατο· είναι το σύνηθες επίπεδο x-y για όλες τις χρονικές στιγμές. Αυτά τα τριδιάστατα επίπεδα θα τέμνονται! Και τα δύο περιέχουν το σύνηθες επίπεδο x-y για $t=0$. Έχουμε κατέβει στις δύο διαστάσεις, και το επόμενο επίπεδο αφήνει μια ευθεία. Τέλος, ένα τέταρτο επίπεδο αφήνει μόνο ένα σημείο, το οποίο είναι το σημείο τομής τεσσάρων επιπέδων στις 4 διαστάσεις και είναι η λύση των τεσσάρων αντίστοιχων εξισώσεων.

Αν συνεχίσω αυτό το παράδειγμα από τη σχετικότητα θα μπλέξω. Η ουσία είναι ότι η γραμμική άλγεβρα δουλεύει με οποιοδήποτε πλήθος εξισώσεων. Η πρώτη εξίσωση παράγει ένα $(n-1)$-διάστατο επίπεδο στις n διαστάσεις. Το δεύτερο επίπεδο (ελπίζουμε ότι) το τέμνει κατά ένα μικρότερο σύνολο «διάστασης $n-2$». Αν θεωρήσουμε ότι όλα θα πάνε καλά, κάθε νέο επίπεδο (κάθε νέα εξίσωση) θα μειώνει τη διάσταση κατά ένα. Στο τέλος, όταν θα έχουμε λάβει υπόψη και τα n επίπεδα, η τομή θα έχει διάσταση μηδέν. Θα είναι ένα *σημείο*, θα ανήκει σε όλα τα επίπεδα και οι συντεταγμένες του θα ικανοποιούν και τις n εξισώσεις. Θα είναι η λύση!

Διανύσματα στήλες και γραμμικοί συνδυασμοί

Ας δούμε τώρα τις στήλες. Αυτή τη φορά, η διανυσματική εξίσωση (η ίδια εξίσωση με την (1)) είναι η εξής:

$$\textbf{Μορφή στηλών} \qquad u\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+v\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+w\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}=b. \tag{2}$$

Τα παραπάνω είναι *τριδιάστατα διανύσματα στήλες*. ***Το διάνυσμα b ταυτίζεται με το σημείο με συντεταγμένες* $\mathbf{5, -2, 9}$**. Κάθε σημείο του τριδιάστατου χώρου αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα και αντιστρόφως. Αυτή ήταν η ιδέα του Καρτέσιου, ο οποίος μετέτρεψε τη γεωμετρία σε άλγεβρα εργαζόμενος με τις συντεταγμένες των σημείων. Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα σαν μια στήλη, ή να παραθέσουμε τις συνιστώσες του σε μια λίστα γράφοντας $b=(5,-2,9)$, ή να το αναπαραστήσουμε γεωμετρικά σαν ένα βέλος που ξεκινάει από την αρχή των αξόνων. Μπορείτε να επιλέξετε *το βέλος*, ή *το σημείο*, ή *τους τρεις αριθμούς*. Στις έξι διαστάσεις είναι μάλλον ευκολότερο να επιλέξει κανείς τους έξι αριθμούς.

Χρησιμοποιούμε παρενθέσεις και κόμματα όταν παραθέτουμε τις συνιστώσες οριζοντίως, και αγκύλες (χωρίς κόμματα) όταν γράφουμε κάθετα ένα διάνυσμα στήλη. Αυτό που έχει πραγματικά σημασία είναι η ***πρόσθεση διανυσμάτων*** και ο ***πολλαπλασιασμός διανύσματος με βαθμωτή ποσότητα*** (με αριθμό). Στο Σχήμα 1.4α βλέπουμε μια πρόσθεση διανυσμάτων κατά συνιστώσες:

$$\textbf{Πρόσθεση διανυσμάτων} \qquad \begin{bmatrix}5\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}.$$

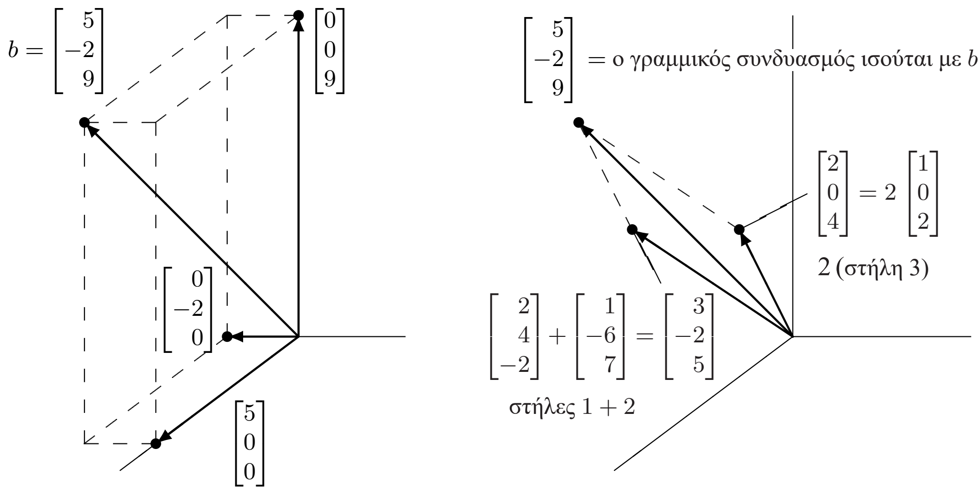
Στο δεξιό σχήμα παρουσιάζεται ένας πολλαπλασιασμός με το 2 (αν ήταν με το -2 το διάνυσμα θα είχε την αντίθετη κατεύθυνση):

$$\textbf{Πολλαπλασιασμός με αριθμούς} \qquad 2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\4\end{bmatrix}, \qquad -2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\-4\end{bmatrix}.$$

Στο δεξιό σχήμα καταδεικνύεται επίσης μια από τις κεντρικές ιδέες της γραμμικής άλγεβρας. Χρησιμοποιούνται *και οι δύο* βασικές πράξεις: τα διανύσματα *πολλαπλασιάζονται με αριθμούς και κατόπιν προστίθενται*. Το αποτέλεσμα καλείται ***γραμμικός συνδυασμός***· ο συνδυασμός αυτός είναι η λύση της εξίσωσής μας:

$$\textbf{Γραμμικός συνδυασμός} \qquad \mathbf{1}\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix}+\mathbf{1}\begin{bmatrix}1\\-6\\7\end{bmatrix}+\mathbf{2}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix}.$$

Με την εξίσωση (2) αναζητούμε τους πολλαπλασιαστές u, v, w που παράγουν το δεξί μέλος b. Οι αριθμοί αυτοί είναι οι $u = \mathbf{1}$, $v = \mathbf{1}$, $w = \mathbf{2}$, οι οποίοι δίνουν τον σωστό συνδυασμό των στηλών. Στην εικόνα γραμμών, έδωσαν επίσης το σημείο $(1, 1, 2)$ (το σημείο τομής των τριών επιπέδων).



(α) **Πρόσθεση διανυσμάτων κατά μήκος των αξόνων**

(β) **Πρόσθεση στηλών $\mathbf{1 + 2 + (3 + 3)}$**

Σχήμα 1.4 Η εικόνα στηλών: ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών ισούται με b.

Πραγματικός μας στόχος είναι να φύγουμε από τις δύο ή τρεις διαστάσεις και να προχωρήσουμε στις n διαστάσεις. Όταν έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους, στην εικόνα γραμμών υπάρχουν n επίπεδα. Στην εικόνα στηλών υπάρχουν n διανύσματα συν ένα διάνυσμα b στο δεξί μέλος. Μέσω των εξισώσεων αναζητούμε έναν ***γραμμικό συνδυασμό των n στηλών που να ισούται με b***. Για ορισμένες εξισώσεις θα είναι αδύνατο να βρεθεί τέτοιος συνδυασμός. Παραδόξως, ο καλύτερος τρόπος να κατανοήσουμε την καλή περίπτωση είναι να μελετήσουμε την κακή. Για αυτό θα εξετάσουμε τη γεωμετρία της προβληματικής περίπτωσης, της **ιδιόμορφης περίπτωσης**.

Εικόνα γραμμών: Τομή επιπέδων	***Εικόνα στηλών***: Συνδυασμός στηλών

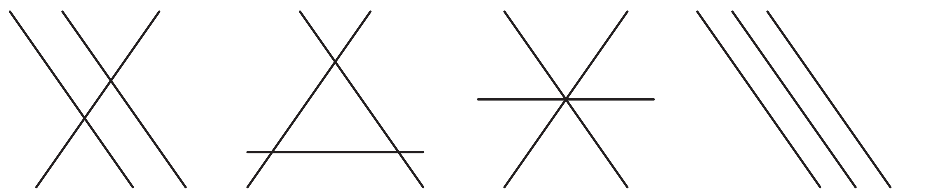
Η ιδιόμορφη περίπτωση

Ας υποθέσουμε πάλι ότι βρισκόμαστε στις τρεις διαστάσεις και ότι τα τρία επίπεδα στην εικόνα γραμμών *δεν τέμνονται*. Τι μπορεί να έχει πάει στραβά; Ένα ενδεχόμενο είναι τα δύο επίπεδα να είναι παράλληλα. Οι εξισώσεις $2u + v + w = 5$ και $4u + 2v + 2w = 11$ είναι ασυμβίβαστες —όταν τα επίπεδα είναι παράλληλα δεν υπάρχει καμία λύση (στο Σχήμα 1.5α παρουσιάζεται μια πλάγια όψη). Στις δύο διαστάσεις, οι παράλληλες ευθείες είναι η μόνο περίπτωση αποτυχίας. Όμως τρία επίπεδα στις τρεις διαστάσεις μπορεί να παρουσιάζουν πρόβλημα χωρίς να είναι παράλληλα.

Η συνηθέστερη δυσκολία παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.5β. Ιδωμένα από το πλάι, τα επίπεδα σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Η τομή κάθε ζεύγους επιπέδων είναι μία ευθεία, αλλά οι ευθείες αυτές είναι παράλληλες. Το τρίτο επίπεδο δεν είναι παράλληλο με τα άλλα επίπεδα, αλλά είναι παράλληλο με την ευθεία της τομής τους. Αυτό αντιστοιχεί στο ιδιόμορφο σύστημα με $b = (2, 5, 6)$:

Καμία λύση, όπως στο Σχήμα 1.5β
$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ 2u \phantom{{}+v} + 3w &= 5 \\ 3u + v + 4w &= 6. \end{aligned} \qquad (3)$$

Το άθροισμα των δύο πρώτων αριστερών μελών ισούται με το τρίτο, όμως στο δεξί μέλος δεν συμβαίνει το ίδιο: $2+5 \neq 6$. Εξίσωση 1 συν εξίσωση 2 μείον εξίσωση 3 μας δίνει την αδύνατη σχέση $0 = 1$. Άρα οι εξισώσεις είναι ***ασυμβίβαστες***, όπως θα διαπιστώσουμε συστηματικά μέσω της απαλοιφής Gauss.



δύο παράλληλες ευθείες (α) — δεν υπάρχει σημείο τομής (β) — ευθεία τομής (γ) — όλα τα επίπεδα είναι παράλληλα (δ)

Σχήμα 1.5 Ιδιόμορφες περιπτώσεις: καμία λύση για τα (α), (β) και (δ), άπειρο πλήθος λύσεων για το (γ).

Ένα άλλο ιδιόμορφο σύστημα, παρεμφερές με το προηγούμενο, έχει **άπειρο πλήθος λύσεων**. Αν στην τελευταία εξίσωση αλλάξουμε το 6 και το κάνουμε 7, συνδυάζοντας τις τρεις εξισώσεις παίρνουμε $0 = 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η τρίτη εξίσωση είναι το άθροισμα των δύο πρώτων, και τα τρία επίπεδα έχουν *κοινή* μια ολόκληρη *ευθεία* (Σχήμα 1.5γ). Η αλλαγή των δεξιών μελών μετατοπίζει τα επίπεδα του Σχήματος 1.5β παράλληλα προς τον εαυτό τους, και για $b = (2, 5, 7)$ η κατάσταση γίνεται ξαφνικά διαφορετική. Το κάτω επίπεδο μετακινήθηκε προς τα πάνω ώσπου να συναντήσει τα άλλα, και πλέον υπάρχει μια ευθεία λύσεων. Το Πρόβλημα 1.5γ είναι και αυτό ιδιόμορφο, αλλά υποφέρει από το ότι έχει ***πάρα πολλές λύσεις*** αντί για πολύ λίγες.

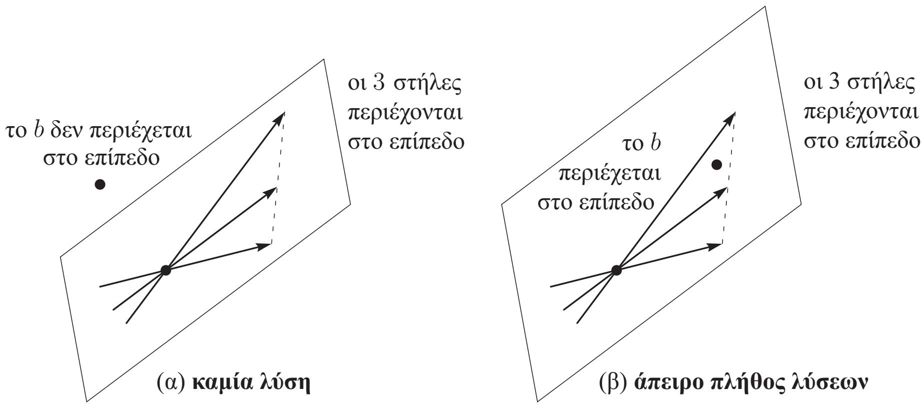
Η ακραία περίπτωση είναι να έχουμε τρία παράλληλα επίπεδα. Για τις περισσότερες περιπτώσεις δεξιών μελών δεν υπάρχει λύση (Σχήμα 1.5δ). Για ειδικές περιπτώσεις δεξιών μελών (όπως για $b = (0, 0, 0)$!) υπάρχει ένα ολόκληρο επίπεδο λύσεων —διότι τα τρία παράλληλα επίπεδα ταυτίζονται.

Τι συμβαίνει με την ***εικόνα στηλών*** όταν το σύστημα είναι ιδιόμορφο; Κάτι πρέπει να πηγαίνει στραβά· το ερώτημα είναι τι. Έχουμε και πάλι τρεις στήλες στο αριστερό μέλος των εξισώσεων και προσπαθούμε να τις συνδυάσουμε ώστε να πάρουμε το b. Ας παραμείνουμε στην εξίσωση (3):

Ιδιόμορφη περίπτωση: Εικόνα στηλών
Τρεις στήλες στο ίδιο επίπεδο
Λύνεται μόνο για b περιεχόμενο στο επίπεδο

$$u\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = b. \tag{4}$$

Για $b = (2, 5, 7)$ το σύστημα είχε λύση, ενώ για $b = (2, 5, 6)$ δεν είχε. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι ***τρεις στήλες ανήκουν σε ένα επίπεδο***, οπότε κάθε συνδυασμός τους περιέχεται επίσης στο ίδιο επίπεδο (το οποίο διέρχεται από την αρχή των αξόνων). Αν το διάνυσμα b δεν ανήκει σε αυτό το επίπεδο, δεν μπορεί να υπάρχει λύση (Σχήμα 1.6). Αυτό είναι μακράν το πιθανότερο ενδεχόμενο· ένα ιδιόμορφο σύστημα εν γένει δεν έχει λύση. Υπάρχει όμως μια πιθανότητα το b *να περιέχεται* στο επίπεδο των στηλών. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν πάρα πολλές λύσεις· οι τρεις στήλες μπορούν να συνδυαστούν με *άπειρους τρόπους* ώστε να παραγάγουν το b. Η εικόνα στηλών του Σχήματος 1.6β αντιστοιχεί στη εικόνα γραμμών του Σχήματος 1.5γ.



Σχήμα 1.6 Ιδιόμορφες περιπτώσεις: το b ανήκει ή δεν ανήκει στο επίπεδο των τριών στηλών.

Πώς γνωρίζουμε ότι οι τρεις στήλες περιέχονται στο ίδιο επίπεδο; Μια απάντηση είναι να βρούμε έναν συνδυασμό των στηλών που να έχει άθροισμα μηδέν. Ύστερα από μερικές πράξεις, βρίσκουμε ότι αυτός είναι ο $u = 3$, $v = -1$, $w = -2$. Τρία επί στήλη 1 ίσον στήλη 2 συν δύο επί στήλη 3. Η στήλη 1 περιέχεται στο επίπεδο των στηλών 2 και 3. Μόνο δύο από τις στήλες είναι ανεξάρτητες.

Το διάνυσμα $b = (2, 5, 7)$ περιέχεται σε αυτό το επίπεδο των στηλών —ισούται με στήλη 1 συν στήλη 3— άρα το $(1, 0, 1)$ είναι λύση. *Μπορούμε να προσθέσουμε οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του συνδυασμού* $(3, -1, -2)$ *που δίνει* $b = 0$. Άρα υπάρχει μια ολόκληρη ευθεία λύσεων —όπως γνωρίζουμε από την εικόνα γραμμών.

Η αλήθεια είναι ότι *γνωρίζαμε* πως ο συνδυασμός των στηλών θα έδινε μηδέν, διότι αυτό συνέβη με τις γραμμές. Πρόκειται για μια μαθηματική αλήθεια και όχι για το αποτέλεσμα κάποιων πράξεων —και ισχύει και στις n διαστάσεις. ***Αν τα n επίπεδα δεν έχουν κανένα ή άπειρα το πλήθος κοινά σημεία, τότε οι n στήλες περιέχονται στο ίδιο επίπεδο***.

Αν η εικόνα γραμμών είναι προβληματική, θα εμφανίζει προβληματική και η εικόνα στηλών. Σε αυτό έγκειται η διαφορά του Κεφαλαίου 1 από το Κεφάλαιο 2. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετούμε το σημαντικότερο πρόβλημα —τη *μη ιδιόμορφη* περίπτωση— όπου υπάρχει μία λύση, η οποία πρέπει να βρεθεί. Στο Κεφάλαιο 2 μελετούμε τη γενική περίπτωση, όπου ενδέχεται να υπάρχουν πολλές λύσεις ή καμία λύση. Και στις δύο περιπτώσεις, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε χωρίς τον κατάλληλο συμβολισμό (*συμβολισμό πινάκων*) και έναν ικανοποιητικό αλγόριθμο (*απαλοιφή*). Μετά τις ασκήσεις, θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της απαλοιφής.

Προβλήματα 1.2

1. Σχεδιάστε την εικόνα γραμμών (δύο τεμνόμενες ευθείες) και την εικόνα στηλών (συνδυασμός δύο στηλών που ισούται με το διάνυσμα στήλη $(4, 4)$ του δεξιού μέλους) για τις εξισώσεις $x + y = 4$, $2x - 2y = 4$.

2. Λύνοντας το παρακάτω σύστημα βρείτε έναν συνδυασμό των στηλών που να ισούται με b:

Τριγωνικό σύστημα
$$\begin{aligned} u - v - w &= b_1 \\ v + w &= b_2 \\ w &= b_3. \end{aligned}$$

3. (Προτεινόμενο) Περιγράψτε την τομή των τριών επιπέδων $u+v+w+z = 6$, $u+w+z = 4$ και $u+w = 2$ (όλα στον τετραδιάστατο χώρο). Είναι ευθεία, σημείο ή το κενό σύνολο; Ποια είναι η τομή αν συμπεριλάβουμε ως τέταρτο επίπεδο το $u = -1$; Βρείτε μια τέταρτη εξίσωση που έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει λύση.

4. Σχεδιάστε τις παρακάτω τρεις ευθείες και διαπιστώστε αν το σύστημα έχει λύση:

Σύστημα 3 επί 2
$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x - y &= 2 \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Τι θα συμβεί αν όλα τα δεξιά μέλη είναι μηδέν; Υπάρχει κάποια μη μηδενική επιλογή για τα δεξιά μέλη που να επιτρέπει στις τρεις ευθείες να τέμνονται στο ίδιο σημείο;

5. Βρείτε δύο σημεία της ευθείας τομής των τριών επιπέδων $t = 0$, $z = 0$ και $x+y+z+t = 1$ στον τετραδιάστατο χώρο.

6. Αν $b = (2, 5, 7)$, βρείτε μια λύση (u, v, w) της εξίσωσης (4) διαφορετική από τη λύση $(1, 0, 1)$ που αναφέρεται στο κείμενο.

7. Γράψτε δύο ακόμη δεξιά μέλη εκτός του $b = (2, 5, 7)$ για τα οποία η εξίσωση (4) έχει λύση. Δώστε δύο ακόμη δεξιά μέλη εκτός του $b = (2, 5, 6)$ για τα οποία δεν έχει λύση.

8. Εξηγήστε γιατί το σύστημα

$$\begin{aligned} u + v + w &= 2 \\ u + 2v + 3w &= 1 \\ v + 2w &= 0 \end{aligned}$$

είναι ιδιόμορφο βρίσκοντας έναν συνδυασμό των τριών εξισώσεων με άθροισμα την $0 = 1$. Με ποια τιμή πρέπει να αντικαταστήσουμε το τελευταίο μηδέν στα δεξιά μέλη ώστε οι εξισώσεις να έχουν λύσεις —και ποια είναι μία από τις λύσεις;

9. Η εικόνα στηλών της προηγούμενης άσκησης (ιδιόμορφο σύστημα) είναι

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Δείξτε ότι οι τρεις στήλες του αριστερού μέλους περιέχονται στο ίδιο επίπεδο εκφράζοντας την τρίτη στήλη σαν συνδυασμό των δύο πρώτων. Βρείτε όλες τις λύσεις (u, v, w) αν το b είναι το μηδενικό διάνυσμα $(0, 0, 0)$.

10. (Προτεινόμενο) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα y_1, y_2, y_3 ώστε τα σημεία $(0, y_1)$, $(1, y_2)$, $(2, y_3)$ να ανήκουν σε μια ευθεία;

11. Η $x = y = 0$ είναι σίγουρα λύση των παρακάτω εξισώσεων. Για ποιες τιμές του a υπάρχει ολόκληρη ευθεία λύσεων;

$$\begin{aligned} ax + 2y &= 0 \\ 2x + ay &= 0 \end{aligned}$$

12. Ξεκινώντας από την $x + 4y = 7$, βρείτε την εξίσωση της παράλληλης ευθείας που διέρχεται από το $x = 0$, $y = 0$. Βρείτε την εξίσωση μιας άλλης ευθείας που τέμνει την πρώτη στο $x = 3$, $y = 1$.

Στα Προβλήματα 13–15 γίνεται επανάληψη της εικόνας γραμμών και της εικόνας στηλών.

13. Σχεδιάστε τις δύο εικόνες σε δύο επίπεδα για τις εξισώσεις $x - 2y = 0$, $x + y = 6$.

14. Για δύο γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους x, y, z, η εικόνα γραμμών αποτελείται από (2 ή 3) (ευθείες ή επίπεδα) στον (διδιάστατο ή τριδιάστατο) χώρο. Η εικόνα στηλών είναι στον (διδιάστατο ή τριδιάστατο) χώρο. Οι λύσεις κανονικά ανήκουν σε ______.

15. Για τέσσερις γραμμικές εξισώσεις με δύο αγνώστους x και y, η εικόνα γραμμών αποτελείται από τέσσερ__ ______. Η εικόνα στηλών είναι στον ______-διάστατο χώρο. Οι εξισώσεις δεν έχουν λύση εκτός αν το διάνυσμα του δεξιού μέλους είναι ένας συνδυασμός των ______.

16. Βρείτε ένα σημείο με $z = 2$ στην ευθεία τομής των επιπέδων $x + y + 3z = 6$ και $x - y + z = 4$. Βρείτε το σημείο με $z = 0$ και ένα τρίτο σημείο που ισαπέχει από αυτά.

17. Η πρώτη από τις παρακάτω εξισώσεις συν τη δεύτερη ισούται με την τρίτη:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 5. \end{aligned}$$

Τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται κατά μια ευθεία. Το τρίτο επίπεδο περιέχει αυτή την ευθεία, διότι αν τα x, y, z ικανοποιούν τις δύο πρώτες εξισώσεις τότε ικανοποιούν και ______. Οι εξισώσεις έχουν άπειρες λύσεις (ολόκληρη την ευθεία **L**). Βρείτε τρεις λύσεις.

18. Μετακινήστε το τρίτο επίπεδο του Προβλήματος 17 στο παράλληλο επίπεδο $2x + 3y + 2z = 9$. Οι τρεις εξισώσεις δεν έχουν πλέον λύση —*γιατί δεν έχουν*; Τα δύο πρώτα επίπεδα τέμνονται κατά την ευθεία **L**, αλλά το τρίτο επίπεδο δεν ______ αυτή την ευθεία.

19. Στο Πρόβλημα 17 οι στήλες είναι $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ και $(1, 1, 2)$. Πρόκειται για «ιδιόμορφη περίπτωση» διότι η τρίτη στήλη είναι ______. Βρείτε δύο συνδυασμούς των στηλών που να δίνουν $b = (2, 3, 5)$. Αυτό είναι δυνατό για $b = (4, 6, c)$ μόνο αν $c =$ ______.

20. Κανονικά, τέσσερα «επίπεδα» στον τετραδιάστατο χώρο τέμνονται σε ______. Κανονικά, τέσσερα διανύσματα στήλες στον τετραδιάστατο χώρο μπορούν να συνδυαστούν ώστε να παραγάγουν το b. Από ποιον συνδυασμό των $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ παράγεται το $b = (3, 3, 3, 2)$; Ποιες είναι οι τέσσερις εξισώσεις ως προς x, y, z, t που λύνετε;

21. Όταν προσθέτουμε την εξίσωση 1 στην εξίσωση 2, ποιο από τα εξής αλλάζει: τα επίπεδα στην εικόνα γραμμών, η εικόνα στηλών, ο πίνακας συντελεστών ή η λύση;

22. Αν το (a, b) είναι πολλαπλάσιο του (c, d) με $abcd \neq 0$, *δείξτε ότι το* (a, c) *είναι πολλαπλάσιο του* (b, d). Αυτό είναι απρόσμενα σημαντικό: καλέστε το ερώτημα πρόκληση. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αρχικά αριθμούς για να δείτε πώς σχετίζονται τα a, b, c και d. Το ερώτημα οδηγεί στο εξής:

$$\text{Αν ο } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ έχει εξαρτώμενες γραμμές τότε έχει εξαρτώμενες στήλες.}$$

23. Στις παρακάτω εξισώσεις, η τρίτη στήλη (με την οποία πολλαπλασιάζεται το w) είναι *ίδια* με το δεξί μέλος b. Ποια λύση για τα (u, v, w) προκύπτει *αμέσως* από τη μορφή στηλών των εξισώσεων;

$$\begin{aligned} 6u + 7v + 8w &= 8 \\ 4u + 5v + 9w &= 9 \\ 2u - 2v + 7w &= 7. \end{aligned}$$

1.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ GAUSS

Ο καλύτερος τρόπος να κατανοήσει κανείς την απαλοιφή είναι μέσω παραδειγμάτων. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα στις τρεις διαστάσεις:

$$\textbf{Αρχικό σύστημα} \qquad \begin{aligned} 2u + v + w &= 5 \\ 4u - 6v &= -2 \\ -2u + 7v + 2w &= 9. \end{aligned} \tag{1}$$

Το ζητούμενο είναι να βρούμε τις άγνωστες τιμές των u, v και w, και θα το κάνουμε εφαρμόζοντας την απαλοιφή Gauss. (Ο Gauss θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός, αλλά σίγουρα όχι για αυτή την ανακάλυψη, η οποία πιθανώς να του πήρε δέκα λεπτά. Κατά ειρωνεία της τύχης, είναι η συχνότερα χρησιμοποιούμενη από όλες τις ιδέες που φέρουν το όνομά του.) Η μέθοδος ξεκινάει με την ***αφαίρεση πολλαπλασίων της πρώτης εξίσωσης από τις άλλες εξισώσεις***. Στόχος είναι να *απαλείψουμε το u από τις δύο τελευταίες εξισώσεις*. Για αυτό απαιτείται

(α) να αφαιρέσουμε 2 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη,
(β) να αφαιρέσουμε -1 επί την πρώτη εξίσωση από την τρίτη.

$$\textbf{Ισοδύναμο σύστημα} \qquad \begin{aligned} \mathbf{2}u + v + w &= 5 \\ - \mathbf{8}v - 2w &= -12 \\ 8v + 3w &= 14. \end{aligned} \tag{2}$$

Ο συντελεστής 2 είναι ο ***πρώτος οδηγός***. Στην απαλοιφή υπολογίζουμε διαρκώς το πηλίκο των αριθμών που βρίσκονται κάτω από τον οδηγό δια τον οδηγό ώστε να βρούμε τους σωστούς πολλαπλασιαστές.

Ο οδηγός **του δεύτερου βήματος της απαλοιφής** είναι το -8. Σε αυτό το βήμα αγνοούμε την πρώτη εξίσωση. Θα αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο της δεύτερης εξίσωσης από τις εξισώσεις που απομένουν (στην προκειμένη περίπτωση υπάρχει μόνο η τρίτη) ώστε να απαλείψουμε το v. Προσθέτουμε τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη ή, με άλλα λόγια,

(γ) αφαιρούμε -1 επί τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Η διαδικασία της απαλοιφής έχει ολοκληρωθεί, τουλάχιστον κατά την «ορθόδρομη» φορά:

$$\textbf{Τριγωνικό σύστημα} \qquad \begin{aligned} \mathbf{2}u + v + w &= 5 \\ - \mathbf{8}v - 2w &= -12 \\ \mathbf{1}w &= 2. \end{aligned} \tag{3}$$

Το σύστημα λύνεται ανάδρομα, από κάτω προς τα πάνω. Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $w = 2$. Αντικαθιστώντας στη δεύτερη εξίσωση, βρίσκουμε $v = 1$. Κατόπιν, από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $u = 1$. Η διαδικασία αυτή καλείται ***ανάδρομη αντικατάσταση***.

Επαναλαμβάνουμε: Κατά την ορθόδρομη απαλοιφή πήραμε τους οδηγούς $2, -8, 1$. Αφαιρέσαμε πολλαπλάσια κάθε γραμμής από τις γραμμές που βρίσκονταν από κάτω της. Φτάσαμε στο «τριγωνικό» σύστημα (3), το οποίο λύνεται κατά αντίστροφο τρόπο: Αντικαθιστούμε κάθε νέα τιμή που υπολογίζουμε στις εξισώσεις που περιμένουν.

Παρατήρηση Ένας καλός τρόπος να γράφουμε τα βήματα της ορθόδρομης απαλοιφής είναι να περιλαμβάνουμε το δεξί μέλος σαν μια επιπλέον στήλη. Δεν χρειάζεται να ξαναγράφουμε τα u, v και w και το $=$ σε κάθε βήμα, οπότε απομένουν τα απολύτως ελάχιστα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 8 & 3 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Στο τέλος έχουμε το τριγωνικό σύστημα, έτοιμο για την ανάδρομη αντικατάσταση. Μπορείτε να προτιμήσετε αυτόν τον τρόπο γραφής, ο οποίος διασφαλίζει ότι οι πράξεις στο αριστερό μέλος των εξισώσεων γίνονται και στο δεξί μέλος —επειδή *και τα δύο μέλη εμφανίζονται μαζί.*

Σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα, τη μεγαλύτερη προσπάθεια απαιτεί η ορθόδρομη απαλοιφή. Χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια της πρώτης εξίσωσης για να παραγάγουμε μηδενικά κάτω από τον πρώτο οδηγό. Στη συνέχεια μηδενίζουμε τη δεύτερη στήλη κάτω από τον δεύτερο οδηγό. Το ορθόδρομο στάδιο ολοκληρώνεται όταν το σύστημα γίνει τριγωνικό· η εξίσωση n περιέχει μόνο τον τελευταίο άγνωστο πολλαπλασιασμένο με τον τελευταίο οδηγό. Η ανάδρομη αντικατάσταση μας δίνει την πλήρη λύση κατά αντίστροφη σειρά —παίρνουμε πρώτα τον τελευταίο άγνωστο, κατόπιν λύνουμε ως προς τον προτελευταίο, μέχρι να φτάσουμε τελικά στον πρώτο.

Εξ ορισμού, οι ***οδηγοί δεν μπορούν να είναι μηδέν***. Πρέπει να διαιρέσουμε με αυτούς.

Η αποτυχία της απαλοιφής

Υπό ποιες συνθήκες μπορεί να αποτύχει αυτή η διαδικασία; Κάτι *πρέπει* να πάει στραβά στην ιδιόμορφη περίπτωση και κάτι *ενδέχεται* να πάει στραβά στη μη ιδιόμορφη περίπτωση. Η συζήτηση αυτή ίσως φαίνεται λίγο πρόωρη —στο κάτω κάτω μόλις κατασκευάσαμε έναν αλγόριθμο που δουλεύει. Ωστόσο, το ενδεχόμενο της αποτυχίας μάς βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα την ίδια τη μέθοδο.

Η απάντηση είναι η εξής: Αν έχουμε ένα πλήρες σύνολο n οδηγών, υπάρχει μόνο μία λύση. Το σύστημα είναι μη ιδιόμορφο και λύνεται με ορθόδρομη απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση. Ωστόσο, ***αν εμφανιστεί μηδέν*** στη θέση κάποιου οδηγού, η απαλοιφή πρέπει να διακοπεί —είτε προσωρινά είτε οριστικά. Το σύστημα ενδέχεται να είναι ή να μην είναι ιδιόμορφο.

Αν ο πρώτος συντελεστής, στη επάνω αριστερή γωνία, είναι μηδέν, η απαλοιφή του u από τις υπόλοιπες εξισώσεις είναι αδύνατη. Το ίδιο ισχύει σε κάθε ενδιάμεσο στάδιο. Επισημαίνουμε ότι ένα μηδενικό μπορεί να εμφανιστεί σε θέση οδηγού ακόμα και αν ο αρχικός συντελεστής στη συγκεκριμένη θέση δεν ήταν μηδέν. Σε γενικές γραμμές, ***δεν γνωρίζουμε αν θα εμφανιστεί κάποιο μηδενικό πριν κάνουμε τις πράξεις***, εκτελώντας τη διαδικασία της απαλοιφής.

Σε πολλές περιπτώσεις, το πρόβλημα μπορεί να θεραπευτεί και η απαλοιφή μπορεί να προχωρήσει. Ένα τέτοιο σύστημα θεωρείται μη ιδιόμορφο· αυτό που πρέπει να διορθωθεί είναι μόνο ο αλγόριθμος. Σε άλλες περιπτώσεις, η αποτυχία είναι αναπόφευκτη. Τα συστήματα αυτά, όπου το πρόβλημα δεν μπορεί να θεραπευτεί, είναι ιδιόμορφα, δεν έχουν καμία λύση ή έχουν άπειρες λύσεις, και δεν μπορεί να βρεθεί πλήρες σύνολο οδηγών.

Παράδειγμα 1 Μη ιδιόμορφο σύστημα (θεραπεία με αντιμετάθεση των εξισώσεων 2 και 3)

$$\begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 2u + 2v + 5w &= \_\_ \\ 4u + 6v + 8w &= \_\_ \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 3w &= \_\_ \\ 2v + 4w &= \_\_ \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 2v + 4w &= \_\_ \\ 3w &= \_\_ \end{aligned}$$

Το σύστημα είναι πλέον τριγωνικό και λύνεται με ανάδρομη αντικατάσταση.

Παράδειγμα 2 Ιδιόμορφο σύστημα (μη θεραπεύσιμο)

$$\begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 2u + 2v + 5w &= \_\_ \\ 4u + 4v + 8w &= \_\_ \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} u + v + w &= \_\_ \\ 3w &= \_\_ \\ 4w &= \_\_ \end{aligned}$$

Όποια αντιμετάθεση εξισώσεων και να κάνουμε, δεν μπορούμε να αποφύγουμε την εμφάνιση του μηδενός στη δεύτερη θέση οδηγού. Οι εξισώσεις μπορεί να έχουν ή να μην έχουν λύση. Αν οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι $3w = 6$ και $4w = 7$, δεν υπάρχει λύση. Αν τύχει οι δύο αυτές εξισώσεις να είναι συμβιβαστές —όπως στην περίπτωση των $3w = 6$ και $4w = 8$— το ιδιόμορφο αυτό σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Γνωρίζουμε ότι $w = 2$, αλλά η πρώτη εξίσωση δεν μπορεί να καθορίσει και το u και το v.

Στην Ενότητα 1.5 θα μελετήσουμε τις αντιμεταθέσεις γραμμών σε μη ιδιόμορφα συστήματα. Μέσω των αντιμεταθέσεων αυτών παίρνουμε ένα πλήρες σύνολο οδηγών. Στο Κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με την ιδιόμορφη περίπτωση και θα δούμε πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κάπως την απαλοιφή. Θα δούμε ότι το $3w$ μπορεί να απαλείψει το $4w$ και θα καλέσουμε το 3 δεύτερο οδηγό. (Δεν θα υπάρξει τρίτος οδηγός.) Προς το παρόν θα θεωρήσουμε ότι και οι n οδηγοί είναι μη μηδενικοί, χωρίς να χρειάζεται αλλαγή της σειράς των εξισώσεων. Αυτή είναι η καλύτερη περίπτωση, με την οποία θα συνεχίσουμε.

Το κόστος της απαλοιφής

Το επόμενό μας ερώτημα είναι εντελώς πρακτικό. *Πόσες αριθμητικές πράξεις απαιτεί η απαλοιφή, για n εξισώσεις με n αγνώστους;* Αν το n είναι μεγάλο, την απαλοιφή δεν θα την εκτελέσουμε εμείς αλλά κάποιος υπολογιστής. Αφού όλα τα βήματα είναι γνωστά, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προβλέψουμε το πλήθος των πράξεων.

Προς το παρόν θα αγνοήσουμε τα δεξιά μέλη των εξισώσεων και θα μετρήσουμε τις πράξεις μόνο στα αριστερά μέλη. Οι πράξεις αυτές είναι δύο ειδών. Διαιρούμε με τον οδηγό για να βρούμε ποιο πολλαπλάσιο (έστω ℓ) της εξίσωσης οδηγού πρέπει να αφαιρέσουμε. Όταν κάνουμε αυτή την αφαίρεση, συναντάμε διαρκώς έναν συνδυασμό «πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης»· οι όροι της εξίσωσης οδηγού πολλαπλασιάζονται με ℓ και κατόπιν αφαιρούνται από κάποια άλλη εξίσωση.

Ας υποθέσουμε ότι θεωρούμε κάθε διαίρεση και κάθε πολλαπλασιασμό–αφαίρεση ως μία πράξη. Στη στήλη 1, *χρειαζόμαστε n πράξεις για κάθε μηδέν που επιτυγχάνουμε* —μία για να βρούμε το πολλαπλάσιο ℓ, και τις υπόλοιπες για να βρούμε τα νέα στοιχεία που θα περιέχει η γραμμή. Υπάρχουν $n-1$ γραμμές κάτω από την πρώτη, άρα το πρώτο στάδιο της απαλοιφής απαιτεί $n(n-1) = n^2 - n$ πράξεις. (Μια άλλη προσέγγιση για το $n^2 - n$ είναι η εξής: *Πρέπει να αλλάξουμε και τα* n^2 *στοιχεία, εκτός των* n *της πρώτης γραμμής*.) Καθώς προχωράμε τα στάδια γίνονται ταχύτερα διότι οι εξισώσεις είναι μικρότερες.

Όταν έχουν απομείνει k εξισώσεις για την απαλοιφή, χρειαζόμαστε μόνο $k^2 - k$ πράξεις για να μηδενίσουμε τη στήλη που βρίσκεται κάτω από τον οδηγό —με βάση τον ίδιο συλλογισμό που χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο στάδιο, όταν το k ήταν ίσο με n. Τελικά, το συνολικό πλήθος των πράξεων είναι το άθροισμα των $k^2 - k$ για όλες τις τιμές του k από 1 έως n:

$$\textbf{Αριστερό μέλος} \qquad (1^2 + \cdots + n^2) - (1 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3 - n}{3}.$$

Χρησιμοποιήσαμε τους γνωστούς τύπους για το άθροισμα των n πρώτων αριθμών και των n πρώτων τετραγώνων. Αντικαθιστώντας $n = 1$, $n = 2$ και $n = 100$ στον τύπο $\frac{1}{3}(n^3 - n)$, διαπιστώνουμε ότι η ορθόδρομη απαλοιφή μπορεί να χρειαστεί κανένα βήμα, δύο βήματα ή περίπου ένα τρίτο του εκατομμυρίου βήματα:

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο, ***μια καλή εκτίμηση του πλήθους των πράξεων είναι*** $\boldsymbol{\frac{1}{3}n^3}$.

Αν διπλασιαστεί το μέγεθος, και λίγοι από τους συντελεστές είναι μηδέν, το κόστος οκταπλασιάζεται.

Η ανάδρομη αντικατάσταση είναι πολύ ταχύτερη. Ο τελευταίος άγνωστος προκύπτει με μόνο μία πράξη (με διαίρεση με τον τελευταίο οδηγό). Για τον προτελευταίο άγνωστο απαιτούνται δύο πράξεις κ.ο.κ., άρα το συνολικό πλήθος πράξεων της ανάδρομης αντικατάστασης είναι $1 + 2 + \cdots + n$.

Η ορθόδρομη απαλοιφή ενεργεί και στο δεξί μέλος (αφαιρώντας τα ίδια πολλαπλάσια όπως στο αριστερό μέλος ώστε να διατηρηθεί η ορθότητα των εξισώσεων), ξεκινώντας με $n - 1$ αφαιρέσεις της πρώτης εξίσωσης. Συνολικά, ***το δεξί μέλος είναι υπεύθυνο για*** $\boldsymbol{n^2}$ ***πράξεις*** —πολύ λιγότερες από τις $n^3/3$ του αριστερού μέλους. Το σύνολο για την ορθόδρομη απαλοιφή και την ανάδρομη αντικατάσταση είναι

$$\textbf{Δεξί μέλος} \qquad [(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] + [1 + 2 + \cdots + n] = n^2.$$

Πριν από τριάντα χρόνια, σχεδόν όλοι οι μαθηματικοί θα πίστευαν ότι ένα γενικό σύστημα μεγέθους n δεν μπορεί να λυθεί με πολύ λιγότερους από $n^3/3$ πολλαπλασιασμούς. (Υπήρχαν μέχρι και θεωρήματα που το αποδείκνυαν, τα οποία όμως δεν λάμβαναν υπόψη όλες τις δυνατές μεθόδους.) Όλως παραδόξως, αυτό αποδείχθηκε λάθος. *Σήμερα υπάρχει μια μέθοδος που απαιτεί μόνο* $Cn^{\log_2 7}$ *πολλαπλασιασμούς*! Στηρίζεται σε ένα απλό γεγονός: Δύο συνδυασμοί δύο διανυσμάτων στον διδιάστατο χώρο φαίνεται να απαιτούν 8 πολλαπλασιασμούς, αλλά μπορούν να γίνουν με 7. Αυτό έριξε τον εκθέτη από το $\log_2 8$, το οποίο ισούται με 3, στο $\log_2 7 \approx 2{,}8$. Η συγκεκριμένη ανακάλυψη προκάλεσε μια απίστευτη κινητικότητα για την εύρεση της μικρότερης δυνατής δύναμης του n. Τελικά, ο εκθέτης έπεσε (στην IBM) κάτω από το 2,376. Ευτυχώς για την απαλοιφή, η σταθερά C είναι τόσο μεγάλη και ο προγραμματισμός της μεθόδου τόσο περίπλοκος που η νέα μέθοδος έχει κυρίως (ή αποκλειστικά) θεωρητικά αξία. Το νεότερο πρόβλημα είναι το κόστος όταν χρησιμοποιούνται *πολλοί παράλληλοι επεξεργαστές*.

Προβλήματα 1.3

Τα προβλήματα 1–9 αφορούν την απαλοιφή σε 2 επί 2 συστήματα.

1. Ποιο πολλαπλάσιο ℓ της εξίσωσης 1 πρέπει να αφαιρεθεί από την εξίσωση 2;

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 10x + 9y &= 11. \end{aligned}$$

Γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα που προκύπτει μετά από αυτό το βήμα απαλοιφής και κυκλώστε τους δύο οδηγούς. Οι αριθμοί 1 και 11 δεν επηρεάζουν αυτούς τους οδηγούς.

2. Λύστε το τριγωνικό σύστημα του Προβλήματος 1 με ανάδρομη αντικατάσταση, υπολογίζοντας πρώτα το y και μετά το x. Επαληθεύστε ότι x επί $(2, 10)$ συν y επί $(3, 9)$ ίσον $(1, 11)$. Ποια θα είναι η νέα λύση αν το δεξί μέλος γίνει $(4, 44)$;

3. Ποιο πολλαπλάσιο της εξίσωσης 2 πρέπει να *αφαιρεθεί* από την εξίσωση 3;

$$\begin{aligned} 2x - 4y &= 6 \\ -x + 5y &= 0. \end{aligned}$$

Λύστε το τριγωνικό σύστημα που προκύπτει μετά από αυτό το βήμα απαλοιφής. Ποια θα είναι η λύση αν το δεξί μέλος γίνει $(-6, 0)$;

4. Ποιο πολλαπλάσιο ℓ της εξίσωσης 1 πρέπει να αφαιρεθεί από την εξίσωση 2;

$$\begin{aligned} ax + by &= f \\ cx + dy &= g. \end{aligned}$$

Ο πρώτος οδηγός είναι το a (θεωρούμε ότι δεν είναι μηδέν). Ποιον τύπο μάς δίνει η απαλοιφή για τον δεύτερο οδηγό; Ποιο είναι το y; Δεν υπάρχει δεύτερος οδηγός όταν $ad = bc$.

5. Επιλέξτε ένα δεξί μέλος για το οποίο να μην υπάρχει λύση και ένα δεξί μέλος για το οποίο να υπάρχουν άπειρες λύσεις. Αναφέρετε δύο από αυτές τις λύσεις.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 10 \\ 6x + 4y &= \underline{\quad}. \end{aligned}$$

6. Επιλέξτε έναν συντελεστή b που να κάνει το παρακάτω σύστημα ιδιόμορφο. Κατόπιν, επιλέξτε ένα δεξί μέλος g που να κάνει το σύστημα να έχει λύση. Βρείτε δύο λύσεις αυτού της ιδιόμορφου συστήματος.

$$\begin{aligned} 2x + by &= 16 \\ 4x + 8y &= g. \end{aligned}$$

7. Για ποιους αριθμούς a αποτυγχάνει η απαλοιφή (α) οριστικά και (β) προσωρινά;

$$\begin{aligned} ax + 3y &= -3 \\ 4x + 6y &= 6. \end{aligned}$$

Λύστε ως προς x και y αφού υπερβείτε τη δεύτερη αποτυχία μέσω μιας αντιμετάθεσης γραμμών.

8. Βρείτε τους τρεις αριθμούς k για τους οποίους αποτυγχάνει η απαλοιφή. Ποια περίπτωση μπορεί να αντιμετωπιστεί με αντιμετάθεση γραμμών; Ποιο είναι το πλήθος των λύσεων σε κάθε περίπτωση: 0, 1 ή ∞;

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 6 \\ 3x + ky &= -6. \end{aligned}$$

9. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b_1 και b_2 ώστε οι δύο παρακάτω εξισώσεις να έχουν λύση; Πόσες λύσεις θα έχουν; Σχεδιάστε την εικόνα στηλών.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= b_1 \\ 6x - 4y &= b_2. \end{aligned}$$

Στα προβλήματα 10–19 μελετάται η απαλοιφή σε 3 επί 3 συστήματα (και η ενδεχόμενη αποτυχία της).

10. Αναγάγετε το παρακάτω σύστημα σε άνω τριγωνική μορφή με δύο γραμμοπράξεις:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8 \\ 4x + 7y + 5z &= 20 \\ - 2y + 2z &= 0. \end{aligned}$$

Κυκλώστε τους οδηγούς. Χρησιμοποιώντας ανάδρομη αντικατάσταση, λύστε ως προς z, y, x.

11. Εφαρμόζοντας απαλοιφή (κυκλώστε τους οδηγούς) και ανάδρομη αντικατάσταση, λύστε το

$$\begin{aligned} 2x - 3y \phantom{{}+3z} &= 3 \\ 4x - 5y + z &= 7 \\ 2x - y - 3z &= 5. \end{aligned}$$

Αναφέρετε τις τρεις γραμμοπράξεις: Αφαιρούμε ___ επί τη γραμμή ___ από τη γραμμή ___.

12. Για ποιον αριθμό d απαιτείται αντιμετάθεση γραμμών και ποιο είναι το τριγωνικό (μη ιδιόμορφο) σύστημα για το συγκεκριμένο d; Για ποιο d γίνεται ιδιόμορφο το σύστημα (ανυπαρξία τρίτου οδηγού);

$$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= 0 \\ 4x + dy + z &= 2 \\ y - z &= 3. \end{aligned}$$

13. Ποιος αριθμός b οδηγεί αργότερα σε αντιμετάθεση γραμμών; Ποιο b οδηγεί σε απουσία οδηγού; Βρείτε μια μη μηδενική λύση x, y, z για αυτή την ιδιόμορφη περίπτωση.

$$\begin{aligned} x + by \phantom{{}-z} &= 0 \\ x - 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0. \end{aligned}$$

14. (α) Κατασκευάστε ένα 3 επί 3 σύστημα για το οποίο να απαιτούνται δύο αντιμεταθέσεις γραμμών ώστε να καταλήξει σε τριγωνική μορφή και να έχει λύση.
(β) Κατασκευάστε ένα 3 επί 3 σύστημα για το οποίο να απαιτείται μια αντιμετάθεση γραμμών ώστε να μπορέσει να προχωρήσει η διαδικασία, αλλά στη συνέχεια να αποτυγχάνει.

15. Αν οι γραμμές 1 και 2 είναι ίδιες, πόσο μπορεί να προχωρήσει η απαλοιφή (αν επιτρέπονται αντιμεταθέσεις γραμμών); Αν οι στήλες 1 και 2 είναι ίδιες, ποιος οδηγός δεν υπάρχει;

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 4x + y + z &= 2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x + 2y + z &= 0 \\ 4x + 4y + z &= 0 \\ 6x + 6y + z &= 2. \end{aligned}$$

16. Κατασκευάστε ένα 3 επί 3 σύστημα που να έχει 9 διαφορετικούς συντελεστές στο αριστερό μέλος, αλλά οι γραμμές 2 και 3 να μηδενίζονται κατά την απαλοιφή. Πόσες λύσεις έχει το σύστημά σας για $b = (1, 10, 100)$ και πόσες για $b = (0, 0, 0)$;

17. Για ποιον αριθμό q είναι το παρακάτω σύστημα ιδιόμορφο και για ποιο δεξί μέλος t έχει άπειρες λύσεις; Βρείτε τη λύση που έχει $z = 1$.

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 1 \\ x + 7y - 6z &= 6 \\ 3y + qz &= t. \end{aligned}$$

18. (Προτεινόμενο) Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο να έχει ακριβώς δύο λύσεις. *Εξηγήστε γιατί.*
(α) Αν (x, y, z) και (X, Y, Z) είναι δύο λύσεις, ποιο άλλο σημείο είναι λύση;
(β) Αν 25 επίπεδα τέμνονται σε δύο σημεία, πού αλλού τέμνονται;

19. Τρία επίπεδα μπορεί να μην έχουν σημείο τομής, αν κανένα ζεύγος επιπέδων δεν είναι παράλληλα. Το σύστημα είναι ιδιόμορφο αν η γραμμή 3 του A είναι ______ των δύο πρώτων γραμμών. Βρείτε μια τρίτη εξίσωση που να μην μπορεί να λυθεί αν $x+y+z = 0$ και $x - 2y - z = 1$.

Τα προβλήματα 20–22 αφορούν μεγαλύτερα, 4 επί 4 και n επί n συστήματα.

20. Βρείτε τους οδηγούς και τη λύση των παρακάτω τεσσάρων εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x + y \qquad\qquad &= 0 \\ x + 2y + z \qquad &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ z + 2t &= 5. \end{aligned}$$

21. Αν επεκτείνετε το Πρόβλημα 20 ακολουθώντας το σχήμα $1, 2, 1$ ή $-1, 2, -1$, ποιος θα είναι ο πέμπτος οδηγός; Ποιος θα είναι ο n-οστός οδηγός;

22. Λύστε το

$$\begin{aligned} 2u + 3v \qquad &= 0 \\ 4u + 5v + \ \ w &= 3 \\ 2u - \ \ v - 3w &= 5 \end{aligned}$$

εφαρμόζοντας απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση. Ποιοι είναι οι οδηγοί; Αναφέρετε τις τρεις πράξεις όπου ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής αφαιρείται από κάποια άλλη.

23. Ποιο τριγωνικό σύστημα προκύπτει αν εφαρμόσουμε ορθόδρομη απαλοιφή στο παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} u + \ \ v + \ \ w &= 2 \\ u + 3v + 3w &= 0 \\ u + 3v + 5w &= 2; \end{aligned}$$

Ποια είναι η λύση;

24. Λύστε το σύστημα

$$\begin{aligned} 2u - \ \ v \qquad\qquad &= 0 \\ -u + 2v - \ \ w \qquad &= 0 \\ - \ \ v + 2w - \ \ z &= 0 \\ - \ \ w + 2z &= 5 \end{aligned}$$

και βρείτε τους οδηγούς. Μπορείτε να προσαρτήσετε το δεξί μέλος ως πέμπτη στήλη (και να παραλείπετε τα u, v, w, z μέχρι να βρείτε τη λύση).

25. Εφαρμόστε απαλοιφή στο σύστημα

$$\begin{aligned} u + \ \ v + w &= -2 \\ 3u + 3v - w &= \ \ \ 6 \\ u - \ \ v + w &= -1. \end{aligned}$$

Όταν εμφανιστεί μηδενικό σε θέση οδηγού, αντιμεταθέστε την εξίσωση με την ακριβώς από κάτω της και προχωρήστε. Ποιον συντελεστή θα έπρεπε να έχει το v στην τρίτη εξίσωση, στη θέση του -1, ώστε να είναι αδύνατο να προχωρήσετε —και η απαλοιφή να αποτύχει;

26. Εφαρμόζοντας απαλοιφή, λύστε το εξής σύστημα δύο εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x - \ \ y &= \ \ 0 \\ 3x + 6y &= 18. \end{aligned}$$

Σχεδιάστε ένα γράφημα όπου κάθε εξίσωση να αναπαριστάται ως ευθεία του επιπέδου x-y· οι ευθείες τέμνονται στη λύση. Προσθέστε και μια ακόμη ευθεία —το γράφημα της νέας δεύτερης εξίσωσης που προκύπτει μετά την απαλοιφή.

27. Βρείτε τρεις τιμές του a στο παρακάτω σύστημα για τις οποίες η απαλοιφή να αποτυγχάνει προσωρινά ή οριστικά:

$$\begin{aligned} au + \ \ v &= 1 \\ 4u + av &= 2. \end{aligned}$$

Η αποτυχία στο πρώτο βήμα μπορεί να αντιμετωπιστεί με αντιμετάθεση γραμμών —όχι όμως και η αποτυχία στο τελευταίο βήμα.

28. Σωστό ή λάθος:

(α) Αν η τρίτη εξίσωση ξεκινάει με μηδενικό συντελεστή (ξεκινάει με $0u$) τότε κανένα πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 δεν θα αφαιρεθεί από την εξίσωση 3.

(β) Αν ο δεύτερος συντελεστής της τρίτης εξίσωσης είναι μηδέν (περιέχει το $0v$), τότε κανένα πολλαπλάσιο της εξίσωσης 2 δεν θα αφαιρεθεί από την εξίσωση 3.

(γ) Αν η τρίτη εξίσωση περιέχει τα $0u$ *και* $0v$, τότε κανένα πολλαπλάσιο της εξίσωσης 1 ή της εξίσωσης 2 δεν θα αφαιρεθεί από την εξίσωση 3.

29. (Εντελώς προαιρετικό) Κανονικά, ο πολλαπλασιασμός δύο μιγαδικών αριθμών

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd) + i(bc+ad)$$

απαιτεί τους εξής τέσσερις πολλαπλασιασμούς: ac, bd, bc, ad. Αγνοώντας το i, μπορείτε να υπολογίσετε τα $ac-bd$ και $bc+ad$ με μόνο τρεις πολλαπλασιασμούς; (Μπορείτε να κάνετε προσθέσεις, όπως να σχηματίσετε το $a+b$ πριν κάνετε τον πολλαπλασιασμό, χωρίς ποινή.)

30. Χρησιμοποιώντας απαλοιφή, λύστε τα

$$\begin{aligned} u + v + w &= 6 \\ u + 2v + 2w &= 11 \\ 2u + 3v - 4w &= 3 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 7 \\ u + 2v + 2w &= 10 \\ 2u + 3v - 4w &= 3. \end{aligned}$$

31. Για ποιους τρεις αριθμούς a θα αποτύχει να παραγάγει τρεις οδηγούς η απαλοιφή;

$$\begin{aligned} ax + 2y + 3z &= b_1 \\ ax + ay + 4z &= b_2 \\ ax + ay + az &= b_3. \end{aligned}$$

32. Βρείτε πειραματικά τη μέση τιμή (κατά απόλυτη τιμή) του πρώτου, του δεύτερου και του τρίτου οδηγού του αποτελέσματος της εντολής $\mathsf{lu}(\mathsf{rand}(3,3))$ της MATLAB. Η μέση τιμή του πρώτου οδηγού του αποτελέσματος της $\mathsf{abs}(A(1,1))$ θα πρέπει να είναι 0,5.

1.4 ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Στο 3 επί 3 παράδειγμά μας, μπορέσαμε να γράψουμε αναλυτικά όλες τις εξισώσεις. Μπορέσαμε να γράψουμε ένα ένα τα βήματα της απαλοιφής, κατά τα οποία αφαιρούσαμε κάποιο πολλαπλάσιο μιας εξίσωσης από κάποια άλλη μέχρι να καταλήξουμε σε έναν τριγωνικό πίνακα. Για ένα μεγάλο σύστημα, ένας τέτοιος τρόπος καταγραφής της διαδικασίας απαλοιφής θα ήταν καταδικασμένος· χρειαζόμαστε έναν πολύ συνοπτικότερο τρόπο γραφής.

Σε αυτό το σημείο θα εισαγάγουμε τον **συμβολισμό πινάκων** για να περιγράφουμε το αρχικό σύστημα και τον **πολλαπλασιασμό πινάκων** για να περιγράφουμε τις πράξεις με τις οποίες απλοποιείται. Προσέξτε ότι στο παράδειγμά μας εμφανίζονται τρία διαφορετικά είδη ποσοτήτων:

$$\begin{array}{ll} \textbf{Εννέα συντελεστές} & 2u + v + w = 5 \\ \textbf{Τρεις άγνωστοι} & 4u - 6v = -2 \\ \textbf{Τρία δεξιά μέλη} & -2u + 7v + 2w = 9 \end{array} \tag{1}$$

Στο δεξί μέλος έχουμε το διάνυσμα στήλη b. Στο αριστερό μέλος έχουμε τους αγνώστους u, v, w, καθώς και τους εννέα συντελεστές (ένας εκ των οποίων τυχαίνει να είναι μηδέν). Είναι φυσικό να αναπαραστήσουμε τους τρεις αγνώστους με ένα διάνυσμα:

$$\text{Ο άγνωστος είναι το } x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \qquad \text{Η λύση είναι το } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Οι εννέα συντελεστές τοποθετούνται σε τρεις γραμμές και τρεις στήλες, με αποτέλεσμα έναν ***3 επί 3 πίνακα***:

$$\textbf{Πίνακας συντελεστών} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο A είναι *τετραγωνικός* πίνακας, διότι το πλήθος των εξισώσεων ισούται με το πλήθος των αγνώστων. Αν έχουμε n εξισώσεις με n αγνώστους, έχουμε έναν τετραγωνικό πίνακα n επί n. Γενικότερα, μπορεί να έχουμε m εξισώσεις και n αγνώστους. Σε αυτή την περίπτωση ο A είναι *παραλληλόγραμμος*, με m γραμμές και n στήλες. Θα είναι ένας «m επί n πίνακας».

Μπορούμε να αθροίζουμε πίνακες και να τους πολλαπλασιάζουμε με αριθμητικές σταθερές, ακριβώς όπως τα διανύσματα —στοιχείο προς στοιχείο. Μάλιστα, μπορούμε να θεωρήσουμε τα διανύσματα σαν ειδικές περιπτώσεις πινάκων· *είναι πίνακες με μόνο μία στήλη*. Όπως στην περίπτωση των διανυσμάτων, μπορούμε να αθροίσουμε δύο πίνακες μόνο αν έχουν το ίδιο σχήμα:

$$\begin{array}{l} \textbf{Πρόσθεση } \boldsymbol{A+B} \\ \textbf{Πολλαπλασιασμός } \boldsymbol{2A} \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Θέλουμε να γράψουμε τις τρεις εξισώσεις με τους τρεις αγνώστους u, v, w στην απλοποιημένη μορφή πινάκων $Ax = b$. Αν το γράψουμε αναλυτικά, μας λέει ότι πίνακας επί διάνυσμα ισούται με διάνυσμα:

$$\textbf{Μορφή πινάκων} \boldsymbol{Ax = b} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Το δεξί μέλος b είναι το διάνυσμα στήλη των «μη ομογενών όρων». **Το αριστερό μέλος είναι $\boldsymbol{A}$ επί $\boldsymbol{x}$**. Θα ορίσουμε αυτόν τον πολλαπλασιασμό *έτσι ώστε να αναπαράγει το αρχικό σύστημα*. Η πρώτη συνιστώσα του Ax προκύπτει «με πολλαπλασιασμό» της πρώτης γραμμής του A με το διάνυσμα στήλη x:

$$\textbf{Γραμμή επί στήλη} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + v + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Η δεύτερη συνιστώσα του γινομένου Ax είναι $4u - 6v + 0w$ και προκύπτει από τη δεύτερη γραμμή του A. Η εξίσωση πινάκων $Ax = b$ είναι ισοδύναμη με το σύστημα τριών εξισώσεων της εξίσωσης (1).

Η πράξη ***γραμμή επί στήλη*** είναι θεμελιώδης για τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Από δύο διανύσματα παράγει έναν αριθμό, ο οποίος καλείται ***εσωτερικό γινόμενο*** των δύο διανυσμάτων. Με άλλα λόγια, το γινόμενο ενός 1 επί n πίνακα (ενός *διανύσματος γραμμής*) με έναν n επί 1 πίνακα (ενός *διανύσματος στήλης*) είναι ένας 1 επί 1 πίνακας:

$$\textbf{Εσωτερικό γινόμενο} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}.$$

Αυτό επιβεβαιώνει ότι η προτεινόμενη λύση $x = (1, 1, 2)$ ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση.

Υπάρχουν δύο τρόποι να πολλαπλασιάσουμε έναν πίνακα A με ένα διάνυσμα x. Ο ένας τρόπος είναι *γραμμή προς γραμμή*. Κάθε γραμμή του A συνδυάζεται με το x και παράγει μια συνιστώσα του Ax. Αν ο A έχει τρεις γραμμές, υπάρχουν τρία εσωτερικά γινόμενα:

$$\boldsymbol{Ax}\ \textbf{επί γραμμές} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 6 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Αυτός είναι ο τρόπος με τον οποίο εξηγείται συνήθως ο πολλαπλασιασμός Ax, αλλά ο δεύτερος τρόπος είναι εξίσου σημαντικός. Μάλιστα είναι πιο σημαντικός! Ο πολλαπλασιασμός εκτελείται *στήλη προς στήλη*. Το γινόμενο Ax υπολογίζεται απευθείας, σαν ***συνδυασμός των τριών στηλών του A***:

$$\boldsymbol{Ax}\ \textbf{επί στήλες} \qquad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Η απάντηση είναι δύο επί τη στήλη 1 συν 5 επί τη στήλη 2. Αντιστοιχεί στην «εικόνα στηλών» των γραμμικών εξισώσεων. Αν το δεξί μέλος b είχε συνιστώσες 7, 6, 7, τότε η λύση θα είχε συνιστώσες 2, 5, 0. Ασφαλώς, η εικόνα γραμμών συμφωνεί με αυτό (και τελικά πρέπει να κάνουμε τους ίδιους πολλαπλασιασμούς).

Θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του πολλαπλασιασμού στήλη προς στήλη πολλές φορές, για αυτό τον επαναλαμβάνουμε:

1A Το γινόμενο Ax μπορεί να υπολογιστεί με χρήση ολόκληρων των στηλών όπως στην εξίσωση (5). Συνεπώς, το Ax είναι ***ένας συνδυασμός των στηλών του A***. Οι συντελεστές είναι οι συνιστώσες του x.

Για να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό A επί x στις n διαστάσεις, χρειαζόμαστε έναν συμβολισμό για κάθε στοιχείο του A. *Το στοιχείο που βρίσκεται στην i-οστή γραμμή και στην j-οστή στήλη συμβολίζεται πάντα με a_{ij}.* Ο πρώτος δείκτης φανερώνει τον αριθμό της γραμμής και ο δεύτερος τη στήλη. (Στην εξίσωση (4), το a_{21} είναι 3 και το a_{13} είναι 6.) Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, τότε ο δείκτης i παίρνει τιμές από 1 έως m —υπάρχουν m γραμμές— και ο δείκτης j παίρνει τιμές από 1 έως n. Συνολικά, ο πίνακας έχει mn στοιχεία και το a_{mn} είναι το στοιχείο στην κάτω δεξιά γωνία.

Για τα διανύσματα αρκεί ένας δείκτης. Η j-οστή συνιστώσα του x συμβολίζεται με x_j. (Στον παραπάνω πολλαπλασιασμό είχαμε $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$.) Συνήθως, το x γράφεται σαν διάνυσμα στήλη —σαν ένας n επί 1 πίνακας. Ωστόσο, μερικές φορές γράφεται σε μία γραμμή ως εξής: $x = (2, 5, 0)$. Οι παρενθέσεις και τα κόμματα φανερώνουν ότι δεν πρόκειται για έναν 1 επί 3 πίνακα. Είναι ένα διάνυσμα στήλη, το οποίο προσωρινά γράφεται οριζόντια.

Για να περιγράψουμε το γινόμενο Ax, χρησιμοποιούμε το σύμβολο Σ της άθροισης:

Σίγμα συμβολισμός Η i-οστή συνιστώσα του Ax είναι $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.

Το άθροισμα διατρέχει την i-οστή γραμμή του A. Ο δείκτης στήλης j παίρνει όλες τις τιμές από 1 έως n, και προσθέτουμε τα αποτελέσματα —το άθροισμα είναι $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$.

Βλέπουμε πάλι ότι το μήκος των γραμμών (το πλήθος των στηλών του A) πρέπει να συμφωνεί με το μήκος του x. **Ένας m επί n πίνακας πολλαπλασιάζει ένα n-διάστατο διάνυσμα** (και παράγει ένα m-διάστατο διάνυσμα). Ο σίγμα συμβολισμός είναι απλούστερος δίνοντάς μας τη δυνατότητα να μην γράφουμε αναλυτικά τα πάντα, αλλά ο συμβολισμός πινάκων είναι καλύτερος. (Ο Αϊνστάιν χρησιμοποίησε τον «τανυστικό συμβολισμό», όπου ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης σημαίνει αυτομάτως άθροιση. Έγραφε $a_{ij}x_j$ ή ακόμη και $a_i^j x_j$, χωρίς το Σ. Ωστόσο, αφού δεν είμαστε ο Αϊνστάιν, κρατάμε το Σ.)

Μορφή πινάκων ενός βήματος της απαλοιφής

Μέχρι στιγμής διαθέτουμε τη βολική συντομογραφία $Ax = b$ για το αρχικό σύστημα εξισώσεων. Πώς όμως μπορούμε να γράψουμε τις πράξεις που εκτελούνται κατά τη διάρκεια της απαλοιφής; Στο παράδειγμά μας, στο πρώτο βήμα αφαιρέσαμε 2 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη. Στο δεξί μέλος, το 2 επί την πρώτη συνιστώσα του b αφαιρέθηκε από τη δεύτερη συνιστώσα. *Επιτυγχάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν πολλαπλασιάσουμε το b με τον εξής στοιχειώδη πίνακα* (ή *πίνακα απαλοιφής*):

$$\textbf{Πίνακας απαλοιφής} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτό επαληθεύεται με εφαρμογή του κανόνα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα:

$$Eb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \mathbf{-12} \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Οι συνιστώσες 5 και 9 παραμένουν ίδιες (λόγω των $1, 0, 0$ και $0, 0, 1$ στις γραμμές του E). Η νέα δεύτερη συνιστώσα -12 εμφανίστηκε μετά το πρώτο βήμα της απαλοιφής.

Οι πίνακες σαν τον E, μέσω των οποίων εκτελούνται τα επιμέρους βήματα της απαλοιφής, περιγράφονται εύκολα. Αναφέρουμε επίσης τον «ταυτοτικό πίνακα», ο οποίος δεν κάνει απολύτως τίποτα.

1B Ο ***ταυτοτικός πίνακας*** $\boldsymbol{I}$, ο οποίος έχει 1 στη διαγώνιο και 0 παντού αλλού, αφήνει αμετάβλητα όλα τα διανύσματα. Ο ***στοιχειώδης πίνακας*** $\boldsymbol{E_{ij}}$ που αφαιρεί ℓ επί τη γραμμή j από τη γραμμή i περιέχει το $-\ell$ στη γραμμή i, στήλη j.

$$\text{Για τον } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } Ib = b$$

$$\text{Για τον } E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\ell & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ έχουμε } E_{31}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - \ell b_1 \end{bmatrix}.$$

Η $Ib = b$ είναι το ανάλογο για πίνακες του πολλαπλασιασμού με το 1. Ένα τυπικό βήμα της απαλοιφής εκτελεί έναν πολλαπλασιασμό με τον E_{31}. Το σημαντικό ερώτημα είναι το εξής: Τι συμβαίνει με τον A στο αριστερό μέλος;

Για να διατηρήσουμε την ισότητα, πρέπει να εφαρμόσουμε την ίδια πράξη και στα δύο μέλη της $Ax = b$. Με άλλα λόγια, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα E και το διάνυσμα Ax. Ο αρχικός μας πίνακας E αφαιρεί 2 επί την πρώτη συνιστώσα από τη δεύτερη. Μετά από αυτό το βήμα, το νέο και απλούστερο σύστημα (που είναι ισοδύναμο με το παλιό) είναι το $E(Ax) = Eb$. Είναι απλούστερο λόγω του μηδενικού που δημιουργήθηκε κάτω από τον πρώτο οδηγό. Είναι ισοδύναμο διότι μπορούμε να επανέλθουμε στο αρχικό σύστημα (προσθέτοντας 2 επί την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη). Άρα τα δύο συστήματα έχουν ακριβώς την ίδια λύση x.

Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ερχόμαστε τώρα στο σημαντικότερο ερώτημα: *Πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πίνακες*; Η απαλοιφή Gauss μας βοηθάει κάπως: Γνωρίζουμε τον αρχικό πίνακα συντελεστών A, γνωρίζουμε τον πίνακα απαλοιφής E και γνωρίζουμε το αποτέλεσμα EA μετά το βήμα της απαλοιφής. Ελπίζουμε και περιμένουμε ότι

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ επί } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ δίνει } EA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Δύο επί την πρώτη γραμμή του A αφαιρέθηκε από τη δεύτερη γραμμή. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι συνεπής με τις γραμμοπράξεις της απαλοιφής. Μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα είτε ως $E(Ax) = Eb$, εφαρμόζοντας τον E και στα δύο μέλη της εξίσωσής μας, είτε ως $(EA)x = Eb$. Ο πίνακας EA κατασκευάζεται έτσι ώστε οι δύο εξισώσεις να συμφωνούν, οπότε δεν χρειαζόμαστε παρενθέσεις:

Πολλαπλασιασμός πινάκων Το (EA επί x) ισούται με (E επί Ax).
Γράφουμε απλώς EAx.

Αυτή είναι η ουσία κάθε «προσεταιριστικής ιδιότητας», όπως για παράδειγμα της $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$. Η ιδιότητα μοιάζει τόσο προφανής που είναι δύσκολο να φανταστούμε ότι μπορεί να μην ισχύει. Ωστόσο, το ίδιο θα μπορούσε να πει κανείς και για την «αντιμεταθετική ιδιότητα» $2 \times 3 = 3 \times 2$ —όμως, στην περίπτωση των πινάκων, ο EA δεν ισούται με τον AE.

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων πρέπει να ικανοποιεί κάτι ακόμη. Ξέρουμε πώς κάνουμε τον πολλαπλασιασμό Ax, πώς πολλαπλασιάζουμε έναν πίνακα με ένα διάνυσμα. Ο νέος ορισμός πρέπει να συμφωνεί με αυτό. Όταν ένας πίνακας B περιέχει μόνο μία στήλη x, το γινόμενο πίνακα επί πίνακα AB πρέπει να ταυτίζεται με το γινόμενο πίνακα επί διάνυσμα Ax. *Επιπλέον*: Όταν ο B περιέχει περισσότερες από μία στήλες b_1, b_2, b_3, οι στήλες του AB θα πρέπει να είναι Ab_1, Ab_2, Ab_3!

Πολλαπλασιασμός κατά στήλες $\quad AB = A\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 \end{bmatrix}.$

Η πρώτη μας απαίτηση αφορούσε τις γραμμές· αυτή αφορά τις στήλες. Μια τρίτη προσέγγιση είναι να περιγράψουμε κάθε επιμέρους στοιχείο του AB και να ελπίσουμε για το καλύτερο. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μόνο ένας δυνατός κανόνας, και δεν είμαι βέβαιος ποιος τον ανακάλυψε. Κάνει να δουλεύουν τα πάντα. Δεν μας επιτρέπει να πολλαπλασιάζουμε οποιοδήποτε ζεύγος πινάκων. Αν είναι τετραγωνικοί, πρέπει να έχουν το ίδιο μέγεθος. Αν είναι παραλληλόγραμμοι, *δεν* πρέπει να έχουν το ίδιο σχήμα· ***το πλήθος των στηλών του A πρέπει να ισούται με το πλήθος των γραμμών του B***, ώστε ο A να μπορεί να πολλαπλασιαστεί με κάθε στήλη του B.

Αν ο A είναι m επί n και ο B είναι n επί p, τότε ο πολλαπλασιασμός είναι δυνατός. *Το γινόμενο* AB *θα είναι* m επί p. Ακολούθως βρίσκουμε το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή i και στη στήλη j του AB.

1Γ Το στοιχείο (i, j) του AB είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής του A και της j-οστής στήλης του B. Στο Σχήμα 1.7, το στοιχείο $(3, 2)$ του AB προκύπτει από τη γραμμή 3 και τη στήλη 2:

$$(AB)_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42}. \tag{6}$$

Γραμμές επί στήλες

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} & \boldsymbol{a_{34}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \boldsymbol{b_{12}} \\ b_{21} & \boldsymbol{b_{22}} \\ b_{31} & \boldsymbol{b_{32}} \\ b_{41} & \boldsymbol{b_{42}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & \boldsymbol{(AB)_{32}} \end{bmatrix}$$

Σχήμα 1.7 Το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού ενός 3 επί 4 πίνακα A με έναν 4 επί 2 πίνακα B είναι ένας 3 επί 2 πίνακας AB.

Σημείωση Γράφουμε AB όταν οι πίνακες δεν σχετίζονται κάπως με τη διαδικασία της απαλοιφής. Στο προηγούμενο παράδειγμά μας είχαμε EA, λόγω του στοιχειώδους πίνακα E. Αργότερα θα έχουμε PA, LU ή ακόμα και LDU. Ο κανόνας του πολλαπλασιασμού πινάκων παραμένει ο ίδιος.

Παράδειγμα 1 $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$

Το στοιχείο 17 είναι $(2)(1) + (3)(5)$, το εσωτερικό γινόμενο της πρώτης γραμμής του A με την πρώτη στήλη του B. Το στοιχείο 8 είναι $(4)(2) + (0)(-1)$ και προκύπτει από τη δεύτερη γραμμή και τη δεύτερη στήλη.

Η τρίτη στήλη του B είναι μηδέν, οπότε είναι μηδέν και στον AB. Ο B αποτελείται από τρεις στήλες, τη μία δίπλα στην άλλη, και ο A πολλαπλασιάζει κάθε στήλη ξεχωριστά. ***Κάθε στήλη του AB είναι ένας συνδυασμός των στηλών του A***. Ακριβώς όπως στον πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα, οι στήλες του A πολλαπλασιάζονται με τα στοιχεία του B.

Παράδειγμα 2 **Πίνακας αντιμετάθεσης γραμμών** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Παράδειγμα 3 Οι μονάδες του ταυτοτικού πίνακα I αφήνουν όλους τους πίνακες αμετάβλητους:

$$\textbf{Ταυτοτικός πίνακας} \qquad IA = A \qquad \text{και} \qquad BI = B.$$

Σημαντικό: Ο πολλαπλασιασμός AB μπορεί να γίνει και *γραμμή προς γραμμή*. Στο Παράδειγμα 1, στην πρώτη γραμμή του AB χρησιμοποιούνται οι αριθμοί 2 και 3 της πρώτης γραμμής του A, οι οποίοι δίνουν $2\,[\text{γραμμή } 1] + 3\,[\text{γραμμή } 2] = [17 \;\; 1 \;\; 0]$. Ακριβώς όπως στην απαλοιφή, από όπου ξεκίνησαν όλα, κάθε γραμμή του AB είναι ένας ***συνδυασμός των γραμμών του B***.

Συνοψίζουμε τους τρεις διαφορετικούς τρόπους θεώρησης του πολλαπλασιασμού πινάκων:

1Δ (i) Κάθε στοιχείο του AB είναι το γινόμενο μιας ***γραμμής*** και μιας ***στήλης***:

$$(AB)_{ij} = (\text{γραμμή } i \text{ του } A) \text{ επί } (\text{στήλη } j \text{ του } B)$$

(ii) Κάθε στήλη του AB είναι το γινόμενο ενός ***πίνακα*** και μιας ***στήλης***:

$$\text{στήλη } j \text{ του } AB = A \text{ επί } (\text{στήλη } j \text{ του } B)$$

(iii) Κάθε γραμμή του AB είναι το γινόμενο μιας ***γραμμής*** και ενός ***πίνακα***:

$$\text{γραμμή } i \text{ του } AB = (\text{γραμμή } i \text{ του } A) \text{ επί } B.$$

Αυτό μας οδηγεί σε μια βασική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού πινάκων. Ας υποθέσουμε ότι τρεις πίνακες A, B, C έχουν σχήμα (πιθανώς παραλληλόγραμμο) που επιτρέπει τον πολλαπλασιασμό τους. Οι γραμμές του A και του B πολλαπλασιάζουν τις στήλες του B και του C. Η βασική ιδιότητα είναι η εξής:

1Ε Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός: $(AB)C = A(BC)$. Γράφουμε απλά ABC.

AB επί C ισούται με A επί BC. Αν ο C τύχει να είναι απλώς ένα διάνυσμα (ένας πίνακας με μόνο μία στήλη), η σχέση αυτή είναι η απαίτηση $(EA)x = E(Ax)$ που αναφέραμε προηγουμένως. Σε αυτό στηρίζονται όλοι οι κανόνες του πολλαπλασιασμού πινάκων. Αν ο C έχει περισσότερες από μία στήλες, αρκεί να τις φανταστούμε τοποθετημένες τη μία δίπλα στην άλλη και να εφαρμόσουμε τον ίδιο κανόνα πολλές φορές. Δεν χρειαζόμαστε παρενθέσεις όταν πολλαπλασιάζουμε περισσότερους από έναν πίνακες.

Πρέπει να αναφέρουμε δύο ακόμη ιδιότητες —μία ιδιότητα που έχει ο πολλαπλασιασμός πινάκων και μία που *δεν έχει*. Η ιδιότητα που έχει είναι η εξής:

1ΣΤ Οι πινακικές πράξεις είναι επιμεριστικές:

$$A(B+C) = AB + AC \qquad \text{και} \qquad (B+C)D = BD + CD.$$

Ασφαλώς, οι πίνακες πρέπει να έχουν το κατάλληλο σχήμα —οι B και C πρέπει να έχουν το ίδιο σχήμα ώστε να μπορούν να προστεθούν, ενώ οι A και D πρέπει να έχουν το κατάλληλο μέγεθος ώστε να μπορεί να γίνει ο από αριστερά και ο από δεξιά πολλαπλασιασμός. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας είναι πολύ βαρετή.

Η ιδιότητα που δεν ισχύει έχει λίγο περισσότερο ενδιαφέρον:

1Ζ Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός: Συνήθως, $FE \neq EF$.

Παράδειγμα 4 Υποθέτουμε ότι ο E αφαιρεί δύο επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη και ότι ο F είναι ο πίνακας του επόμενου βήματος, *ο οποίος προσθέτει τη γραμμή* 1 *στη γραμμή* 3:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι δύο αυτοί πίνακες μπορούν να αντιμετατεθούν, και το γινόμενό τους εκτελεί και τα δύο βήματα ταυτόχρονα:

$$EF = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} = FE.$$

Με όποια σειρά και να γίνει ο πολλαπλασιασμός, EF ή FE, οι γραμμές 2 και 3 αλλάζουν με χρήση της γραμμής 1.

Παράδειγμα 5 Υποθέτουμε ότι ο E είναι ο ίδιος, αλλά ο G *προσθέτει τη γραμμή* 2 *στη γραμμή* 3. Σε αυτή την περίπτωση η σειρά έχει σημασία. Αν εφαρμόσουμε τον E και μετά τον G, η δεύτερη γραμμή αλλάζει *πριν* επηρεάσει την τρίτη. Αν εφαρμοστεί πρώτα ο G και *κατόπιν* ο E, τότε η τρίτη εξίσωση δεν επηρεάζεται καθόλου από την πρώτη. Όπως βλέπουμε, το στοιχείο $(3,1)$ του EG είναι μηδέν, ενώ το αντίστοιχο στοιχείο του GE είναι -2:

$$GE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{-2} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{αλλά} \quad EG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, $EG \neq GE$. Οποιοδήποτε τυχαία επιλεγμένο παράδειγμα θα έδειχνε το ίδιο πράγμα —στις περισσότερες περιπτώσεις δεν μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους πίνακες. Οι πίνακές μας έχουν συγκεκριμένη σημασία. Υπήρχε λόγος που $EF = FE$ και άλλος λόγος που

$EG \neq GE$. Αξίζει να προχωρήσουμε ένα ακόμη βήμα για να δούμε τι συμβαίνει *και με τους τρεις πίνακες απαλοιφής ταυτόχρονα*:

$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad EFG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το γινόμενο GFE αντιστοιχεί στην πραγματική σειρά της απαλοιφής. Όπως θα ξαναδούμε στην επόμενη ενότητα, *είναι ο πίνακας που μας οδηγεί από τον αρχικό A στον άνω τριγωνικό U*.

Ο άλλος πίνακας EFG είναι πιο κομψός. Με αυτή τη σειρά, ο αριθμός -2 του E και οι αριθμοί 1 των F και G δεν επηρεάστηκαν. Μεταφέρθηκαν απευθείας στο γινόμενο. Είναι η λάθος σειρά για την απαλοιφή, αλλά ευτυχώς *είναι η σωστή σειρά για την αντιστροφή των βημάτων της απαλοιφής* —με αυτό θα ασχοληθούμε επίσης στην επόμενη ενότητα.

Επισημαίνουμε ότι το γινόμενο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι και αυτό κάτω τριγωνικός πίνακας.

Προβλήματα 1.4

1. Υπολογίστε τα γινόμενα

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για το τρίτο, σχεδιάστε τα διανύσματα στήλες $(2,1)$ και $(0,3)$. Ο πολλαπλασιασμός με το $(1,1)$ απλώς προσθέτει τα διανύσματα (δείξτε το με ένα σχήμα).

2. Εργαζόμενοι στήλη προς στήλη, υπολογίστε τα γινόμενα

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

3. Υπολογίστε δύο εσωτερικά γινόμενα και ένα γινόμενο πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το πρώτο δίνει το μήκος του διανύσματος (στο τετράγωνο).

4. Πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών πρέπει να κάνουμε για να πολλαπλασιάσουμε έναν m επί n πίνακα A με ένα n-διάστατο διάνυσμα x; Για να πολλαπλασιάσουμε τον A με έναν n επί p πίνακα B;

5. Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό Ax, βρείτε ένα διάνυσμα x που να είναι λύση του συστήματος $Ax =$ *μηδενικό διάνυσμα*. Μπορείτε να βρείτε και άλλες λύσεις του $Ax = 0$;

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. Γράψτε τους 2 επί 2 πίνακες A και B με στοιχεία $a_{ij} = i + j$ και $b_{ij} = (-1)^{i+j}$. Πολλαπλασιάστε τους για να βρείτε τους AB και BA.

7. Δώστε ένα παράδειγμα (όχι τον μηδενικό πίνακα)

(α) ενός διαγώνιου 3 επί 3 πίνακα: $a_{ij} = 0$ αν $i \neq j$.
(β) ενός συμμετρικού 3 επί 3 πίνακα: $a_{ij} = a_{ji}$ για κάθε i και j.
(γ) ενός 3 επί 3 άνω τριγωνικού πίνακα: $a_{ij} = 0$ αν $i > j$.
(δ) ενός αντισυμμετρικού 3 επί 3 πίνακα: $a_{ij} = -a_{ji}$ για κάθε i και j.

8. Οι παρακάτω υπορουτίνες εκτελούν τον πολλαπλασιασμό Ax *κατά γραμμές ή κατά στήλες*; Ξεκινήστε με $B(I) = 0$:

```
   DO 10 I = 1,N                    DO 10 J = 1,N
   DO 10 J = 1,N                    DO 10 I = 1,N
10 B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)   10 B(I) = B(I) + A(I,J) * X(J)
```

Οι έξοδοι $Bx = Ax$ είναι ίδιες. Το δεύτερο απόσπασμα κώδικα είναι ελαφρώς αποδοτικότερο στη FORTRAN και πολύ αποδοτικότερο στις διανυσματικές μηχανές (το πρώτο μεταβάλλει μεμονωμένα στοιχεία $B(I)$, ενώ το δεύτερο μπορεί να ενημερώσει ολόκληρα διανύσματα).

9. Αν a_{ij} είναι τα στοιχεία του A, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό με τους δείκτες γράψτε:

(α) τον πρώτο οδηγό.
(β) τον πολλαπλασιαστή ℓ_{i1} της γραμμής 1 που πρέπει να αφαιρεθεί από τη γραμμή i.
(γ) το νέο στοιχείο που αντικαθιστά το a_{ij} μετά από αυτή την αφαίρεση.
(δ) τον δεύτερο οδηγό.

10. Σωστό ή λάθος; Δώστε ένα συγκεκριμένο αντιπαράδειγμα σε περίπτωση που είναι λάθος.

(α) Αν οι στήλες 1 και 3 του B είναι ίδιες, ίδιες είναι και οι στήλες 1 και 3 του AB.
(β) Αν οι γραμμές 1 και 3 του B είναι ίδιες, ίδιες είναι και οι γραμμές 1 και 3 του AB.
(γ) Αν οι γραμμές 1 και 3 του A είναι ίδιες, ίδιες είναι και οι γραμμές 1 και 3 του AB.
(δ) $(AB)^2 = A^2B^2$.

11. Η πρώτη γραμμή του AB είναι ένας γραμμικός συνδυασμός όλων των γραμμών του B. Ποιοι είναι οι συντελεστές αυτού του συνδυασμού και ποια είναι η πρώτη γραμμή του AB αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

12. Το γινόμενο δύο κάτω τριγωνικών πινάκων είναι και αυτό ένας κάτω τριγωνικός πίνακας (όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν). Επιβεβαιώστε το με ένα παράδειγμα 3 επί 3 πίνακα και κατόπιν εξηγήστε πώς προκύπτει από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων.

13. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο δοκιμής και σφάλματος, βρείτε παραδείγματα 2 επί 2 πινάκων τέτοιων ώστε

(α) $A^2 = -I$, όπου ο A έχει μόνο πραγματικά στοιχεία.
(β) $B^2 = 0$, μολονότι $B \neq 0$.

(γ) $CD = -DC$, θεωρώντας ότι δεν ισχύει $CD = 0$.
(δ) $EF = 0$, μολονότι κανένα στοιχείο του E ή του F δεν είναι μηδέν.

14. Περιγράψετε τις γραμμές του EA και τις *στήλες* του AE αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Υποθέστε ότι ο A μπορεί να αντιμετατεθεί με οποιονδήποτε 2 επί 2 πίνακα ($AB = BA$) και ειδικότερα ότι

$$\text{ο} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{αντιμετατίθεται με τους} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $a = d$ και $b = c = 0$. Αν $AB = BA$ για οποιονδήποτε πίνακα B, τότε ο A είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα.

16. Έστω x το διάνυσμα στήλη $(1, 0, \ldots, 0)$. Δείξτε ότι επειδή $(AB)x = A(Bx)$, η πρώτη στήλη του AB πρέπει να ισούται με A επί την πρώτη στήλη του B.

17. Ποιος από τους παρακάτω πίνακες ισούται σίγουρα με $(A+B)^2$;

$A^2 + 2AB + B^2$, $A(A+B) + B(A+B)$, $(A+B)(B+A)$, $A^2 + AB + BA + B^2$.

18. Αν οι A και B είναι n επί n πίνακες όλα τα στοιχεία των οποίων ισούνται με 1, βρείτε το $(AB)_{ij}$. Με χρήση του σίγμα συμβολισμού, το γινόμενο AB και η ιδιότητα $(AB)C = A(BC)$ γράφονται ως εξής:

$$(AB)_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} \qquad \sum_j \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right) c_{jl} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_j b_{kj} c_{jl} \right).$$

Υπολογίστε και τα δύο μέλη αν ο C είναι επίσης n επί n πίνακας, με στοιχεία $c_{jl} = 2$.

19. *Ένας τέταρτος τρόπος να πολλαπλασιάζουμε πίνακες είναι να πολλαπλασιάσουμε* ***τις στήλες του A επί τις γραμμές του B***:

$AB =$ (στήλη 1)(γραμμή 1)$+\cdots+$(στήλη n)(γραμμή n) $=$ άθροισμα απλών πινάκων.

Δώστε ένα 2 επί 2 παράδειγμα αυτού του σημαντικού κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων.

20. Ο πίνακας που στρέφει το επίπεδο x-y κατά γωνία θ είναι ο

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε ότι $A(\theta_1)A(\theta_2) = A(\theta_1 + \theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες για τα $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ και $\sin(\theta_1 + \theta_2)$. Ποιος είναι ο $A(\theta)$ επί $A(-\theta)$;

21. Βρείτε τις δυνάμεις A^2, A^3 (A^2 επί A) και B^2, B^3, C^2, C^3. Ποιοι είναι οι A^k, B^k και C^k;

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = AB = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Τα προβλήματα 22–31 αφορούν τους πίνακες απαλοιφής.

22. Γράψετε τους 3 επί 3 πίνακες που εκτελούν τα εξής βήματα απαλοιφής:

(α) Ο E_{21} αφαιρεί 5 επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2.
(β) Ο E_{32} αφαιρεί -7 επί τη γραμμή 2 από τη γραμμή 3.
(γ) Ο P αντιμεταθέτει τις γραμμές 1 και 2, και κατόπιν τις γραμμές 2 και 3.

23. Στο Πρόβλημα 22, αν εφαρμόσουμε τον E_{21} και κατόπιν τον E_{32} στη στήλη $b = (1, 0, 0)$ παίρνουμε $E_{32}E_{21}b =$ ___. Αν εφαρμόσουμε τον E_{32} πριν από τον E_{21} παίρνουμε $E_{21}E_{32}b =$ ___. Αν εφαρμόσουμε πρώτα τον E_{32}, η γραμμή ___ δεν επηρεάζεται από τη γραμμή ___.

24. Ποιοι τρεις πίνακες E_{21}, E_{31}, E_{32} μετατρέπουν τον A στην τριγωνική μορφή U;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E_{32}E_{31}E_{21}A = U.$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτούς τους E, βρείτε έναν πίνακα M που να εκτελεί απαλοιφή: $MA = U$.

25. Υποθέστε ότι $a_{33} = 7$ και ότι ο τρίτος οδηγός είναι το 5. Αν αλλάξουμε το a_{33} και το κάνουμε 11, ο τρίτος οδηγός είναι ___. Αν αλλάξουμε το a_{33} και το κάνουμε ___, στη θέση του οδηγού υπάρχει μηδέν.

26. Αν όλες οι στήλες του A είναι κάποιο πολλαπλάσιο του $(1, 1, 1)$, τότε το Ax είναι πάντα πολλαπλάσιο του $(1, 1, 1)$. Δώστε ένα παράδειγμα 3 επί 3 πίνακα. Πόσοι οδηγοί παράγονται κατά την απαλοιφή;

27. Ποιος πίνακας E_{31} αφαιρεί 7 επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3; Για να αντιστρέψει αυτό το βήμα, ο R_{31} πρέπει να ______ 7 επί τη γραμμή ___ στη γραμμή ___. Πολλαπλασιάστε τον E_{31} με τον R_{31}.

28. (α) Ο E_{21} αφαιρεί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2 και κατόπιν ο P_{23} αντιμεταθέτει τις γραμμές 2 και 3. Ποιος πίνακας $M = P_{23}E_{21}$ εκτελεί και τα δύο βήματα ταυτόχρονα;
(β) Ο P_{23} αντιμεταθέτει τις γραμμές 2 και 3, και κατόπιν ο E_{31} αφαιρεί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3. Ποιος πίνακας $M = E_{31}P_{23}$ εκτελεί και τα δύο βήματα ταυτόχρονα; Εξηγήστε γιατί οι M είναι ίδιοι αλλά οι E είναι διαφορετικοί.

29. (α) Ποιος 3 επί 3 πίνακας E_{13} προσθέτει τη γραμμή 3 στη γραμμή 1;
(β) Ποιος πίνακας προσθέτει τη γραμμή 1 στη γραμμή 3 και *ταυτόχρονα* προσθέτει τη γραμμή 3 στη γραμμή 1;
(γ) Ποιος πίνακας προσθέτει τη γραμμή 1 στη γραμμή 3 και *κατόπιν* προσθέτει τη γραμμή 3 στη γραμμή 1;

30. Πολλαπλασιάστε τους εξής πίνακες:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

31. Ποιους πίνακες απαλοιφής E_{21}, E_{32} και E_{43} χρειάζεται ο παρακάτω 4 επί 4 πίνακας;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τα προβλήματα 32–44 αφορούν την κατασκευή και τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

32. Γράψτε τα παρακάτω πανάρχαια προβλήματα στην 2 επί 2 μορφή πινάκων $Ax = b$ και λύστε τα:

(α) Ο X έχει διπλάσια ηλικία από τον Y και το άθροισμα των ηλικιών τους είναι 39.
(β) Τα $(x, y) = (2, 5)$ και $(3, 7)$ ανήκουν στην ευθεία $y = mx + c$. Βρείτε τα m και c.

33. Η παραβολή $y = a+bx+cx^2$ διέρχεται από τα σημεία $(x, y) = (1, 4)$, $(2, 8)$ και $(3, 14)$. Βρείτε και λύστε μια εξίσωση πινάκων ως προς τους αγνώστους (a, b, c).

34. Πολλαπλασιάστε τους παρακάτω πίνακες με την εξής σειρά: EF, FE και E^2:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

35. (α) Αν όλες οι στήλες του B είναι ίδιες, τότε όλες οι στήλες του EB είναι ίδιες, διότι καθεμία ισούται με E επί ______.
(β) Υποθέστε ότι όλες οι γραμμές του B είναι $[1\ \ 2\ \ 4]$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι οι γραμμές του EB *δεν* είναι όλες $[1\ \ 2\ \ 4]$. Αυτό που ισχύει είναι ότι οι γραμμές αυτές είναι ______.

36. Αν ο E προσθέτει τη γραμμή 1 στη γραμμή 2 και ο F προσθέτει τη γραμμή 2 στη γραμμή 1, ισούται ο EF με τον FE;

37. Η πρώτη συνιστώσα του Ax είναι $\sum a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$. Γράψτε τύπους για την τρίτη συνιστώσα του Ax και για το στοιχείο $(1, 1)$ του A^2.

38. Αν $AB = I$ και $BC = I$, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα δείξτε ότι $A = C$.

39. Ο A είναι 3 επί 5, ο B είναι 5 επί 3, ο C είναι 5 επί 1 και ο D είναι 3 επί 1. *Όλα τα στοιχεία είναι* 1. Ποιες από τις παρακάτω πράξεις πινάκων επιτρέπονται και ποιο είναι το αποτέλεσμα;

$$BA \qquad AB \qquad ABD \qquad DBA \qquad A(B+C).$$

40. Ποιες γραμμές, στήλες ή πίνακες πρέπει να πολλαπλασιάσουμε για να βρούμε

(α) την τρίτη στήλη του AB;
(β) την πρώτη γραμμή του AB;
(γ) το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή 3, στήλη 4 του AB;
(δ) το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή 1, στήλη 1 του CDE;

41. (3 επί 3 πίνακες) Επιλέξτε τον μοναδικό B για τον οποίο για κάθε πίνακα A να ισχύει:

(α) $BA = 4A$.

(β) $BA = 4B$.
(γ) Ο BA περιέχει τις γραμμές 1 και 3 του A αντεστραμμένες και τη γραμμή 2 αμετάβλητη.
(δ) Όλες οι γραμμές του BA είναι ίδιες με τη γραμμή 1 του A.

42. Σωστό ή λάθος;

(α) Αν ο A^2 ορίζεται, τότε ο A είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικός.
(β) Αν οι AB και BA ορίζονται, τότε οι A και B είναι τετραγωνικοί.
(γ) Αν οι AB και BA ορίζονται, τότε οι AB και BA είναι τετραγωνικοί.
(δ) Αν $AB = B$, τότε $A = I$.

43. Αν ο A είναι m επί n, πόσους πολλαπλασιασμούς αριθμών πρέπει να κάνουμε

(α) για να πολλαπλασιάσουμε τον A με ένα διάνυσμα x με n συνιστώσες;
(β) για να πολλαπλασιάσουμε τον A με έναν n επί p πίνακα B; Σε αυτή την περίπτωση ο AB είναι m επί p.
(γ) για να πολλαπλασιάσουμε τον A με το εαυτό του ώστε να προκύψει A^2; Σε αυτή την περίπτωση, $m = n$.

44. Για να αποδείξετε τη σχέση $(AB)C = A(BC)$, χρησιμοποιήστε τα διανύσματα στήλες $b_1, \ldots, b_n$ του B. Αρχικά υποθέστε ότι ο C έχει μόνο μία στήλη c με στοιχεία $c_1, \ldots, c_n$:

Ο AB έχει στήλες $Ab_1, \ldots, Ab_n$, ενώ ο Bc έχει μία στήλη $c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$.

Επομένως, ο $(AB)c = c_1 Ab_1 + \cdots + c_n Ab_n$ ισούται με $A(c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n) = A(Bc)$.

Τα δύο αθροίσματα είναι ίσα λόγω *γραμμικότητας*, οπότε $(AB)c = A(Bc)$. Το ίδιο ισχύει για κάθε άλλη ___ του C. Συνεπώς, $(AB)C = A(BC)$.

Στα προβλήματα 45–49 χρησιμοποιείται ο πολλαπλασιασμός στήλης επί γραμμή και ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ.

45. Υπολογίστε το γινόμενο AB πολλαπλασιάζοντας στήλες επί γραμμές:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \underline{\qquad} = \underline{\qquad}.$$

46. Στον ***πολλαπλασιασμό κατά μπλοκ*** χωρίζουμε τους πίνακες σε μπλοκ (υποπίνακες). Αν τα σχήματα των υποπινάκων επιτρέπουν τον πολλαπλασιασμό τους, τότε ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ είναι δυνατός. Αντικαταστήσετε τα x με αριθμούς και επαληθεύσετε ότι ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ πετυχαίνει.

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC + BD \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \hline x & x & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} x & x & x \\ x & x & x \\ \hline x & x & x \end{array}\right].$$

47. Χωρίζοντας κατάλληλα τους A, B και AB, δείξτε ότι καθένας από τους τέσσερις κανόνες πολλαπλασιασμού είναι ουσιαστικά ένας υπολογισμός του AB με πολλαπλασιασμό κατά μπλοκ:

(1) Πίνακας A επί στήλες του B.
(2) Γραμμές του A επί πίνακας B.

(3) Γραμμές του A επί στήλες του B.
(4) Στήλες του A επί γραμμές του B.

48. Ο πολλαπλασιασμός κατά μπλοκ λέει ότι με εφαρμογή της απαλοιφής στη στήλη 1 προκύπτει

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{c}/a & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \_\_ \end{bmatrix}.$$

49. *Απαλοιφή για 2 επί 2 μπλοκ πίνακες*: Αν $A^{-1}A = I$, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη γραμμή μπλοκ με CA^{-1} και αφαιρώντας από τη δεύτερη γραμμή, βρείτε το «*συμπλήρωμα Schur*» S:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & S \end{bmatrix}.$$

50. Αν $i^2 = -1$, το γινόμενο $(A+iB)(x+iy)$ είναι $Ax+iBx+iAy-By$. Χρησιμοποιώντας μπλοκ, χωρίστε το πραγματικό από το φανταστικό μέρος που πολλαπλασιάζει το i:

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ ; & ; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax - By \\ ; \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{πραγματικό μέρος} \\ \text{φανταστικό μέρος} \end{matrix}$$

51. Υποθέστε ότι λύνουμε την $Ax = b$ για τρεις ειδικές περιπτώσεις δεξιών μελών b:

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Αν οι λύσεις x_1, x_2, x_3 είναι οι στήλες ενός πίνακα X, ποιος είναι ο AX;

52. Αν οι τρεις λύσεις του Προβλήματος 51 είναι τα $x_1 = (1,1,1)$, $x_2 = (0,1,1)$ και $x_3 = (0,0,1)$, λύστε την $Ax = b$ με $b = (3,5,8)$. Δυσκολότερο πρόβλημα: Ποιος είναι ο A;

53. Βρείτε όλους τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{που ικανοποιούν την} \quad A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A.$$

54. Αν ο A είναι *βορειοδυτικός πίνακας* και ο B *νοτιοανατολικός πίνακας*, τι είδους πίνακες είναι οι AB και BA; «Βορειοδυτικός» και «νοτιοανατολικός» σημαίνει ότι ο πίνακας έχει μηδενικά κάτω και πάνω από την αντιδιαγώνιο που ξεκινάει από το $(1,n)$ και καταλήγει στο $(n,1)$.

55. Γράψτε την $2x+3y+z+5t = 8$ σαν ένα πίνακα A (με πόσες γραμμές;) που πολλαπλασιάζει το διάνυσμα στήλη (x,y,z,t) δίνοντας το b. Οι λύσεις σχηματίζουν ένα επίπεδο στον τετραδιάστατο χώρο. *Το επίπεδο είναι τριδιάστατο χωρίς τετραδιάστατο όγκο.*

56. Ποιος 2 επί 2 πίνακας P_1 προβάλλει το διάνυσμα (x,y) στον άξονα x με αποτέλεσμα το $(x,0)$; Ποιος πίνακας P_2 το προβάλλει στον άξονα y με αποτέλεσμα το $(0,y)$; Αν πολλαπλασιάσουμε το $(5,7)$ με τον P_1 και στη συνέχεια πολλαπλασιάσουμε με τον P_2, παίρνουμε (______) και (______).

57. Γράψτε το εσωτερικό γινόμενο των $(1,4,5)$ και (x,y,z) σαν έναν πολλαπλασιασμό πινάκων Ax. Ο A έχει μία γραμμή. Οι λύσεις της $Ax = 0$ ανήκουν σε ένα ______ κάθετο στο διάνυσμα ______. Οι στήλες του A ανήκουν μόνο στον ______-διάστατο χώρο.

58. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της MATLAB, γράψτε τις εντολές που ορίζουν τον πίνακα A και τα διανύσματα στήλες x και b. Με ποια εντολή μπορούμε να ελέγξουμε αν $Ax = b$;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

59. Οι εντολές A = eye(3) και v = [3:5]' της MATLAB παράγουν τον 3 επί 3 ταυτοτικό πίνακα και το διάνυσμα στήλη $(3, 4, 5)$. Ποια είναι η έξοδος των A * v και v' * v; (Δεν απαιτείται υπολογιστής!) Τι θα συμβεί αν ζητήσουμε να υπολογιστεί ο v * A;

60. Αν πολλαπλασιάσουμε τον 4 επί 4 πίνακα A = ones(4,4) που αποτελείται μόνο από μονάδες με τη στήλη v = ones(4,1), ποιος είναι ο A * v; (Δεν απαιτείται υπολογιστής.) Αν πολλαπλασιάσουμε τον B = eye(4) + ones(4,4) με τον w = zeros(4,1) + 2 * ones(4,1), ποιος είναι ο B * w;

61. Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 **μαγικό πίνακα** M με στοιχεία $1, 2, \ldots, 9$. Το άθροισμα όλων των γραμμών, των στηλών και των διαγωνίων πρέπει να είναι 15. Η πρώτη γραμμή θα μπορούσε να είναι $8, 3, 4$. Με τι ισούται το γινόμενο M επί $(1, 1, 1)$; Με τι ισούται το γινόμενο διάνυσμα γραμμή $[1 \;\; 1 \;\; 1]$ επί M;

1.5 ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

Θα εξετάσουμε ξανά την απαλοιφή για να δούμε πώς αναπαριστάται με πίνακες. Το σημείο εκκίνησης ήταν το σύστημα $Ax = b$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = b. \tag{1}$$

Ακολούθησαν τρία βήματα απαλοιφής, με πολλαπλασιαστές $2, -1, -1$:

Βήμα 1. Αφαίρεση 2 επί την πρώτη εξίσωση από τη δεύτερη.
Βήμα 2. Αφαίρεση -1 επί την πρώτη εξίσωση από την τρίτη.
Βήμα 3. Αφαίρεση -1 επί τη δεύτερη εξίσωση από την τρίτη.

Το αποτέλεσμα ήταν ένα ισοδύναμο σύστημα $Ux = c$, με ένα νέο πίνακα συντελεστών U:

$$\textbf{Άνω τριγωνικός} \qquad Ux = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix} = c. \tag{2}$$

Ο πίνακας U είναι ***άνω τριγωνικός*** —όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι μηδέν.

Το νέο δεξί μέλος c προέκυψε από το αρχικό διάνυσμα b με τα ίδια βήματα που μετέτρεψαν τον A στον U. Η *ορθόδρομη απαλοιφή* συνοψίζεται στις εξής τρεις γραμμοπράξεις:

Ξεκινάμε με τα A και b.
Εφαρμόζουμε τα βήματα 1, 2, 3 με αυτή τη σειρά.
Τελειώνουμε με τα U και c.

Λύνουμε το $Ux = c$ με ανάδρομη αντικατάσταση. Θα εστιάσουμε την προσοχή μας στη σχέση του A με τον U.

Παρουσιάσαμε τον πίνακα E του βήματος 1, τον πίνακα F του βήματος 2 και τον πίνακα G του βήματος 3 στην προηγούμενη ενότητα. Οι πίνακες αυτοί ονομάζονται ***στοιχειώδεις πίνακες*** και μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε πώς λειτουργούν. Για να αφαιρέσουμε ένα πολλαπλάσιο ℓ της εξίσωσης j από την εξίσωση i, *βάζουμε τον αριθμό* $-\ell$ *στη θέση* (i, j). Στις υπόλοιπες θέσεις διατηρούμε τα στοιχεία του ταυτοτικού πίνακα, με μονάδες στη διαγώνιο και μηδενικά παντού αλλού. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων εκτελεί την αντίστοιχη γραμμοπράξη.

Το αποτέλεσμα των τριών βημάτων είναι ο $GFEA = U$. Προσέξτε ότι ο E είναι ο πρώτος που πολλαπλασιάζει τον A, ακολουθεί ο F και κατόπιν ο G. Θα μπορούσαμε να κάνουμε κατευθείαν τον πολλαπλασιασμό GFE ώστε να βρούμε τον ένα πίνακα που μετατρέπει τον A στον U (και επίσης το b στο c). Είναι κάτω τριγωνικός (παραλείπουμε τα μηδενικά):

Από τον A στον U
$$GFE = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & 1 & \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Αυτό είναι καλό, αλλά το σημαντικότερο ερώτημα είναι το ακριβώς αντίστροφο: Πώς μπορούμε να επανέλθουμε από τον U στον A; ***Πώς μπορούμε να αναιρέσουμε τα βήματα της απαλοιφής Gauss;***

Η αναίρεση του βήματος 1 δεν είναι δύσκολη. Αντί να αφαιρέσουμε, *προσθέτουμε* δύο επί την πρώτη γραμμή στη δεύτερη. (Όχι δύο επί τη δεύτερη γραμμή στην πρώτη!) Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης και της αφαίρεσης και της πρόσθεσης είναι η επιστροφή στον ταυτοτικό πίνακα:

Το αντίστροφο της αφαίρεσης είναι η πρόσθεση
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (4)$$

Η μία πράξη αναιρεί την άλλη. Στην ορολογία των πινάκων, ο ένας πίνακας είναι ο ***αντίστροφος*** του άλλου. Αν ο στοιχειώδης πίνακας E έχει τον αριθμό $-\ell$ στη θέση (i, j), τότε ο αντίστροφός του, E^{-1}, έχει το $+\ell$ στην ίδια θέση. Επομένως, $E^{-1}E = I$, που είναι η εξίσωση (4).

Χρησιμοποιώντας τους E^{-1}, F^{-1} και G^{-1}, μπορούμε να αντιστρέψουμε όλα τα βήματα της απαλοιφής. Είναι καλή ιδέα να δούμε αυτούς τους αντιστρόφους τώρα, πριν προχωρήσουμε στην επόμενη ενότητα. Το τελικό πρόβλημα είναι η αναίρεση ολόκληρης της διαδικασίας σε ένα βήμα ώστε να δούμε ποιος πίνακας μας επαναφέρει από τον U στον A.

Αφού το βήμα 3 ήταν το τελευταίο βήμα της μετάβασης από τον A στον U, ο πίνακας G πρέπει να είναι ο πρώτος που θα αντιστραφεί κατά την αντίθετη κατεύθυνση. Οι αντίστροφοι εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά! Το δεύτερο αντίστροφο βήμα είναι ο F^{-1} και το τελευταίο ο E^{-1}:

Επιστροφή από τον U στον A η $E^{-1}F^{-1}G^{-1}U = A$ είναι η $LU = A$. (5)

Αντικαθιστώντας τον U με τον $GFEA$, μπορούμε να δούμε πώς αναιρούν οι αντίστροφοι τα αρχικά βήματα.

Σε αυτό το σημείο αναγνωρίζουμε τον πίνακα L που μας επαναφέρει από τον U στον A. Καλείται L, διότι είναι *κάτω τριγωνικός*, και έχει μια ιδιαίτερη ιδιότητα που φαίνεται μόνο αν πολλαπλασιάσουμε τους τρεις αντίστροφους πίνακες με τη σωστή σειρά:

$$E^{-1}F^{-1}G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbf{2} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \mathbf{-1} & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \mathbf{2} & 1 & \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 1 \end{bmatrix} = L. \qquad (6)$$

Η ιδιαιτερότητα είναι ότι ***τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο είναι οι πολλαπλασιαστές*** $\ell = 2, -1$ και -1. Όταν πολλαπλασιάζουμε πίνακες, συνήθως δεν υπάρχει τρόπος να δούμε απευθείας το αποτέλεσμα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι πίνακες εμφανίζονται με τη σειρά που πρέπει ώστε να μπορέσουμε να γράψουμε αμέσως το γινόμενό τους. Αν ο υπολογιστής αποθηκεύσει κάθε πολλαπλασιαστή ℓ_{ij} —τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η γραμμή οδηγός j όταν αφαιρείται από τη γραμμή i ώστε να παραχθεί το μηδέν στη θέση i, j— τότε οι πολλαπλασιαστές αυτοί μας δίνουν το πλήρες ιστορικό της απαλοιφής.

Οι αριθμοί ℓ_{ij} σχηματίζουν τον πίνακα L που μας επαναφέρει από τον U στον A.

1H ***Τριγωνική παραγοντοποίηση $A = LU$ χωρίς αντιμετάθεση γραμμών***. Ο L είναι κάτω τριγωνικός, με μονάδες στη διαγώνιο. Οι πολλαπλασιαστές ℓ_{ij} (που προκύπτουν από την απαλοιφή) βρίσκονται κάτω από τη διαγώνιο. Ο U είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας που προκύπτει μετά την ορθόδρομη απαλοιφή. Τα στοιχεία της διαγωνίου του U είναι οι οδηγοί.

Παράδειγμα 1

Ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ μετατρέπεται στον $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ με $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Έχουμε $LU = A$.

Παράδειγμα 2

(Απαιτείται αντιμετάθεση γραμμών)

Ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $A = LU$.

Παράδειγμα 3

(Όλοι οι οδηγοί και πολλαπλασιαστές ισούνται με 1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU.$$

Για να μεταβούμε από τον A στον U εκτελούμε αφαιρέσεις γραμμών. Για να μεταβούμε από τον U στον A εκτελούμε προσθέσεις γραμμών.

Παράδειγμα 4

(Ο U είναι ο ταυτοτικός πίνακας και ο L είναι ίδιος με τον A)

Περίπτωση κάτω τριγωνικού πίνακα $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}$.

Τα βήματα της απαλοιφής για αυτόν τον A είναι εύκολα: (i) ο E αφαιρεί ℓ_{21} επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2, (ii) ο F αφαιρεί ℓ_{31} επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 3 και (iii) ο G αφαιρεί ℓ_{32} επί τη γραμμή 2 από τη γραμμή 3. Το αποτέλεσμα είναι ο ταυτοτικός πίνακας $U = I$. Οι αντίστροφοι των E, F και G μας επαναφέρουν στον A:

> ο E^{-1} εφαρμοζόμενος στον F^{-1} εφαρμοζόμενος στον G^{-1} εφαρμοζόμενος στον I δίνει τον A.

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ \ell_{21} & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ επί } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ \ell_{31} & & 1 \end{bmatrix} \text{ επί } \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ ίσον με } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix}.$$

Η σειρά είναι αυτή που πρέπει ώστε τα ℓ να βρεθούν στη σωστή τους θέση. Αυτό συμβαίνει πάντα! Επισημαίνουμε ότι, λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας, η χρήση παρενθέσεων στον $E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ δεν είναι απαραίτητη.

$A = LU$: Η περίπτωση n επί n

Η παραγοντοποίηση $A = LU$ είναι τόσο σημαντική που πρέπει να την αναλύσουμε περισσότερο. Συνήθως απουσίαζε από τα μαθήματα γραμμικής άλγεβρας όταν αυτά ακολουθούσαν μια πιο αφηρημένη προσέγγιση. Ή ίσως θεωρούνταν πολύ δύσκολη —εσείς όμως την έχετε ήδη καταλάβει. Αν στο τελευταίο Παράδειγμα 4 επιτρέψουμε οποιονδήποτε U αντί του συγκεκριμένου $U = I$, μπορούμε να δούμε πώς λειτουργεί γενικά ο κανόνας. ***Ο πίνακας L, αν εφαρμοστεί στον U, μας επαναφέρει στον A***:

$$\boldsymbol{A = LU} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{γραμμή 1 του } U \\ \text{γραμμή 2 του } U \\ \text{γραμμή 3 του } U \end{bmatrix} = \text{αρχικός } A. \tag{7}$$

Η απόδειξη γίνεται με *εφαρμογή των βημάτων της απαλοιφής*. Στη δεξιά πλευρά, μας οδηγούν από τον A στον U. Στην αριστερή πλευρά, ανάγουν τον L στον I, όπως στο Παράδειγμα 4. (Το πρώτο βήμα αφαιρεί ℓ_{21} επί $(1, 0, 0)$ από τη δεύτερη γραμμή, πράγμα που απομακρύνει το ℓ_{21}.) Και οι δύο πλευρές της (7) ισούνται τελικά με τον ίδιο πίνακα U, και τα βήματα που μας οδήγησαν εκεί είναι όλα αντιστρέψιμα. Άρα η (7) είναι σωστή και $A = LU$.

Η $A = LU$ είναι τόσο κομβική και τόσο όμορφη που στο Πρόβλημα 8 στο τέλος αυτής της ενότητας προτείνεται μια δεύτερη προσέγγιση. Μολονότι εργαζόμαστε με 3 επί 3 πίνακες, μπορείτε να αντιληφθείτε πώς εφαρμόζονται οι ίδιοι συλλογισμοί σε μεγαλύτερους πίνακες. Θα δώσουμε ένα ακόμη παράδειγμα πριν αρχίσουμε να χρησιμοποιούμε την $A = LU$.

Παράδειγμα 5 ($A = LU$, με μηδενικά στις κενές θέσεις)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Αυτό δείχνει ότι ένας πίνακας A με τρεις διαγωνίους έχει παράγοντες L και U με δύο διαγωνίους. Αυτό το παράδειγμα προέρχεται από ένα σημαντικό πρόβλημα των διαφορικών εξισώσεων (Ενότητα 1.7). Η δεύτερη διαφορά στον A είναι μια ανάδρομη διαφορά L επί μια ορθόδρομη διαφορά U.

Ένα γραμμικό σύστημα = Δύο τριγωνικά συστήματα

Από πρακτικής πλευράς, η $A = LU$ είναι ιδιαίτερα σημαντική. Είναι κάτι περισσότερο από μια καταγραφή των βημάτων της απαλοιφής· οι L και U είναι οι πίνακες που χρειαζόμαστε για να λύσουμε την $Ax = b$. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε να πετάξουμε τον A! Πηγαίνουμε από το b στο c με ορθόδρομη απαλοιφή (η οποία χρησιμοποιεί τον L), και από το c στο x με ανάδρομη αντικατάσταση (η οποία χρησιμοποιεί τον U). Μπορούμε και πρέπει να κάνουμε αυτά τα βήματα χωρίς τον A:

$$\textbf{Διάσπαση της } \boldsymbol{Ax = b} \qquad \textit{Αρχικά} \quad Lc = b \quad \textit{και κατόπιν} \quad Ux = c. \tag{8}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με L και παίρνουμε $LUx = Lc$, η οποία είναι η $Ax = b$. Κάθε τριγωνικό σύστημα λύνεται γρήγορα. Αυτό ακριβώς κάνει ένας καλός κώδικας απαλοιφής:

1. ***Παραγοντοποίηση***: (από τον A βρίσκουμε τους παράγοντές του, L και U).
2. ***Επίλυση***: (από τους L, U και το b βρίσκουμε τη λύση x).

Ο χωρισμός της διαδικασίας σε ***Παραγοντοποίηση*** και ***Επίλυση*** μας επιτρέπει να επεξεργαστούμε περισσότερα από ένα b. Η υπορουτίνα ***Επίλυση*** ικανοποιεί την εξίσωση (8): λύνει δύο τριγωνικά συστήματα σε $n^2/2$ βήματα το καθένα. **Η λύση για κάθε νέο δεξί μέλος $\boldsymbol{b}$ μπορεί να βρεθεί με μόνο $\boldsymbol{n^2}$ πράξεις**. Αυτό είναι πολύ λιγότερο από τα $n^3/3$ βήματα που απαιτούνται για την παραγοντοποίηση του A στο αριστερό μέλος.

Παράδειγμα 6 Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα A του προηγούμενου παραδείγματος με δεξί μέλος το $b = (1, 1, 1, 1)$.

$$\boldsymbol{Ax = b} \quad \text{Το} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 \phantom{{}+2x_3 - x_4} &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}- x_4} &= 1 \\ - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ - x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{διασπάται στις } Lc = b \text{ και } Ux = c.$$

$$\boldsymbol{Lc = b} \quad \text{Από το} \quad \begin{aligned} c_1 \phantom{{}+c_2+c_3+c_4} &= 1 \\ -c_1 + c_2 \phantom{{}+c_3+c_4} &= 1 \\ - c_2 + c_3 \phantom{{}+c_4} &= 1 \\ - c_3 + c_4 &= 1 \end{aligned} \quad \text{προκύπτει} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{Ux = c} \quad \text{Από το} \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3-x_4} &= 1 \\ x_2 - x_3 \phantom{{}-x_4} &= 2 \\ x_3 - x_4 &= 3 \\ x_4 &= 4 \end{aligned} \quad \text{προκύπτει} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}.$$

Για τους ειδικούς αυτούς «τριδιαγώνιους πίνακες», το πλήθος των πράξεων μειώνεται από n^2 σε $2n$. Βλέπουμε ότι το $Lc = b$ λύνεται *ορθόδρομα* (το c_1 προκύπτει πριν από το c_2). Αυτό ακριβώς συμβαίνει κατά την ορθόδρομη απαλοιφή. Στη συνέχεια, το $Ux = c$ λύνεται ανάδρομα (το x_4 προκύπτει πριν από το x_3).

Παρατήρηση 1 Η μορφή LU είναι «ασύμμετρη» ως προς τις διαγωνίους: Ο L έχει μονάδες εκεί όπου ο U έχει τους οδηγούς. Αυτό μπορεί να διορθωθεί εύκολα. **Διαιρώντας,**

εξάγουμε από τον U ως παράγοντα έναν διαγώνιο πίνακα οδηγών D:

Εξαγωγή του παράγοντα D

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \cdot & \\ & & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 & \cdot \\ & 1 & u_{23}/d_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Στο τελευταίο παράδειγμα, όλοι οι οδηγοί ήταν $d_i = 1$, οπότε, στη συγκεκριμένη περίπτωση, $D = I$. Αυτό ήταν όμως μια πολύ ιδιαίτερη περίπτωση· κανονικά, ο LU είναι διαφορετικός από τον LDU (ο οποίος γράφεται και ως LDV).

> ***Η τριγωνική παραγοντοποίηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή $A = LDU$, όπου οι L και U έχουν μονάδες στη διαγώνιο και D είναι ο διαγώνιος πίνακας των οδηγών.***

Όποτε βλέπουμε LDU ή LDV, καταλαβαίνουμε ότι ο U ή ο V έχει μονάδες στη διαγώνιο —κάθε γραμμή έχει διαιρεθεί με τον αντίστοιχο οδηγό που υπάρχει στον D. Επομένως, μπορούμε να μεταχειριστούμε τους L και U με τον ίδιο τρόπο. Ένα παράδειγμα διάσπασης του LU στη μορφή LDU είναι το εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{bmatrix} = LDU.$$

Οι διαγώνιοι των L και U περιέχουν μονάδες, ενώ η διαγώνιος του D περιέχει τους οδηγούς 1 και -2.

Παρατήρηση 2 Κατά την περιγραφή των βημάτων της απαλοιφής, ίσως δόθηκε η εντύπωση ότι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν με τη συγκεκριμένη σειρά. Αυτό δεν ισχύει. Υπάρχει *κάποια* ελευθερία, και ο λεγόμενος «αλγόριθμος Crout» οργανώνει τους υπολογισμούς με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο. *Δεν υπάρχει ελευθερία ως προς τους τελικούς L, D και U.* Το βασικό συμπέρασμα είναι το εξής:

> **1θ** Αν $A = L_1D_1U_1$ και $A = L_2D_2U_2$, όπου οι L είναι κάτω τριγωνικοί με μοναδιαία διαγώνιο, οι U άνω τριγωνικοί με μοναδιαία διαγώνιο και οι D διαγώνιοι πίνακες χωρίς μηδενικά στη διαγώνιο, τότε $\boldsymbol{L_1 = L_2}$, $\boldsymbol{D_1 = D_2}$ και $\boldsymbol{U_1 = U_2}$. Οι παραγοντοποιήσεις LDU και LU καθορίζονται μονοσήμαντα από τον A.

Η απόδειξη είναι μια καλή άσκηση με αντίστροφους πίνακες που θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Αντιμεταθέσεις γραμμών και πίνακες μετάθεσης

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αντιμετωπίσουμε ένα πρόβλημα το οποίο τόσην ώρα αποφεύγαμε: Ο αριθμός που αναμένουμε να χρησιμοποιήσουμε ως οδηγό μπορεί να είναι μηδέν. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί στο μέσο ενός υπολογισμού. Θα συμβεί στην αρχή, αν $a_{11} = 0$. Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής:

Μηδέν σε θέση οδηγού $$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Η δυσκολία είναι προφανής· κανένα πολλαπλάσιο της πρώτης εξίσωσης δεν μπορεί να απαλείψει τον συντελεστή 3.

Η λύση είναι εξίσου προφανής. ***Αντιμεταθέτουμε τις δύο εξισώσεις***, μετακινώντας προς τα πάνω το στοιχείο 3, στη θέση του οδηγού. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, ο πίνακας θα γινόταν άνω τριγωνικός:

$$\textbf{Αντιμετάθεση γραμμών} \qquad \begin{aligned} 3u + 4v &= b_2 \\ 2v &= b_1 \end{aligned}$$

Για να αναπαραστήσουμε την αντιμετάθεση με πίνακες, χρειαζόμαστε έναν ***πίνακα μετάθεσης*** P που να παράγει τη συγκεκριμένη αντιμετάθεση γραμμών. Ο πίνακας αυτός προκύπτει με αντιμετάθεση των γραμμών του I:

$$\textbf{Μετάθεση} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ο P επηρεάζει με τον ίδιο τρόπο το b, αντιμεταθέτοντας τα b_1 και b_2. *Το νέο σύστημα είναι το* $PAx = Pb$. Η αντιμετάθεση γραμμών *δεν* αλλάζει τη θέση των αγνώστων u και v.

Ένας πίνακας μετάθεσης $\boldsymbol{P}$ έχει τις ίδιες γραμμές με τον ταυτοτικό πίνακα (με κάποια σειρά). Υπάρχει ένα μόνο «1» σε κάθε γραμμή και στήλη. Ο πιο συνηθισμένος πίνακας μετάθεσης είναι ο $P = I$ (δεν αντιμεταθέτει τίποτα). Το γινόμενο δύο πινάκων μετάθεσης είναι μια άλλη μετάθεση —οι γραμμές του I αναδιατάσσονται δύο φορές.

Μετά τον $P = I$, οι απλούστερες μεταθέσεις αντιμεταθέτουν δύο γραμμές. Άλλες μεταθέσεις αντιμεταθέτουν περισσότερες γραμμές. **Υπάρχουν $\boldsymbol{n! = (n)(n-1)\cdots(1)}$ μεταθέσεις μεγέθους $\boldsymbol{n}$.** Για τη γραμμή 1 έχουμε n επιλογές, κατόπιν για τη γραμμή 2 έχουμε $n-1$ επιλογές και τέλος για την τελευταία γραμμή έχουμε μόνο μία επιλογή. Όλες οι 3 επί 3 μεταθέσεις (υπάρχουν $3! = (3)(2)(1) = 6$ πίνακες) είναι οι εξής:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P_{21}} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P_{32}P_{21}} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P_{31}} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P_{32}} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{P_{21}P_{32}} = \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν 24 πίνακες μετάθεσης μεγέθους $n = 4$ και μόνο δύο πίνακες μετάθεσης μεγέθους 2, συγκεκριμένα οι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Όταν μάθουμε για τους αντίστροφους και τους ανάστροφους πίνακες (στην επόμενη ενότητα θα ορίσουμε τους A^{-1} και A^{T}), θα ανακαλύψουμε ένα σημαντικό γεγονός: ο ***$\boldsymbol{P^{-1}}$ είναι πάντα ίδιος με τον $\boldsymbol{P^{\mathrm{T}}}$***.

Αν εμφανιστεί μηδενικό σε θέση οδηγού, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα: ***Η δυσκολία μπορεί να αντιμετωπίζεται εύκολα ή να είναι σοβαρή***. Αυτό το διαπιστώνουμε κοιτάζοντας *κάτω από το μηδενικό*. Αν υπάρχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο πιο κάτω στην ίδια στήλη, τότε πραγματοποιούμε αντιμετάθεση γραμμών. Το μη μηδενικό στοιχείο γίνεται ο οδηγός που χρειαζόμαστε και η διαδικασία της απαλοιφής μπορεί να προχωρήσει:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} d &= 0 \implies \text{δεν υπάρχει πρώτος οδηγός} \\ a &= 0 \implies \text{δεν υπάρχει δεύτερος οδηγός} \\ c &= 0 \implies \text{δεν υπάρχει τρίτος οδηγός.} \end{aligned}$$

Αν $d = 0$, το πρόβλημα δεν μπορεί να θεραπευτεί και ο συγκεκριμένος πίνακας είναι ***ιδιόμορφος***. Δεν υπάρχει ελπίδα να βρούμε μοναδική λύση για το $Ax = b$. Αν το d *δεν* είναι μηδέν, με μια αντιμετάθεση P_{13} των γραμμών 1 και 3 το d θα μετακινηθεί στη θέση του οδηγού. Στην επόμενη θέση υπάρχει όμως επίσης μηδέν. Ο αριθμός a βρίσκεται πλέον από κάτω του (το e που βρίσκεται από πάνω είναι άχρηστο). Αν το a δεν είναι μηδέν, πραγματοποιούμε μια ακόμη αντιμετάθεση γραμμών P_{23}:

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & e & f \\ 0 & \boldsymbol{a} & b \\ 0 & 0 & \boldsymbol{c} \end{bmatrix}$$

Και κάτι επιπλέον: Η μετάθεση $P_{23}P_{13}$ θα πραγματοποιήσει και τις δύο αντιμεταθέσεις γραμμών ταυτόχρονα:

Ο $\boldsymbol{P_{13}}$ εφαρμόζεται πρώτος $$P_{23}P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P.$$

Αν το γνωρίζαμε, θα μπορούσαμε να είχαμε πολλαπλασιάσει τον A με τον P εξ αρχής. Αν οι γραμμές βρίσκονται στη σωστή σειρά PA, κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι έτοιμος να δεχτεί την εφαρμογή της απαλοιφής.

Η απαλοιφή με λίγα λόγια: $PA = LU$

Η βασική ιδέα είναι η εξής: Αν η απαλοιφή μπορεί να ολοκληρωθεί με τη βοήθεια αντιμεταθέσεων γραμμών, τότε μπορούμε να φανταστούμε ότι αυτές οι αντιμεταθέσεις πραγματοποιούνται στην αρχή (μέσω του P). *Ο πίνακας PA δεν θα χρειαστεί καμία αντιμετάθεση γραμμών.* Με άλλα λόγια, ο PA μπορεί να παραγοντοποιηθεί με τον συνήθη τρόπο στο γινόμενο L επί U. Η θεωρία της απαλοιφής Gauss μπορεί να συνοψιστεί ως εξής:

1I Στη ***μη ιδιόμορφη*** περίπτωση, υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P που αναδιατάσσει τις γραμμές του A έτσι ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση μηδενικών στις θέσεις των οδηγών. Το $Ax = b$ έχει *μοναδική λύση*:

Αν οι γραμμές έχουν αναδιαταχθεί εκ των προτέρων,
ο $\boldsymbol{PA}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $\boldsymbol{LU}$.

Στην ***ιδιόμορφη*** περίπτωση, κανένας P δεν μπορεί να οδηγήσει σε πλήρες σύνολο οδηγών και η απαλοιφή αποτυγχάνει.

Στην πράξη, μπορεί να πραγματοποιήσουμε μια αντιμετάθεση γραμμών και όταν ο αρχικός οδηγός είναι *κοντά* στο μηδέν —ακόμα και αν δεν είναι ακριβώς μηδέν. Η επιλογή μεγαλύτερου οδηγού περιορίζει το σφάλμα στρογγυλοποίησης.

Πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με τον L. Ας υποθέσουμε ότι η απαλοιφή αφαιρεί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2, με αποτέλεσμα $\ell_{21} = 1$. Κατόπιν, ας υποθέσουμε ότι αντιμεταθέτει τις γραμμές 2 και 3. Αν αυτή η αντιμετάθεση γίνει εκ των προτέρων, ο πολλαπλασιαστής στην παραγοντοποίηση $PA = LU$ θα αλλάξει και θα γίνει $\ell_{31} = 1$.

Παράδειγμα 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U. \tag{10}$$

Η συγκεκριμένη αντιμετάθεση γραμμών μας οδηγεί στο LU —τώρα όμως $\ell_{31} = 1$ και $\ell_{21} = 2$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad PA = LU. \tag{11}$$

Στη MATLAB, η εντολή A([r k],:) αντιμεταθέτει τη γραμμή k με τη γραμμή r που βρίσκεται από κάτω της (όπου βρέθηκε ο k-οστός οδηγός). Ενημερώνουμε τους πίνακες L και P με τον ίδιο τρόπο. Αρχικά, $P = I$ και πρόσημο $= +1$:

```
A([r k], : ) = A([k r], : );
L([r k],1:k–1) = L([k r],1:k–1);
P([r k], : ) = P([k r], : );
sign = –sign
```

Το «**πρόσημο**» του P δηλώνει αν το πλήθος των αντιμεταθέσεων γραμμών είναι άρτιο (πρόσημο $= +1$) ή περιττό (πρόσημο $= -1$). Κάθε αντιμετάθεση γραμμών αλλάζει το πρόσημο. Η τελική τιμή του προσήμου είναι η **ορίζουσα του P** και δεν εξαρτάται από της σειρά με την οποία έγιναν οι αντιμεταθέσεις γραμμών.

Συνοψίζοντας: Ένας καλός κώδικας απαλοιφής αποθηκεύει τους L, U και P. Οι πίνακες αυτοί περιέχουν την πληροφορία που περιείχε αρχικά ο A, και μάλιστα σε πιο χρήσιμη μορφή. Το $Ax = b$ ανάγεται σε δύο τριγωνικά συστήματα. Αυτό είναι το πρακτικό ισοδύναμο του υπολογισμού που θα κάνουμε στη συνέχεια —*της εύρεσης του αντίστροφου πίνακα* A^{-1} *και της λύσης* $x = A^{-1}b$.

Προβλήματα 1.5

1. Πότε είναι ένας άνω τριγωνικός πίνακας μη ιδιόμορφος (έχει πλήρες σύνολο οδηγών);

2. Ποιο πολλαπλάσιο ℓ_{32} της γραμμής 2 του A θα αφαιρέσει η απαλοιφή από τη γραμμή 3 του A; Χρησιμοποιήστε την παραγοντοποιημένη μορφή

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ποιοι θα είναι οι οδηγοί; Θα χρειαστεί αντιμετάθεση γραμμών;

3. Πολλαπλασιάστε τον πίνακα $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ της εξίσωσης (6) με τον πίνακα GFE της εξίσωσης (3):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{επί} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πολλαπλασιάστε και με την αντίστροφη σειρά. *Γιατί είναι οι απαντήσεις αυτές που είναι;*

4. Εφαρμόζοντας απαλοιφή, υπολογίστε τους παράγοντες L και U για τους

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

5. Παραγοντοποιήστε τον A στη μορφή LU και γράψτε το άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$ που προκύπτει μετά την απαλοιφή για το

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

6. Βρείτε τους E^2, E^8 και E^{-1} αν

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Βρείτε τα γινόμενα FGH και HGF αν (τα μηδενικά στο άνω τρίγωνο παραλείπονται)

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. (***Δεύτερη απόδειξη της $\boldsymbol{A = LU}$***) Η τρίτη γραμμή του U προκύπτει από την τρίτη γραμμή του A με αφαίρεση πολλαπλασίων των γραμμών 1 και 2 (*του* U!):

$$\text{γραμμή 3 του } U = \text{γραμμή 3 του } A - \ell_{31}\,(\text{γραμμή 1 του } U) - \ell_{32}\,(\text{γραμμή 2 του } U).$$

(α) Γιατί αφαιρούμε γραμμές του U και όχι γραμμές του A; Απάντηση: Διότι από τη στιγμή που χρησιμοποιείται μια γραμμή οδηγού, ___.

(β) Η παραπάνω εξίσωση είναι ίδια με την

$$\begin{aligned} \text{γραμμή 3 του } A = \ell_{31}(\text{γραμμή 1 του } U) &+ \ell_{32}\,(\text{γραμμή 2 του } U) \\ &+ 1\,(\text{γραμμή 3 του } U). \end{aligned}$$

Ποιος κανόνας πολλαπλασιασμού πινάκων κάνει το παραπάνω να ισούται με γραμμή 3 του L επί U;

Με αντίστοιχο τρόπο, οι υπόλοιπες γραμμές του LU ταυτίζονται με τις γραμμές του A.

9. (α) Υπό ποιες συνθήκες είναι το παρακάτω γινόμενο μη ιδιόμορφο;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(β) Λύστε το σύστημα $Ax = b$ ξεκινώντας με το $Lc = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b.$$

10. (α) Γιατί απαιτούνται κατά προσέγγιση $n^2/2$ βήματα πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης για να λυθεί καθένα από τα $Lc = b$ και $Ux = c$;

(β) Πόσα βήματα χρειάζεται η απαλοιφή για να λύσει 10 συστήματα με τον ίδιο 60 επί 60 πίνακα συντελεστών A;

11. Λύστε το παρακάτω σύστημα σαν δύο τριγωνικά συστήματα, χωρίς να κάνετε τον πολλαπλασιασμό LU για να βρείτε τον A:

$$LUx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

12. Πώς θα παραγοντοποιούσατε τον A σε ένα γινόμενο UL, ενός άνω τριγωνικού επί έναν κάτω τριγωνικό πίνακα; Θα ήταν ίδιοι οι παράγοντες με αυτούς της $A = LU$;

13. Λύστε εφαρμόζοντας απαλοιφή, αντιμεταθέτοντας γραμμές όταν χρειάζεται:

$$\begin{aligned} u + 4v + 2w &= -2 \\ -2u - 8v + 3w &= 32 \\ v + w &= 1 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u + v \quad &= 0 \\ u + v + w &= 1. \end{aligned}$$

Ποιοι πίνακες μετάθεσης χρειάζονται;

14. Γράψτε το σύνολο και των έξι 3 επί 3 πινάκων μετάθεσης, περιλαμβανομένου του $P = I$. Βρείτε τους αντιστρόφους τους, οι οποίοι είναι επίσης πίνακες μετάθεσης. Οι αντίστροφοι ικανοποιούν την $PP^{-1} = I$ και περιλαμβάνονται στο ίδιο σύνολο.

15. Βρείτε (και επαληθεύστε) τις παραγοντοποιήσεις $PA = LDU$ των

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

16. Βρείτε έναν 4 επί 4 πίνακα μετάθεσης που να απαιτεί τρεις αντιμεταθέσεις γραμμών για να μπορέσει να ολοκληρωθεί η απαλοιφή (όπου $U = I$).

17. Η λιγότερο συνηθισμένη μορφή $A = LPU$ αντιμεταθέτει γραμμές μόνο στο τέλος:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \to L^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} = PU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ποιος είναι ο L σε αυτή την περίπτωση; Σε σύγκριση με την $PA = LU$ του Πλαισίου 1I, σε αυτή την περίπτωση οι πολλαπλασιαστές παραμένουν στη θέση τους (το ℓ_{21} είναι 1 και το ℓ_{31} είναι 2 όταν $A = LPU$).

18. Ελέγξτε αν τα παρακάτω συστήματα είναι ιδιόμορφα ή μη ιδιόμορφα, και αν έχουν καμία, μία ή άπειρες λύσεις:

$$\begin{array}{rrrl} & v & -\,w & = 2 \\ u & -\,v & & = 2 \\ u & & -\,w & = 2 \end{array}\quad , \quad \begin{array}{rrrl} & v & -\,w & = 0 \\ u & -\,v & & = 0 \\ u & & -\,w & = 0 \end{array}\quad \text{και} \quad \begin{array}{rrrl} & v & +\,w & = 1 \\ u & +\,v & & = 1 \\ u & & +\,w & = 1. \end{array}$$

19. Ποιοι αριθμοί a, b, c οδηγούν σε αντιμεταθέσεις γραμμών; Ποιοι κάνουν τον πίνακα ιδιόμορφο;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} c & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Στα Προβλήματα 20–31 υπολογίζεται η παραγοντοποίηση $\boldsymbol{A = LU}$ (και $A = LDU$).

20. Η ορθόδρομη απαλοιφή μετατρέπει το $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right] x = b$ στο τριγωνικό $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] x = c$:

$$\begin{array}{r} x + \ \ y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{r} x + \ \ y = 5 \\ y = 2 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 1 & 2 & \mathbf{7} \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{5} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}.$$

Το συγκεκριμένο βήμα αφαίρεσε $\ell_{21} =$ ______ επί τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2. Το αντίστροφο βήμα *προσθέτει* ℓ_{21} επί τη γραμμή 1 στη γραμμή 2. Ο πίνακας για το αντίστροφο βήμα είναι $L =$ ______. Αν πολλαπλασιάσουμε αυτόν τον L με το τριγωνικό σύστημα $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] x = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ προκύπτει ______ = ______. Με σύμβολα, ο L πολλαπλασιάζει το $Ux = c$ και προκύπτει ______.

21. (3 επί 3 σύστημα) Η ορθόδρομη απαλοιφή μετατρέπει το $Ax = b$ στο τριγωνικό $Ux = c$:

$$\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 5 \\ x + 2y + 3z = 7 \\ x + 3y + 6z = 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 5 \\ y + 2z = 2 \\ 2y + 5z = 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = 5 \\ y + 2z = 2 \\ z = 2. \end{array}$$

Η εξίσωση $z = 2$ του $Ux = c$ προκύπτει από την αρχική $x+3y+6z = 11$ του $Ax = b$ με αφαίρεση $\ell_{31} =$ ___ επί την εξίσωση 1 και $\ell_{32} =$ ___ επί την *τελική* εξίσωση 2. Αντιστρέφοντας τα βήματα, ανακτήσετε την $[1 \ \ 3 \ \ 6 \ \ 11]$ του $[A \ \ b]$ από τις τελικές $[1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 5]$, $[0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 2]$ και $[0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 2]$ του $[U \ \ c]$:

$$\text{γραμμή 3 του } \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = (\ell_{31} \text{ γραμμή } 1 + \ell_{32} \text{ γραμμή } 2 + 1 \text{ γραμμή } 3) \text{ του } \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}.$$

Με όρους πινάκων, αυτό είναι πολλαπλασιασμός με τον L. Άρα $A = LU$ και $b = Lc$.

22. Ποια είναι τα 3 επί 3 τριγωνικά συστήματα $Lc = b$ και $Ux = c$ του Προβλήματος 21; Επιβεβαιώστε ότι το $c = (5, 2, 2)$ είναι λύση το πρώτου. Ποιο x είναι λύση του δεύτερου;

23. Ποιοι δύο πίνακες απαλοιφής E_{21} και E_{32} μετατρέπουν τον A στην άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{21}A = U$; Πολλαπλασιάστε με E_{32}^{-1} και E_{21}^{-1} για να παραγοντοποιήσετε τον A στη μορφή $LU = E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

24. Ποιοι τρεις πίνακες απαλοιφής E_{21}, E_{31}, E_{32} μετατρέπουν τον A στην άνω τριγωνική μορφή $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$; Πολλαπλασιάζοντας με E_{32}^{-1}, E_{31}^{-1} και E_{21}^{-1}, παραγοντοποιήστε τον A στη μορφή LU όπου $L = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}$. Βρείτε τους L και U:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

25. Όταν εμφανίζεται μηδενικό σε θέση οδηγού, η παραγοντοποίηση $A = LU$ *είναι αδύνατη*! (Χρειαζόμαστε μη μηδενικούς οδηγούς d, f, i στον U.) Δείξτε απευθείας γιατί τα παρακάτω είναι και τα δύο αδύνατα:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \ell & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \ell & 1 & \\ m & n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & e & g \\ & f & h \\ & & i \end{bmatrix}.$$

26. Ποιος αριθμός c οδηγεί σε μηδενικό στη δεύτερη θέση οδηγού; Χρειάζεται μια αντιμετάθεση γραμμής και η $A = LU$ είναι αδύνατη. Ποιο c οδηγεί σε μηδενικό στην τρίτη θέση οδηγού; Σε αυτή την περίπτωση, η αντιμετάθεση γραμμών δεν βοηθάει και η απαλοιφή αποτυγχάνει:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Ποιοι είναι οι L και D για τον παρακάτω πίνακα A; Ποιος είναι ο U στην $A = LU$ και ποιος ο νέος U στην $A = LDU$;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

28. Οι A και B είναι συμμετρικοί ως προς τη διαγώνιο (διότι $4 = 4$). Βρείτε τις τριπλές παραγοντοποιήσεις τους, LDU, και αναφέρετε πώς σχετίζεται ο U με τον L για τους παρακάτω συμμετρικούς πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

29. (Προτεινόμενο) Υπολογίστε τους L και U για τον συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τέσσερις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d ώστε να έχουμε $A = LU$ με τέσσερις οδηγούς.

30. Βρείτε τους L και U για τον μη συμμετρικό πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & r & r & r \\ a & b & s & s \\ a & b & c & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις τέσσερις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d, r, s, t ώστε να έχουμε $A = LU$ με τέσσερις οδηγούς.

31. Οι *τριδιαγώνιοι πίνακες* έχουν μηδενικά στοιχεία παντού εκτός από την κύρια διαγώνιο και τις δύο παρακείμενες διαγωνίους. Παραγοντοποιήστε τους παρακάτω πίνακες στις μορφές $A = LU$ και $A = LDV$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix}.$$

32. Λύστε το τριγωνικό σύστημα $Lc = b$ για να βρείτε το c. Κατόπιν λύστε την $Ux = c$ για να βρείτε το x:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Για ασφάλεια, βρείτε τον $A = LU$ και λύστε την $Ax = b$ ως συνήθως. Κυκλώστε το c όταν το δείτε.

33. Λύστε το $Lc = b$ για να βρείτε το c. Κατόπιν λύστε το $Ux = c$ για να βρείτε το x. Ποιος ήταν ο A;

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

34. Αν οι A και B έχουν μη μηδενικά στοιχεία στις θέσεις που σημειώνονται με x, ποια μηδενικά παραμένουν μηδενικά στους παράγοντές τους L και U;

$$A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} x & x & x & 0 \\ x & x & 0 & x \\ x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}.$$

35. (Σημαντικό) Αν ο A έχει οδηγούς $2, 7, 6$ χωρίς αντιμεταθέσεις γραμμών, ποιοι είναι οι οδηγοί του άνω αριστερά 2 επί 2 υποπίνακα B (χωρίς τη γραμμή 3 και τη στήλη 3); Εξηγήστε γιατί.

36. Ξεκινώντας από έναν 3 επί 3 πίνακα A με οδηγούς $2, 7, 6$, προσθέστε μια τέταρτη γραμμή και στήλη ώστε να προκύψει ο M. Ποιοι είναι οι τρεις πρώτοι οδηγοί του M και γιατί; Ποια τέταρτη γραμμή και στήλη θα δώσουν σίγουρα το 9 ως τέταρτο οδηγό;

37. Χρησιμοποιώντας την `chol(pascal(5))` βρείτε τους τριγωνικούς παράγοντες του πίνακα `pascal(5)` της MATLAB. Οι αντιμεταθέσεις γραμμών της `[L, U] = lu(pascal(5))` καταστρέφουν τη δομή του τριγώνου του Pascal!

38. (Επανάληψη) Για ποιους αριθμούς c είναι αδύνατη η $A = LU$ —με τρεις οδηγούς;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & c & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

39. Εκτιμήστε τη χρονική διαφορά για κάθε νέο δεξί μέλος b όταν $n = 800$. Κατασκευάστε τους A = rand(800), b = rand(800,1) και B = rand(800,9). Συγκρίνετε τους χρόνους με τις tic; A\b; toc και tic; A\B; toc (η οποία λύνει και για τα 9 δεξιά μέλη).

Τα Προβλήματα 40–48 αφορούν τους πίνακες μετάθεσης.

40. Υπάρχουν 12 «*άρτιες*» μεταθέσεις του $(1, 2, 3, 4)$, με *άρτιο πλήθος αντιμεταθέσεων*. Δύο από αυτές είναι το $(1, 2, 3, 4)$, χωρίς καμία αντιμετάθεση, και το $(4, 3, 2, 1)$, με δύο αντιμεταθέσεις. Γράψτε τις υπόλοιπες δέκα. Αντί να τις γράψετε με τη μορφή 4 επί 4 πινάκων, χρησιμοποιήστε τους αριθμούς $4, 3, 2, 1$ για να δείξετε τη θέση του 1 σε κάθε γραμμή.

41. Πόσες αντιμεταθέσεις χρειάζεται να κάνουμε για να επανέλθουμε από το $(5, 4, 3, 2, 1)$ στο $(1, 2, 3, 4, 5)$; Πόσες αντιμεταθέσεις χρειάζεται να κάνουμε για να μεταβούμε από το $(6, 5, 4, 3, 2, 1)$ στο $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$; Το ένα πλήθος αντιμεταθέσεων είναι άρτιο και το άλλο περιττό. Για τη μετάβαση από το $(n, \ldots, 1)$ στο $(1, \ldots, n)$, δείξτε ότι για $n = 100$ και 101 το πλήθος είναι άρτιο, ενώ για $n = 102$ και 103 είναι περιττό.

42. Αν οι P_1 και P_2 είναι πίνακες μετάθεσης, το ίδιο είναι και ο P_1P_2, ο οποίος έχει και αυτός τις γραμμές του I με κάποια σειρά. Δώστε παραδείγματα όπου $P_1P_2 \neq P_2P_1$ και $P_3P_4 = P_4P_3$.

43. (Προσπαθήστε να λύσετε αυτό το πρόβλημα.) Ποια μετάθεση κάνει τον PA άνω τριγωνικό; Ποιες μεταθέσεις κάνουν τον P_1AP_2 κάτω τριγωνικό; ***Ο πολλαπλασιασμός του A*** *από δεξιά* ***με τον*** $\boldsymbol{P_2}$ ***αντιμεταθέτει τις*** ______ ***του*** A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

44. Βρείτε έναν 3 επί 3 πίνακα μετάθεσης για τον οποίο $P^3 = I$ (αλλά όχι $P = I$). Βρείτε έναν 4 επί 4 πίνακα μετάθεσης $\widehat{P}$ για τον οποίο $\widehat{P}^4 \neq I$.

45. Αν υπολογίσουμε διαδοχικά τις δυνάμεις μιας μετάθεσης, γιατί κάποιος P^k θα ισούται τελικά με τον I; Βρείτε έναν 5 επί 5 πίνακα μετάθεσης P για τον οποίο η μικρότερη δύναμη που ισούται με I να είναι η P^6. (Αυτό το πρόβλημα είναι δύσκολο. Συνδυάστε ένα 2 επί 2 μπλοκ με ένα 3 επί 3 μπλοκ.)

46. Ο πίνακας P του οποίου το γινόμενο με το (x, y, z) είναι το (z, x, y) είναι και πίνακας στροφής. Βρείτε τους P και P^3. Ο άξονας στροφής $a = (1, 1, 1)$ δεν μετακινείται, ισούται με Pa. Ποια είναι η γωνία στροφής της μετάβασης από το $v = (2, 3, -5)$ στο $Pv = (-5, 2, 3)$;

47. Αν P είναι ένας πίνακας μετάθεσης, βρείτε ένα μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $(I - P)x = 0$. (Αυτό θα σημαίνει ότι ο $I - P$ δεν έχει αντίστροφο και ότι έχει μηδενική ορίζουσα.)

48. Αν ο P έχει μονάδες στην αντιδιαγώνιο, που ξεκινάει από το $(1, n)$ και καταλήγει στο $(n, 1)$, περιγράψτε τον PAP.

1.6 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΣΤΡΟΦΟΙ

Ο αντίστροφος ενός n επί n πίνακα είναι ένας άλλος n επί n πίνακας. Ο αντίστροφος του A συμβολίζεται με A^{-1}. Η θεμελιώδης ιδιότητα είναι απλή: *Αν πολλαπλασιάσουμε με A και κατόπιν πολλαπλασιάσουμε με A^{-1}, επιστρέφουμε στο σημείο από όπου ξεκινήσαμε*:

Αντίστροφος πίνακας Αν $\quad b = Ax \quad$ τότε $\quad A^{-1}b = x.$

Επομένως, $A^{-1}Ax = x$. Ο πίνακας A^{-1} επί A είναι ο ταυτοτικός πίνακας. ***Δεν έχουν όλοι οι πίνακες αντίστροφο***. ***Αντίστροφος είναι αδύνατο να υπάρχει αν το Ax είναι μηδενικό και το x είναι μη μηδενικό***. Σε αυτή την περίπτωση, ο A^{-1} θα έπρεπε να μας επαναφέρει από το $Ax = 0$ στο x. Κανένας πίνακας δεν μπορεί να πολλαπλασιάσει αυτό το μηδενικό διάνυσμα Ax και να δώσει ένα μη μηδενικό διάνυσμα x.

Στόχος μας είναι να ορίσουμε τον αντίστροφο πίνακα A^{-1}, να τον υπολογίσουμε και να τον χρησιμοποιήσουμε, όταν υπάρχει —και κατόπιν να καταλάβουμε ποιοι πίνακες δεν έχουν αντίστροφο.

1ΙΑ Ο **αντίστροφος** του A είναι ένας πίνακας B τέτοιος ώστε $BA = I$ και $AB = I$. Υπάρχει το πολύ ένας τέτοιος B, και συμβολίζεται με A^{-1}:

$$A^{-1}A = I \qquad \text{και} \qquad AA^{-1} = I. \tag{1}$$

Σημείωση 1 ***Ο αντίστροφος υπάρχει αν και μόνο αν η απαλοιφή παράγει n οδηγούς*** (επιτρέπονται αντιμεταθέσεις γραμμών). Η απαλοιφή λύνει το $Ax = b$ χωρίς να βρίσκει ρητά τον A^{-1}.

Σημείωση 2 Ο πίνακας A δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικούς αντιστρόφους. Ας υποθέσουμε ότι $BA = I$ και επίσης $AC = I$. Έπεται ότι $B = C$, σύμφωνα με την παρακάτω «απόδειξη με βάση τις παρενθέσεις»:

$$\text{Από την} \quad B(AC) = (BA)C \quad \text{έπεται ότι} \quad BI = IC \quad \text{η οποία είναι η} \quad B = C. \tag{2}$$

Αυτό δείχνει ότι ο *αριστερός αντίστροφος* B (με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε από αριστερά) και ο *δεξιός αντίστροφος* C (με τον οποίο πολλαπλασιάζουμε τον A από δεξιά ώστε να προκύψει $AC = I$) πρέπει να είναι ο *ίδιος πίνακας*.

Σημείωση 3 Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η μία και μοναδική λύση της $Ax = b$ είναι η $x = A^{-1}b$:

Πολλαπλασιάζουμε την $\quad \boldsymbol{Ax = b} \quad$ ***με*** $\quad \boldsymbol{A^{-1}}, \quad$ ***οπότε*** $\quad \boldsymbol{x = A^{-1}Ax = A^{-1}b}.$

Σημείωση 4 (Σημαντικό) ***Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα x τέτοιο ώστε $Ax = \mathbf{0}$***, *τότε ο A δεν μπορεί να έχει αντίστροφο*. Επαναλαμβάνουμε: Κανένας πίνακας δεν μπορεί να μας επαναφέρει από το 0 στο x.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η $Ax = 0$ μπορεί να έχει μόνο τη μηδενική λύση $x = 0$.

Σημείωση 5 Ένας 2 επί 2 πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν το $ad - bc$ δεν είναι μηδέν:

$$\textbf{2 επί 2 αντίστροφος} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ο αριθμός $ad - bc$ είναι η *ορίζουσα* του A. Ένας πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν η ορίζουσά του δεν είναι μηδέν (Κεφάλαιο 4). Στη MATLAB, ο έλεγχος αντιστρεψιμότητας γίνεται μέσω *της αναζήτησης n μη μηδενικών οδηγών*. Η απαλοιφή παράγει αυτούς τους οδηγούς πριν εμφανιστεί η ορίζουσα.

Σημείωση 6 Ένας διαγώνιος πίνακας έχει αντίστροφο αν κανένα στοιχείο της διαγωνίου δεν είναι μηδέν:

$$\text{Αν} \quad A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1/d_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad AA^{-1} = I.$$

Όταν έχουμε δύο πίνακες, δεν μπορούμε να κάνουμε πολλά για τον αντίστροφο του $A + B$. Το άθροισμα μπορεί να είναι ή να μην είναι αντιστρέψιμο. Ο βασικός τύπος για τις πράξεις μεταξύ πινάκων αφορά τον αντίστροφο του *γινομένου* AB δύο πινάκων. Το ίδιο ισχύει και για τους συνήθεις αριθμούς: δεν μπορούμε να απλοποιήσουμε εύκολα το $(a + b)^{-1}$, αλλά το $1/ab$ διασπάται σε $1/a$ επί $1/b$. Όμως στην περίπτωση των πινάκων, *πρέπει να είναι σωστή η σειρά του πολλαπλασιασμού* —αν $ABx = y$ τότε $Bx = A^{-1}y$ και $x = B^{-1}A^{-1}y$. **Οι αντίστροφοι εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά**.

1IB Ένα γινόμενο AB αντιστρέψιμων πινάκων αντιστρέφεται μέσω του $B^{-1}A^{-1}$:

$$\textbf{Αντίστροφος του } \boldsymbol{AB} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{4}$$

Απόδειξη Για να δείξουμε ότι ο $B^{-1}A^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του AB, τους πολλαπλασιάζουμε και χρησιμοποιούμε την προσεταιριστική ιδιότητα για να απομακρύνουμε τις παρενθέσεις. Επισημαίνουμε ότι ο B βρίσκεται δίπλα στον B^{-1}:

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}IB = B^{-1}B = I. \end{aligned}$$

■

Αντίστοιχος κανόνας ισχύει για τρεις ή περισσότερους πίνακες:

$$\textbf{Αντίστροφος του } \boldsymbol{ABC} \qquad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}.$$

Είδαμε αυτή την αλλαγή σειράς όταν αντιστρέψαμε τους πίνακες απαλοιφής E, F, G για να επανέλθουμε από τον U στον A. Στην ορθόδρομη κατεύθυνση, ο $GFEA$ ήταν ο U. Στην ανάδρομη κατεύθυνση, ο $L = E^{-1}F^{-1}G^{-1}$ ήταν το γινόμενο των αντιστρόφων. *Αφού ο G ήταν τελευταίος, ο G^{-1} είναι πρώτος*. Παρακαλώ επιβεβαιώστε ότι ο A^{-1} θα ήταν ο $U^{-1}GFE$.

Ο υπολογισμός του A^{-1}: Η μέθοδος Gauss–Jordan

Η εξίσωση $AA^{-1} = I$, αν θεωρηθεί ***στήλη προς στήλη***, προσδιορίζει κάθε στήλη του A^{-1}. Η πρώτη στήλη του A^{-1} πολλαπλασιάζεται με A και δίνει την πρώτη στήλη του ταυτοτικού πίνακα: $Ax_1 = e_1$. Με αντίστοιχο τρόπο, $Ax_2 = e_2$ και $Ax_3 = e_3$· τα e είναι οι στήλες του I. Σε ένα 3 επί 3 παράδειγμα, το γινόμενο A επί A^{-1} ισούται με I:

$$\boldsymbol{Ax_i = e_i} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Άρα έχουμε τρία συστήματα εξισώσεων (ή n συστήματα), τα οποία έχουν όλα τον ίδιο πίνακα συντελεστών A. Τα δεξιά μέλη e_1, e_2, e_3 είναι διαφορετικά, αλλά η απαλοιφή μπορεί να πραγματοποιηθεί *σε όλα τα συστήματα ταυτόχρονα*. Αυτή είναι η ***μέθοδος Gauss–Jordan***. Αντί να σταματήσει στον U και να αρχίσει την ανάδρομη αντικατάσταση, συνεχίζει αφαιρώντας πολλαπλάσια μιας γραμμής *από τις από πάνω γραμμές*. Με αυτό τον τρόπο παράγονται μηδενικά τόσο πάνω όσο και κάτω από τη διαγώνιο. Όταν φτάσει στον ταυτοτικό πίνακα έχει βρει τον A^{-1}.

Στο παράδειγμα κρατάμε και τις τρεις στήλες e_1, e_2, e_3, και εργαζόμαστε με γραμμές μήκους έξι:

Παράδειγμα 1 Χρήση της μεθόδου Gauss–Jordan για την εύρεση του A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{7} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{οδηγός} = \mathbf{2} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{-2} & -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{3} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{οδηγός} = \mathbf{-8} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-8} & \mathbf{-2} & -2 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U} & L^{-1} \end{bmatrix}.$$

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνεται το πρώτο μισό —η ορθόδρομη απαλοιφή. Ο άνω τριγωνικός U εμφανίζεται στις τρεις πρώτες στήλες. Οι άλλες τρεις στήλες είναι ίδιες με τις στήλες του L^{-1}. (Το αποτέλεσμα της εφαρμογής των στοιχειωδών πράξεων GFE στον ταυτοτικό πίνακα.) Στο δεύτερο μισό θα μεταβούμε από τον U στον I (πολλαπλασιάζοντας με U^{-1}). Αυτό θα μετατρέψει τον L^{-1} στον $U^{-1}L^{-1}$, που είναι ο A^{-1}. **Δημιουργώντας μηδενικά**

πάνω από τους οδηγούς, φτάνουμε στον $\boldsymbol{A^{-1}}$:

$$\textbf{Δεύτερο μισό} \quad \begin{bmatrix} U & L^{-1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{0} & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & \mathbf{0} & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{μηδενικά πάνω από τους οδηγούς} \to \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{6}{8} \\ 0 & -8 & \mathbf{0} & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{διαίρεση με τους οδηγούς} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{\frac{12}{16}} & \mathbf{-\frac{5}{16}} & \mathbf{-\frac{6}{16}} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{\frac{4}{8}} & \mathbf{-\frac{3}{8}} & \mathbf{-\frac{2}{8}} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \boldsymbol{A^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Στο τελευταίο βήμα διαιρέσαμε τις γραμμές με τους αντίστοιχους οδηγούς 2, -8 και 1. Ο πίνακας συντελεστών στο αριστερό μισό έγινε ο ταυτοτικός πίνακας. Αφού από τον A οδηγηθήκαμε στον I, οι ίδιες πράξεις στο δεξιό μισό πρέπει να μας οδήγησαν από τον I στον A^{-1}. Άρα έχουμε υπολογίσει τον αντίστροφο.

Μια σημείωση για το μέλλον: Βλέπουμε ότι η ορίζουσα -16 εμφανίζεται στους παρονομαστές του A^{-1}. **Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των οδηγών $\mathbf{(2)(-8)(1)}$**. Εμφανίζεται στο τέλος, όταν οι γραμμές διαιρούνται με τους οδηγούς.

Παρατήρηση 1 Παρά τη σπουδαία μας επιτυχία να υπολογίσουμε τον A^{-1}, δεν συνιστώ τον υπολογισμό του. Ομολογουμένως, ο A^{-1} λύνει την $Ax = b$ σε ένα βήμα. Ωστόσο, δύο τριγωνικά βήματα είναι καλύτερα:

$$\text{η} \quad x = A^{-1}b \quad \text{διασπάται στις} \quad Lc = b \quad \text{και} \quad Ux = c.$$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε $c = L^{-1}b$ και κατόπιν $x = U^{-1}c = U^{-1}L^{-1}b$. Προσέξτε όμως ότι δεν σχηματίσαμε ρητά, και όταν λύνουμε πραγματικά προβλήματα *δεν θα πρέπει να σχηματίζουμε*, τους πίνακες L^{-1} και U^{-1}. Θα ήταν σπατάλη χρόνου, αφού χρειαζόμαστε μόνο την ανάδρομη αντικατάσταση για το x (και η ορθόδρομη αντικατάσταση έδωσε το c).

Αντίστοιχη παρατήρηση ισχύει για τον A^{-1}· ο πολλαπλασιασμός $A^{-1}b$ θα απαιτούσε και αυτός n^2 βήματα. ***Αυτό που θέλουμε είναι η λύση, και όχι όλα τα στοιχεία του αντιστρόφου.***

Παρατήρηση 2 Από καθαρή περιέργεια, θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τις πράξεις που απαιτούνται για να βρούμε τον A^{-1}. Συνήθως, το πλήθος τους για κάθε νέο δεξί μέλος είναι n^2, οι μισές για την ορθόδρομη κατεύθυνση και οι άλλες μισές για την ανάδρομη αντικατάσταση. Για n δεξιά μέλη $e_1, \ldots, e_n$, αυτό δίνει n^3. Αν συμπεριλάβουμε και τις $n^3/3$ πράξεις επί του ίδιου του A, το άθροισμα φαίνεται να είναι $4n^3/3$.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι κάπως υψηλότερο από το πραγματικό λόγω των μηδενικών που περιέχει κάθε e_j. Η ορθόδρομη απαλοιφή αλλάζει μόνο τα μηδενικά κάτω από το 1. Αυτό το τμήμα έχει μόνο $n - j$ συνιστώσες, άρα το πλήθος για το e_j είναι στην πραγματικότητα $(n-j)^2/2$. Αθροίζοντας για όλα τα j, βρίσκουμε ότι το σύνολο για την ορθόδρομη απαλοιφή είναι $n^3/6$. Αυτό πρέπει να συνδυαστεί με τις συνήθεις $n^3/3$ πράξεις που εφαρμόζονται στον

A και τα $n(n^2/2)$ βήματα της ανάδρομης αντικατάστασης που παράγουν τελικά τις στήλες x_j του A^{-1}. *Το τελικό πλήθος πολλαπλασιασμών για τον υπολογισμό του A^{-1} είναι n^3*:

$$\textbf{Πλήθος πράξεων} \qquad \frac{n^3}{6} + \frac{n^3}{3} + n\left(\frac{n^2}{2}\right) = n^3.$$

Το πλήθος αυτό είναι αξιοσημείωτα χαμηλό. Δεδομένου ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων απαιτεί από μόνος του n^3 βήματα, για τον υπολογισμό του A^{-1} απαιτούνται τόσες πράξεις όσες απαιτούνται για τον υπολογισμό του A^2! Το γεγονός αυτό ακούγεται σχεδόν απίστευτο (και, από όσο μπορούμε να συμπεράνουμε, για τον υπολογισμό του A^3 απαιτούνται οι διπλάσιες πράξεις). Παρόλα αυτά, αν δεν μας χρειάζεται ο A^{-1}, δεν θα πρέπει να τον υπολογίσουμε.

Παρατήρηση 3 Στη μέθοδο Gauss–Jordan κινηθήκαμε ορθόδρομα μέχρι να φτάσουμε στον U, πριν ξεκινήσουμε την ανάδρομη πορεία παραγωγής των μηδενικών πάνω από τους οδηγούς. Κινηθήκαμε δηλαδή όπως στην απαλοιφή Gauss, αλλά τα πράγματα μπορούν να γίνουν και με διαφορετική σειρά. Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τον δεύτερο οδηγό μόλις φτάσαμε σε αυτόν, ώστε να δημιουργήσουμε ένα μηδέν τόσο από πάνω όσο και από κάτω του. Αυτό δεν είναι έξυπνο. Εκείνη τη στιγμή, η δεύτερη γραμμή είναι πρακτικά γεμάτη, ενώ προς το τέλος έχει μηδενικά που προέκυψαν από τις γραμμοπράξεις που έχουν ήδη λάβει χώρα στις από πάνω γραμμές.

Αντιστρέψιμος = Μη ιδιόμορφος (n οδηγοί)

Τελικά, θέλουμε να ξέρουμε ποιοι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και ποιοι δεν είναι. Αυτό το ερώτημα είναι τόσο σημαντικό που έχει πολλές απαντήσεις. *Βλ. την τελευταία σελίδα του βιβλίου!*

Σε καθένα από τα πέντε πρώτα κεφάλαια θα παρουσιάσουμε ένα διαφορετικό (αλλά ισοδύναμο) κριτήριο αντιστρεψιμότητας. Μερικές φορές, τα κριτήρια γενικεύονται για παραλληλόγραμμους πίνακες και μονόπλευρους αντιστρόφους: Στο Κεφάλαιο 2 αναζητούμε ανεξάρτητες γραμμές και ανεξάρτητες στήλες, και στο Κεφάλαιο 3 αντιστρέφουμε τον AA^{T} και τον $A^{\mathrm{T}}A$. Στα άλλα κεφάλαια αναζητούμε ***μη μηδενικές ορίζουσες***, ***μη μηδενικές ιδιοτιμές*** ή ***μη μηδενικούς οδηγούς***. Το τελευταίο είναι το κριτήριο που συναντάμε στην απαλοιφή Gauss. Θα δείξουμε (σε λίγες θεωρητικές παραγράφους) ότι το κριτήριο των οδηγών επιτυγχάνει.

Ας υποθέσουμε ότι ο A έχει ένα πλήρες σύνολο n οδηγών. Από το $AA^{-1} = I$ προκύπτουν n ξεχωριστά συστήματα $Ax_i = e_i$ για τις στήλες του A^{-1}, τα οποία μπορούν να επιλυθούν με απαλοιφή ή με τη μέθοδο Gauss–Jordan. Μπορεί να χρειαστούν αντιμεταθέσεις γραμμών, αλλά οι στήλες του A^{-1} είναι μονοσήμαντα ορισμένες.

Για να είμαστε ακριβείς, πρέπει να δείξουμε ότι ο πίνακας A^{-1} με αυτές τις στήλες είναι και *αριστερός* αντίστροφος. Λύνοντας την $AA^{-1} = I$ έχουμε λύσει ταυτόχρονα και την $A^{-1}A = I$, αλλά γιατί; **Ένας μονόπλευρος αντίστροφος ενός τετραγωνικού πίνακα είναι αυτομάτως και αμφίπλευρος αντίστροφος**. Για να καταλάβετε γιατί, προσέξτε ότι *κάθε βήμα της μεθόδου Gauss–Jordan είναι ένας πολλαπλασιασμός από αριστερά με έναν στοιχειώδη πίνακα*. Επιτρέπουμε τρία είδη στοιχειωδών πινάκων:

1. τους E_{ij} για να αφαιρούμε ένα πολλαπλάσιο ℓ της γραμμής j από τη γραμμή i,

2. τους P_{ij} για να αντιμεταθέτουμε τις γραμμές i και j,

3. τους D (ή D^{-1}) για να διαιρούμε όλες τις γραμμές με τους οδηγούς τους.

Η μέθοδος Gauss–Jordan είναι στην πραγματικότητα μια γιγάντια ακολουθία πολλαπλασιασμών πινάκων:

$$(D^{-1} \cdots E \cdots P \cdots E)A = I. \tag{6}$$

Ο πίνακας στην παρένθεση, στα αριστερά του A, είναι προφανώς ένας αριστερός αντίστροφος! Υπάρχει, ισούται με τον δεξιό αντίστροφο σύμφωνα με τη Σημείωση 2, άρα ***κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας είναι αντιστρέψιμος***.

Ισχύει και το αντίστροφο: ***Αν ο Α είναι αντιστρέψιμος, έχει n οδηγούς***. Σε μια ακραία περίπτωση, αυτό είναι προφανές: Ο A δεν μπορεί να έχει μια ολόκληρη στήλη μηδενικών. Ο αντίστροφος δεν θα μπορούσε ποτέ να δώσει μια στήλη του I πολλαπλασιάζοντας μια στήλη μηδενικών. Σε μια λιγότερο ακραία περίπτωση, ας υποθέσουμε ότι η απαλοιφή ξεκινάει με έναν αντιστρέψιμο πίνακα A, αλλά αποτυγχάνει όταν φτάσει στη στήλη 3:

Αποτυχία
Δεν υπάρχει οδηγός στη στήλη 3

$$A' = \begin{bmatrix} d_1 & x & x & x \\ 0 & d_2 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο πίνακας δεν μπορεί να έχει αντίστροφο, ανεξάρτητα από το ποια είναι τα x. Μια απόδειξη είναι να χρησιμοποιήσουμε στηλοπράξεις (για πρώτη φορά;) ώστε να μηδενίσουμε ολόκληρη την τρίτη στήλη. Αφαιρώντας πολλαπλάσια της στήλης 2 και κατόπιν της στήλης 1, φτάνουμε σε έναν πίνακα που είναι σίγουρα μη αντιστρέψιμος. Συνεπώς, ο αρχικός A δεν ήταν αντιστρέψιμος. Η απαλοιφή μάς δίνει ένα πλήρες κριτήριο: *Ένας n επί n πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει n οδηγούς.*

Ο ανάστροφος πίνακας

Χρειαζόμαστε έναν ακόμη πίνακα, ο οποίος ευτυχώς είναι πολύ απλούστερος από τον αντίστροφο. Ο ***ανάστροφος*** του A συμβολίζεται με A^{T}. Οι στήλες του προκύπτουν απευθείας από τις γραμμές του A —*η i-οστή γραμμή του A γίνεται η i-οστή στήλη του A^{T}*:

Ανάστροφος Αν $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ τότε $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Ταυτόχρονα, οι στήλες του A γίνονται οι γραμμές του A^{T}. Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, τότε ο A^{T} είναι n επί m. Το τελικό αποτέλεσμα είναι ο κατοπτρισμός του πίνακα ως προς την κύρια διαγωνιό του· το στοιχείο στη γραμμή i και στήλη j του A^{T} είναι το στοιχείο που βρίσκεται στη γραμμή j και στήλη i του A:

Στοιχεία του A^{T}

$$(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}. \tag{7}$$

Ο ανάστροφος ενός κάτω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός. Ο ανάστροφος του A^{T} μας επαναφέρει στον A.

Αν προσθέσουμε δύο πίνακες και αναστρέψουμε το άθροισμα, θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα με το αν αναστρέφαμε πρώτα και στη συνέχεια προσθέταμε: ο $(A+B)^{\mathrm{T}}$ είναι ίδιος με τον $A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$. Ποιος είναι όμως ο ανάστροφος ενός γινομένου AB ή ενός αντιστρόφου A^{-1}; Ακολουθούν οι βασικές σχέσεις αυτής της ενότητας:

1ΙΓ (i) Ο ανάστροφος του AB είναι $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.
(ii) Ο ανάστροφος του A^{-1} είναι $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

Προσέξτε ότι ο τύπος για τον $(AB)^{\mathrm{T}}$ μοιάζει με εκείνον για τον $(AB)^{-1}$. Και στις δύο περιπτώσεις, αντιστρέφουμε τη σειρά και παίρνουμε τους $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ και $B^{-1}A^{-1}$. Η απόδειξη για τον αντίστροφο ήταν εύκολη, αλλά η απόδειξη για τον ανάστροφο απαιτεί εξαιρετική υπομονή με τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Η πρώτη γραμμή του $(AB)^{\mathrm{T}}$ είναι η πρώτη στήλη του AB. Άρα οι στήλες του A σταθμίζονται με την πρώτη στήλη του B. Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές του A^{T} σταθμίζονται με την πρώτη γραμμή του B^{T}. Αυτή ακριβώς είναι η πρώτη γραμμή του $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Οι άλλες γραμμές των $(AB)^{\mathrm{T}}$ και $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ ταυτίζονται και αυτές.

$$\textbf{Ξεκινάμε από τον} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{Αναστρέφουμε} \qquad B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Για να αποδείξουμε τον τύπο για τον $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$, ξεκινάμε από τις $AA^{-1} = I$ και $A^{-1}A = I$ και παίρνουμε αναστρόφους. Στο ένα μέλος, $I^{\mathrm{T}} = I$. Στο άλλο μέλος, από το μέρος (i) γνωρίζουμε τον ανάστροφο του γινομένου. Διαπιστώνουμε ότι ο $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ είναι ο αντίστροφος του A^{T}, άρα αποδείξαμε την (ii):

$$\textbf{Αντίστροφος του } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \textbf{Ανάστροφος του } \boldsymbol{A}^{-1} \qquad (A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = I. \tag{8}$$

Συμμετρικοί πίνακες

Έχοντας αποδείξει τις παραπάνω ιδιότητες, μπορούμε να παρουσιάσουμε μια ειδική κατηγορία πινάκων, ίσως τη σημαντικότερη όλων. ***Ένας συμμετρικός πίνακας είναι ένας πίνακας που ισούται με τον ανάστροφό του***: $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$. Ο πίνακας είναι υποχρεωτικά τετραγωνικός. Κάθε στοιχείο στη μία πλευρά της διαγωνίου ισούται με την «κατοπτρική του εικόνα» στην άλλη πλευρά: $a_{ij} = a_{ji}$. Δύο απλά παραδείγματα είναι οι A και D (και ο A^{-1}):

$$\textbf{Συμμετρικοί πίνακες} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ένας συμμετρικός πίνακας δεν χρειάζεται να είναι αντιστρέψιμος· θα μπορούσε να είναι και ένας πίνακας μηδενικών. *Αν όμως ο A^{-1} υπάρχει είναι και αυτός συμμετρικός*. Σύμφωνα με τη σχέση (ii), ο ανάστροφος του A^{-1} ισούται πάντα με $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$· για έναν συμμετρικό πίνακα αυτός είναι απλώς ο A^{-1}. Ο A^{-1} ισούται με τον ανάστροφό του· είναι συμμετρικός όποτε είναι και ο A. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι ***αν πολλαπλασιάσουμε οποιονδήποτε πίνακα $\boldsymbol{R}$ με τον $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ παίρνουμε έναν συμμετρικό πίνακα***.

Συμμετρικά γινόμενα $R^{\mathrm{T}}R$, RR^{T} και LDL^{T}

Επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε πίνακα R, πιθανώς παραλληλόγραμμο. Αν πολλαπλασιάσουμε τον R^{T} με τον R, το γινόμενο $R^{\mathrm{T}}R$ είναι αυτομάτως ένας τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας:

Ο ανάστροφος του $\boldsymbol{R^{\mathrm{T}}R}$ ***είναι ο*** $\boldsymbol{R^{\mathrm{T}}(R^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}}$, ***ο οποίος είναι ο*** $\boldsymbol{R^{\mathrm{T}}R}$. (9)

Αυτή είναι μια γρήγορη απόδειξη της συμμετρίας του $R^{\mathrm{T}}R$. Κάθε στοιχείο i, j είναι το εσωτερικό γινόμενο της γραμμής i του R^{T} (στήλη i του R) με τη στήλη j του R. Το στοιχείο (j, i) είναι το ίδιο εσωτερικό γινόμενο, στήλη j επί στήλη i. Άρα ο $R^{\mathrm{T}}R$ είναι συμμετρικός.

Ο RR^{T} είναι επίσης συμμετρικός, αλλά διαφορετικός από τον $R^{\mathrm{T}}R$. Η εμπειρία δείχνει ότι τα περισσότερα επιστημονικά προβλήματα που ξεκινούν με έναν παραλληλόγραμμο πίνακα R καταλήγουν στον $R^{\mathrm{T}}R$, ή στον RR^{T}, ή και στους δύο.

Παράδειγμα 2 Από τους $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ και $R^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ προκύπτουν οι $R^{\mathrm{T}}R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $RR^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$.

Το γινόμενο $R^{\mathrm{T}}R$ είναι n επί n. Με την αντίστροφη σειρά, ο RR^{T} είναι m επί m. Ακόμα και αν $m = n$, δεν είναι ιδιαίτερα πιθανό να έχουμε $R^{\mathrm{T}}R = RR^{\mathrm{T}}$. Μπορεί να συμβεί να ισχύει η ισότητα, αλλά δεν είναι το συνηθισμένο.

Οι συμμετρικοί πίνακες εμφανίζονται σε κάθε αντικείμενο που διέπεται από δίκαιους νόμους. «Για κάθε δράση υπάρχει μια ίση και αντίθετη αντίδραση». Στο στοιχείο a_{ij} που δίνει τη δράση του i επί του j αντιστοιχεί το a_{ji}. Θα δούμε αυτή τη συμμετρία στην επόμενη ενότητα, στις διαφορικές εξισώσεις. Στην παρούσα ενότητα, ο LU δεν αποτυπώνει τη συμμετρία αλλά ο LDL^{T} την αποτυπώνει τέλεια.

1ΙΔ Αν ο $A = A^{\mathrm{T}}$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί στη μορφή $A = LDU$ χωρίς αντιμετάθεση γραμμών, τότε ο U είναι ο ανάστροφος του L. ***Η συμμετρική παραγοντοποίηση γίνεται*** $\boldsymbol{A = LDL^{\mathrm{T}}}$.

Ο ανάστροφος του $A = LDU$ είναι ο $A^{\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}$. Αφού $A = A^{\mathrm{T}}$, έχουμε δύο παραγοντοποιήσεις του A σε ένα γινόμενο κάτω τριγωνικού επί διαγώνιο επί άνω τριγωνικό πίνακα. (Ο L^{T} είναι άνω τριγωνικός με μονάδες στη διαγώνιο, ακριβώς όπως ο U.) Αφού η παραγοντοποίηση είναι μοναδική (βλ. Πρόβλημα 17), ο L^{T} πρέπει να ταυτίζεται με τον U.

$$\boldsymbol{L^{\mathrm{T}} = U \text{ και } A = LDL^{\mathrm{T}}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = LDL^{\mathrm{T}}.$$

Όταν εφαρμόζουμε απαλοιφή σε έναν συμμετρικό πίνακα, η $A^{\mathrm{T}} = A$ αποτελεί πλεονέκτημα. Οι μικρότεροι πίνακες παραμένουν συμμετρικοί καθώς προχωράει η απαλοιφή, και μπορούμε να δουλεύουμε με τον μισό πίνακα! Η κάτω δεξιά γωνία παραμένει συμμετρική:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d - \dfrac{b^2}{a} & \boldsymbol{e - \dfrac{bc}{a}} \\ 0 & \boldsymbol{e - \dfrac{bc}{a}} & f - \dfrac{c^2}{a} \end{bmatrix}.$$

Ο όγκος εργασίας της απαλοιφής μειώνεται από $n^3/3$ σε $n^3/6$. Δεν χρειάζεται να αποθηκεύουμε τα στοιχεία και των δύο πλευρών της διαγωνίου ή να αποθηκεύουμε και τον L και τον U.

Προβλήματα 1.6

1. Βρείτε τους αντιστρόφους (δεν απαιτείται ειδικό σύστημα) των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

2. (α) Βρείτε τους αντιστρόφους των πινάκων μετάθεσης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Εξηγήστε γιατί στην περίπτωση των πινάκων μετάθεσης ο P^{-1} *είναι πάντα ίδιος με τον* P^{T}. Δείξτε ότι οι μονάδες βρίσκονται στις σωστές θέσεις ώστε να έχουμε $PP^{\mathrm{T}} = I$.

3. Αν $AB = C$, βρείτε έναν τύπο για τον A^{-1}. Βρείτε επίσης τον A^{-1} αν $PA = LU$.

4. (α) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = AC$, αποδείξτε γρήγορα ότι $B = C$.
(β) Αν $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, βρείτε ένα παράδειγμα όπου $AB = AC$ αλλά $B \neq C$.

5. Αν ο αντίστροφος του A^2 είναι ο B, δείξτε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο AB. (Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος όποτε είναι αντιστρέψιμος ο A^2.)

6. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gauss–Jordan αντιστρέψτε τους

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Βρείτε τρεις 2 επί 2 πίνακες, διαφορετικούς από τους $A = I$ και $A = -I$, που να είναι αντίστροφοι του εαυτού τους: $A^2 = I$.

8. Δείξτε ότι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο λύνοντας την $Ax = 0$ και αποτυγχάνοντας να λύσετε την

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Υποθέστε ότι η απαλοιφή αποτυγχάνει διότι δεν υπάρχει οδηγός στη στήλη 3:

$$\textbf{Ανυπαρξία οδηγού} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι ο A δεν μπορεί να αντιστρέψιμος. Η τρίτη γραμμή του A^{-1}, πολλαπλασιαζόμενο με τον A, θα πρέπει να δώσει την τρίτη γραμμή $[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]$ του $A^{-1}A = I$. Γιατί είναι αυτό αδύνατο;

10. Βρείτε τους αντιστρόφους (με οποιονδήποτε έγκυρο τρόπο) των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

11. Δώστε παραδείγματα πινάκων A και B για τους οποίους

(α) ο $A + B$ δεν είναι αντιστρέψιμος μολονότι οι A και B είναι αντιστρέψιμοι.
(β) ο $A + B$ είναι αντιστρέψιμος μολονότι οι A και B δεν είναι αντιστρέψιμοι.
(γ) οι A, B και $A + B$ είναι όλοι αντιστρέψιμοι.

Στην τελευταία περίπτωση, χρησιμοποιώντας την $A^{-1}(A + B)B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$, δείξτε ότι ο $C = B^{-1} + A^{-1}$ είναι και αυτός αντιστρέψιμος —και βρείτε έναν τύπο για τον C^{-1}.

12. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ποιες ιδιότητες του A ισχύουν και για τον A^{-1};

(α) Ο A είναι τριγωνικός.
(β) Ο A είναι συμμετρικός.
(γ) Ο A είναι τριδιαγώνιος.
(δ) Όλα τα στοιχεία είναι ακέραιοι αριθμοί.
(ε) Όλα τα στοιχεία είναι κλάσματα (περιλαμβάνονται αριθμοί όπως το $\frac{3}{1}$).

13. Αν $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $B = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, υπολογίστε τους $A^{\mathrm{T}}B$, $B^{\mathrm{T}}A$, AB^{T} και BA^{T}.

14. Αν ο B είναι τετραγωνικός, δείξτε ότι ο $A = B + B^{\mathrm{T}}$ είναι πάντα συμμετρικός και ότι ο $K = B - B^{\mathrm{T}}$ είναι πάντα *αντισυμμετρικός* —το οποίο σημαίνει ότι $K^{\mathrm{T}} = -K$. Βρείτε τους πίνακες A και K όταν $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, και γράψτε τον B σαν άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

15. (α) Πόσα στοιχεία μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα σε έναν συμμετρικό πίνακα μεγέθους n;
(β) Πόσα στοιχεία μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα σε έναν αντισυμμετρικό πίνακα ($K^{\mathrm{T}} = -K$) μεγέθους n; Η διαγώνιος του K είναι μηδέν!

16. (α) Αν $A = LDU$, με μονάδες στις διαγωνίους των L και U, ποια είναι η αντίστοιχη παραγοντοποίηση του A^{T}; Προσέξτε ότι οι A και A^{T} (τετραγωνικοί πίνακες χωρίς αντιμεταθέσεις γραμμών) έχουν τους ίδιους οδηγούς.
(β) Ποια τριγωνικά συστήματα θα δώσουν τη λύση του $A^{\mathrm{T}}y = b$;

17. Αν $A = L_1D_1U_1$ και $A = L_2D_2U_2$, αποδείξτε ότι $L_1 = L_2$, $D_1 = D_2$ και $U_1 = U_2$. Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, η παραγοντοποίηση είναι μοναδική.

(α) Συναγάγετε την εξίσωση $L_1^{-1}L_2D_2 = D_1U_1U_2^{-1}$ και εξηγήστε γιατί το ένα μέλος είναι κάτω τριγωνικός και το άλλο άνω τριγωνικός πίνακας.
(β) Συγκρίνετε τις κύριες διαγωνίους και κατόπιν συγκρίνετε τα εκτός διαγωνίων στοιχεία.

18. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία των A και B ώστε οι πίνακες να είναι αντιστρέψιμοι;

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}.$$

19. Υπολογίστε τη συμμετρική LDL^{T} παραγοντοποίηση των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 12 & 18 \\ 5 & 18 & 30 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

20. Βρείτε τον αντίστροφο του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

21. (Αξιοσημείωτο) Αν οι A και B είναι τετραγωνικοί πίνακες, δείξτε ότι ο $I - BA$ είναι αντιστρέψιμος αν ο $I - AB$ είναι αντιστρέψιμος. Ξεκινήστε από την $B(I - AB) = (I - BA)B$.

22. Βρείτε τους αντιστρόφους (απευθείας ή χρησιμοποιώντας τον 2 επί 2 τύπο) των A, B και C:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

23. Λύστε ως προς τις στήλες του $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

24. Δείξτε ότι ο $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ δεν έχει αντίστροφο προσπαθώντας να λύσετε ως προς τη στήλη (x, y):

$$\text{το} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & t \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{πρέπει να περιλαμβάνει το} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

25. (Σημαντικό) Αν για τον A ισχύει γραμμή $1 +$ γραμμή $2 =$ γραμμή 3, δείξτε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος:

(α) Εξηγήστε γιατί το $Ax = (1, 0, 0)$ δεν μπορεί να έχει λύση.
(β) Για ποια δεξιά μέλη (b_1, b_2, b_3) ενδέχεται να έχει λύση το $Ax = b$;
(γ) Τι συμβαίνει στη γραμμή 3 κατά την απαλοιφή;

26. Αν για τον A ισχύει στήλη $1 +$ στήλη $2 =$ στήλη 3, δείξτε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος:

(α) Βρείτε μια μη μηδενική λύση x του $Ax = 0$. Ο πίνακας είναι 3 επί 3.
(β) Μετά την απαλοιφή εξακολουθεί να ισχύει ότι στήλη $1 +$ στήλη $2 =$ στήλη 3. Εξηγήστε γιατί δεν υπάρχει τρίτος οδηγός.

27. Υποθέστε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και ότι αντιμεταθέτουμε τις δύο πρώτες γραμμές του ώστε να καταλήξουμε στον B. Είναι ο νέος πίνακας B αντιστρέψιμος; Πώς θα βρίσκατε τον B^{-1} από τον A^{-1};

28. Αν το γινόμενο $M = ABC$ τριών τετραγωνικών πινάκων είναι αντιστρέψιμο, τότε οι A, B, C είναι αντιστρέψιμοι. Βρείτε έναν τύπο για τον B^{-1} που να περιέχει τους M^{-1}, A και C.

29. Αποδείξτε ότι ένας πίνακας με μια στήλη μηδενικών δεν μπορεί να έχει αντίστροφο.

30. Κάντε τον πολλαπλασιασμό $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}$ επί $\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} & -\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$. Ποιος είναι ο αντίστροφος κάθε πίνακα αν $ad \neq bc$;

31. (α) Ποιος πίνακας E έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τα εξής τρία βήματα; Αφαίρεση της γραμμής 1 από τη γραμμή 2, αφαίρεση της γραμμής 1 από τη γραμμή 3, κατόπιν αφαίρεση της γραμμής 2 από τη γραμμή 3.

(β) Ποιος πίνακας L έχει το ίδιο αποτέλεσμα με τα εξής τρία αντίστροφα βήματα; Πρόσθεση της γραμμής 2 στη γραμμή 3, πρόσθεση της γραμμής 1 στη γραμμή 3, κατόπιν πρόσθεση της γραμμής 1 στη γραμμή 2.

32. Βρείτε τους αριθμούς a και b που απαρτίζουν τον αντίστροφο του `5 * eye(4) - ones(4,4)`:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}.$$

Ποια είναι τα a και b στον αντίστροφο του `6 * eye(5) - ones(5,5)`;

33. Δείξτε ότι ο `A = 4 * eye(4) - ones(4,4)` *δεν* είναι αντιστρέψιμος: Κάντε τον πολλαπλασιασμό `A * ones(4,1)`.

34. Υπάρχουν δεκαέξι 2 επί 2 πίνακες με στοιχεία μονάδες και μηδενικά. Πόσοι από αυτούς είναι αντιστρέψιμοι;

Τα προβλήματα 35–39 αφορούν τη μέθοδο Gauss–Jordan για τον υπολογισμό του A^{-1}.

35. Μετατρέψτε τον I στον A^{-1} καθώς ανάγετε τον A στον I (με γραμμοπράξεις):

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

36. Θεωρήστε το παράδειγμα 3 επί 3 του κειμένου αλλά με θετικά πρόσημα στον A. Απαλείψτε τα στοιχεία πάνω και κάτω από τους οδηγούς ώστε να αναγάγετε τον $[A \ \ I]$ στον $[I \ \ A^{-1}]$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

37. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Gauss–Jordan στον $[A \quad I]$, λύστε το $AA^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

38. Αντιστρέψτε τους παρακάτω πίνακες A με τη μέθοδο Gauss–Jordan ξεκινώντας από τον $[A \quad I]$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

39. Αντιμεταθέτοντας γραμμές και συνεχίζοντας με τη μέθοδο Gauss–Jordan, βρείτε τον A^{-1}:

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

40. Σωστό ή λάθος (με αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος και αιτιολόγηση αν είναι σωστό):

(α) Ένας 4 επί 4 πίνακας με μια γραμμή μηδενικών δεν είναι αντιστρέψιμος.
(β) Ένας πίνακας με μονάδες κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι αντιστρέψιμος.
(γ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ο A^{-1} είναι αντιστρέψιμος.
(δ) Αν ο A^{T} είναι αντιστρέψιμος τότε ο A είναι αντιστρέψιμος.

41. Για ποιους τρεις αριθμούς c δεν είναι αντιστρέψιμος ο παρακάτω πίνακας. Γιατί δεν είναι;

$$A = \begin{bmatrix} 2 & c & c \\ c & c & c \\ 8 & 7 & c \end{bmatrix}.$$

42. Αποδείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν $a \neq 0$ και $a \neq b$ (βρείτε τους οδηγούς και τον A^{-1}):

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

43. Ο παρακάτω πίνακας έχει έναν αξιοσημείωτο αντίστροφο. Βρείτε τον A^{-1} εφαρμόζοντας απαλοιφή στον $[A \quad I]$. Γενικεύοντας για την περίπτωση του «εναλλασσόμενου 5 επί 5 πίνακα», μαντέψτε τον αντίστροφό του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

44. Αν ο B έχει τις στήλες του A με αντίστροφη σειρά, δείξτε ότι ο $A - B$ δεν είναι αντιστρέψιμος λύνοντας το $(A - B)x = 0$. Ένα παράδειγμα θα σας οδηγήσει στο x.

45. Βρείτε τους αντιστρόφους (θεωρώντας ότι υπάρχουν) των παρακάτω μπλοκ πινάκων και επιβεβαιώστε ότι είναι αντίστροφοι:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & D \end{bmatrix}.$$

46. Χρησιμοποιώντας την inv(S), αντιστρέψτε τον συμμετρικό 4 επί 4 πίνακα S = pascal(4) της MATLAB. Κατασκευάστε τον κάτω τριγωνικό πίνακα του Pascal A = abs(pascal(4,1)) και ελέγξτε αν inv(S) = inv(A') * inv(A).

47. Αν A = ones(4,4) και b = rand(4,1), με ποιον τρόπο θα διαπιστώσει η MATLAB ότι το $Ax = b$ δεν έχει λύση; Αν b = ones(4,1), ποια λύση του $Ax = b$ βρίσκει η A\b;

48. Ο M^{-1} δείχνει την αλλαγή που υφίσταται ο A^{-1} (είναι χρήσιμο να το γνωρίζουμε) όταν αφαιρείται από τον A κάποιος πίνακας. Επαληθεύστε το 3ο μέρος κάνοντας προσεκτικά τον πολλαπλασιασμό MM^{-1} ώστε να πάρετε τον I:

1. $M = I - uv^{\mathrm{T}}$ και $M^{-1} = I + uv^{\mathrm{T}}/(1 - v^{\mathrm{T}}u)$.
2. $M = A - uv^{\mathrm{T}}$ και $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}uv^{\mathrm{T}}A^{-1}/(1 - v^{\mathrm{T}}A^{-1}u)$.
3. $M = I - UV$ και $M^{-1} = I_n + U(I_m - VU)^{-1}V$.
4. $M = A - UW^{-1}V$ και $M^{-1} = A^{-1} + A^{-1}U(W - VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$.

Οι τέσσερις ταυτότητες προκύπτουν από το $1, 1$ μπλοκ με αντιστροφή των εξής πινάκων:

$$\begin{bmatrix} I & u \\ v^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & u \\ v^{\mathrm{T}} & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} I_n & U \\ V & I_m \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A & U \\ V & W \end{bmatrix}.$$

Τα Προβλήματα 49–55 αφορούν τις ιδιότητες των ανάστροφων πινάκων.

49. Βρείτε τους A^{T}, A^{-1}, $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ και $(A^{\mathrm{T}})^{-1}$ για τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}.$$

50. Επιβεβαιώστε ότι ο $(AB)^{\mathrm{T}}$ ισούται με τον $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ αλλά είναι διαφορετικός από τον $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Σε περίπτωση που $AB = BA$ (που εν γένει δεν ισχύει!), πώς μπορούμε να αποδείξουμε ότι $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$;

51. (α) Ο πίνακας $((AB)^{-1})^{\mathrm{T}}$ προκύπτει από τους $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ και $(B^{-1})^{\mathrm{T}}$. *Με ποια σειρά;*
(β) Αν ο U είναι άνω τριγωνικός τότε ο $(U^{-1})^{\mathrm{T}}$ είναι ______τριγωνικός.

52. Δείξτε ότι είναι δυνατό να έχουμε $A^2 = 0$ αλλά αδύνατο να έχουμε $A^{\mathrm{T}}A = 0$ (εκτός αν A είναι ο μηδενικός πίνακας).

53. (α) Ποιος αριθμός είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού διάνυσμα γραμμή x^{T} επί A επί στήλη y;

$$x^{\mathrm{T}}Ay = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\quad}.$$

(β) Αυτό ισούται με γραμμή $x^{\mathrm{T}}A =$ ______ επί στήλη $y = (0, 1, 0)$.
(γ) Αυτό ισούται με γραμμή $x^{\mathrm{T}} = [0 \;\; 1]$ επί στήλη $Ay =$ ______.

54. Όταν αναστρέφουμε έναν μπλοκ πίνακα $M = \left[\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right]$, το αποτέλεσμα είναι $M^{\mathrm{T}} =$ ______. Επαληθεύστε το. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι A, B, C, D ώστε ο μπλοκ πίνακας να είναι συμμετρικός;

55. Εξηγήστε γιατί το εσωτερικό γινόμενο των x και y ισούται με το εσωτερικό γινόμενο των Px και Py. Επομένως, η $(Px)^{\mathrm{T}}(Py) = x^{\mathrm{T}}y$ λέει ότι $P^{\mathrm{T}}P = I$ για οποιαδήποτε μετάθεση. Για $x = (1, 2, 3)$ και $y = (1, 4, 2)$, επιλέγοντας κατάλληλα τον P, δείξτε ότι ο $(Px)^{\mathrm{T}}y$ δεν ισούται πάντα με τον $x^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}y)$.

Τα Προβλήματα 56–60 αφορούν τους συμμετρικός πίνακες και τις παραγοντοποιήσεις τους.

56. Αν $A = A^{\mathrm{T}}$ και $B = B^{\mathrm{T}}$, ποιος από τους παρακάτω πίνακες είναι σίγουρα συμμετρικός;
(α) $A^2 - B^2$ (β) $(A + B)(A - B)$ (γ) ABA (δ) $ABAB$.

57. Αν ο $A = A^{\mathrm{T}}$ χρειάζεται μια αντιμετάθεση γραμμών, τότε χρειάζεται και μια αντιμετάθεση στηλών για να παραμείνει συμμετρικός. Στη γλώσσα των πινάκων, ο PA χάνει τη συμμετρία του A, ενώ ο __ ανακτά τη συμμετρία.

58. (α) Πόσα στοιχεία του A μπορούν να επιλεγούν ανεξάρτητα, αν ο $A = A^{\mathrm{T}}$ είναι 5 επί 5;
(β) Πώς δίνουν οι L και D (5 επί 5) το ίδιο πλήθος επιλογών στην περίπτωση του LDL^{T};

59. Υποθέστε ότι ο R είναι παραλληλόγραμμος (m επί n) και ο A συμμετρικός (m επί m).
(α) Αναστρέφοντας τον $R^{\mathrm{T}}AR$, αποδείξτε τη συμμετρία του. Ποιο είναι το σχήμα αυτού του πίνακα;
(β) Δείξτε γιατί ο $R^{\mathrm{T}}R$ δεν έχει αρνητικούς αριθμούς στη διαγώνιό του.

60. Παραγοντοποιήστε τους παρακάτω συμμετρικούς πίνακες στη μορφή $A = LDL^{\mathrm{T}}$. Ο πίνακας D είναι διαγώνιος:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Τα τρία προβλήματα που ακολουθούν αφορούν εφαρμογές της $(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})$.

61. Καλώδια μεταξύ Βοστώνης, Σικάγου και Σιάτλ. Η τάση σε αυτές τις πόλεις είναι x_{B}, x_{C}, x_{S}. Αν μεταξύ των πόλεων υπάρχει μοναδιαία αντίσταση, το y περιέχει τα τρία ρεύματα:

$$\text{Το} \quad y = Ax \quad \text{είναι το} \quad \begin{bmatrix} y_{\mathrm{BC}} \\ y_{\mathrm{CS}} \\ y_{\mathrm{BS}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\mathrm{B}} \\ x_{\mathrm{C}} \\ x_{\mathrm{S}} \end{bmatrix}.$$

(α) Βρείτε τα συνολικά ρεύματα $A^{\mathrm{T}}y$ έξω από τις τρεις πόλεις.
(β) Επαληθεύστε ότι ο $(Ax)^{\mathrm{T}}y$ ταυτίζεται με τον $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$ —και οι δύο έχουν έξι όρους.

62. Για την παραγωγή x_1 φορτηγών και x_2 αεροπλάνων απαιτούνται $x_1 + 50x_2$ τόνοι ατσαλιού, $40x_1 + 1000x_2$ κιλά λάστιχου και $2x_1 + 50x_2$ μήνες εργασίας. Αν τα μοναδιαία κόστη y_1, y_2, y_3 είναι 700 δολάρια ανά τόνο, 3 δολάρια ανά κιλό και 3000 δολάρια ανά μήνα, ποια είναι η τιμή ενός φορτηγού και ενός αεροπλάνου; Οι τιμές αυτές είναι οι συνιστώσες του $A^{\mathrm{T}}y$.

63. Το Ax δίνει την ποσότητα ατσαλιού, λάστιχου και εργασίας που απαιτούνται για την παραγωγή του x στο Πρόβλημα 62. Βρείτε τον A. $(Ax)^{\mathrm{T}}y$ είναι __ ______ των εισροών ενώ $x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}y)$ είναι η τιμή τ__ ______.

64. Ακολουθεί μια νέα παραγοντοποίηση του A σε γινόμενο *ενός τριγωνικού επί έναν συμμετρικό πίνακα*:

Ξεκινάμε με τον $A = LDU$. Έπεται ότι ο A ισούται με $L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$ επί $U^{\mathrm{T}}DU$.

Γιατί είναι τριγωνικός ο $L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$; Η διαγώνιός του αποτελείται μόνο από μονάδες. Γιατί είναι συμμετρικός ο $U^{\mathrm{T}}DU$;

65. Μια *ομάδα* πινάκων περιλαμβάνει τους AB και A^{-1} αν περιλαμβάνει τους A και B. «Τα γινόμενα και οι αντίστροφοι περιλαμβάνονται στην ομάδα». Ποια από τα ακόλουθα σύνολα είναι ομάδες; Κάτω τριγωνικοί πίνακες L με μονάδες στη διαγώνιο, συμμετρικοί πίνακες S, θετικοί πίνακες M, διαγώνιοι αντιστρέψιμοι πίνακες D, πίνακες μετάθεσης P. Σκεφτείτε δύο ακόμη ομάδες πινάκων.

66. Αν κάθε γραμμή ενός 4 επί 4 πίνακα περιέχει τους αριθμούς $0, 1, 2, 3$ με κάποια σειρά, μπορεί να είναι συμμετρικός ο πίνακας; Μπορεί να είναι αντιστρέψιμος;

67. Αποδείξτε ότι ένας τυπικός πίνακας δεν μπορεί να αναστραφεί μέσω μιας αναδιάταξης γραμμών και στηλών.

68. Ένας τετραγωνικός ***βορειοδυτικός πίνακας*** B έχει μηδενικά στη νοτιοανατολική του γωνία, κάτω από την αντιδιαγώνιο που συνδέει το $(1, n)$ με το $(n, 1)$. Θα είναι βορειοδυτικοί πίνακες οι B^{T} και B^2; Ο B^{-1} θα είναι βορειοδυτικός ή νοτιοανατολικός; Ποιο είναι το σχήμα του $BC =$ ***βορειοδυτικός επί νοτιοανατολικός*** πίνακας; Μπορείτε να συνδυάσετε μεταθέσεις με τους συνήθεις L και U (νοτιοδυτικός και βορειανατολικός).

69. Συγκρίνετε τους χρόνους tic; inv(A); toc για A = rand(500) και A = rand(1000). Το πλήθος n^3 των πράξεων λέει ότι ο χρόνος υπολογισμού (τον οποίο μετρούν οι tic; toc) οκταπλασιάζεται όταν διπλασιάζεται το n. Περιμένετε να είναι αντιστρέψιμοι οι τυχαίοι αυτοί A;

70. Οι εντολές I = eye(1000); A = rand(1000); B = triu(A); παράγουν έναν τυχαίο *τριγωνικό* πίνακα B. Συγκρίνετε τον χρόνο εκτέλεσης των inv(B) και B\I. Η πράξη \ της MATLAB είναι κατασκευασμένη έτσι ώστε να χρησιμοποιεί τα μηδενικά του B, ενώ η εντολή inv χρησιμοποιεί τα μηδενικά του I όταν ανάγει τον $[B \;\; I]$ με τη μέθοδο Gauss–Jordan. (Συγκρίνετε επίσης με τις inv(A) και A\I για τον πλήρη πίνακα A.)

71. Δείξτε ότι ο L^{-1} έχει στοιχεία j/i για $i \leq j$ (ο $-1, 2, -1$ πίνακας έχει αυτόν τον L):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε αν οι L = eye(5) - diag(1:5)\diag(1:4,-1) και inv(L) έχουν αυτή τη μορφή.

1.7 ΕΙΔΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σε αυτή την ενότητα έχουμε δύο στόχους. Ο πρώτος είναι να εξηγήσουμε έναν τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται στην πράξη μεγάλα γραμμικά συστήματα της μορφής $Ax = b$. Η αλήθεια είναι ότι ένα μεγάλο και πλήρως ρεαλιστικό πρόβλημα από τη μηχανική ή τα οικονομικά θα μας ανάγκαζε να ξεφύγουμε από το θέμα μας. Υπάρχει όμως μια φυσική και σημαντική εφαρμογή που δεν απαιτεί ιδιαίτερη προετοιμασία.

Ο άλλος στόχος είναι να καταδείξουμε, μέσω της ίδιας εφαρμογής, τις ιδιαίτερες ιδιότητες που έχουν συχνά οι πίνακες συντελεστών. Οι μεγάλοι πίνακες έχουν σχεδόν πάντα μια ξεκάθαρη δομή —συνήθως μια συμμετρική δομή και *πάρα πολλά μηδενικά στοιχεία*. Αφού ένας αραιός πίνακας περιέχει πολύ λιγότερα από n^2 κομμάτια πληροφορίας, οι υπολογισμοί θα πρέπει να είναι γρήγοροι. Θα εξετάσουμε τους *ταινιωτούς πίνακες* για να δούμε πώς η συγκέντρωση κοντά στη διαγώνιο επιταχύνει την απαλοιφή. Στην πραγματικότητα, θα εξετάσουμε έναν ειδικό τριδιαγώνιο πίνακα.

Ο πίνακας φαίνεται στην εξίσωση (6). Προέρχεται από τη μετατροπή μιας διαφορικής εξίσωσης σε εξίσωση πινάκων. Στο συνεχές πρόβλημα αναζητούμε την $u(x)$ σε κάθε x, αλλά ένας υπολογιστής δεν μπορεί να λύσει αυτό το πρόβλημα με ακρίβεια. Πρέπει να το προσεγγίσει μέσω ενός διακριτού προβλήματος —όσο περισσότερους αγνώστους κρατήσουμε, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ακρίβεια και τόσο μεγαλύτερο το κόστος. Το απλό αλλά πολύ τυπικό συνεχές πρόβλημα που θα επιλέξουμε είναι η διαφορική εξίσωση

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 \le x \le 1. \tag{1}$$

Πρόκειται για μια γραμμική εξίσωση με άγνωστο τη συνάρτηση $u(x)$. Στη λύση μπορεί να προστεθεί οποιοσδήποτε συνδυασμός $C + Dx$, αφού η δεύτερη παράγωγος του $C + Dx$ δεν συνεισφέρει τίποτα. Η αβεβαιότητα που εισάγουν οι δύο αυθαίρετες σταθερές C και D αίρεται μέσω μιας «*συνοριακής συνθήκης*» σε καθένα από τα δύο άκρα του διαστήματος:

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = 0. \tag{2}$$

Το αποτέλεσμα είναι ένα *πρόβλημα συνοριακών τιμών δύο σημείων*, το οποίο δεν περιγράφει ένα παροδικό άλλα ένα φαινόμενο σταθερής κατάστασης —για παράδειγμα, την κατανομή θερμοκρασίας σε μία ράβδο τα άκρα της οποίας διατηρούνται σε σταθερή θερμοκρασία $0°$ και η οποία θερμαίνεται από μια πηγή θερμότητας $f(x)$.

Υπενθυμίζουμε ότι στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα διακριτό πρόβλημα —με άλλα λόγια, ένα πρόβλημα γραμμικής άλγεβρας. Για αυτό τον λόγο μπορούμε να δεχτούμε πεπερασμένο μόνο πλήθος πληροφοριών σχετικά με την $f(x)$, φερ' ειπειν τις τιμές της στα n ισαπέχοντα σημεία $x = h, x = 2h, \ldots, x = nh$. Θα υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές τιμές $u_1, \ldots, u_n$ της πραγματικής λύσης u στα ίδια σημεία. Στα άκρα $x = 0$ και $x = 1 = (n+1)h$, οι συνοριακές τιμές είναι $u_0 = 0$ και $u_{n+1} = 0$.

Το πρώτο ερώτημα είναι το εξής: Με τι αντικαθιστούμε την παράγωγο d^2u/dx^2; Μπορούμε να προσεγγίσουμε την πρώτη παράγωγο υπολογίζοντας τον λόγο $\Delta u/\Delta x$ χρησιμοποιώντας πεπερασμένο μέγεθος βήματος και μη επιτρέποντας στο h (ή το Δx) να προσεγγίσει το μηδέν. Η διαφορά Δu μπορεί να υπολογιστεί *προς τα πίσω*, *προς τα εμπρός* ή *και προς τις δύο πλευρές*:

$$\frac{\mathbf{\Delta}\mathrm{u}}{\mathbf{\Delta}\mathrm{x}} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad \text{ή} \quad \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}. \tag{3}$$

Ο τελευταίος τύπος είναι συμμετρικός περί το x και είναι ο ακριβέστερος. Για τη δεύτερη παράγωγο υπάρχει μόνο ένας συνδυασμός, που χρησιμοποιεί μόνο τις τιμές στα x και $x \pm h$:

Δεύτερη διαφορά $$\frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{\mathbf{\Delta^2}\mathrm{u}}{\mathbf{\Delta}\mathrm{x}^\mathbf{2}} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \tag{4}$$

Αυτός ο τύπος έχει επίσης το πλεονέκτημα ότι είναι συμμετρικός περί το x. Επαναλαμβάνουμε ότι το δεξί μέλος προσεγγίζει την πραγματική τιμή της d^2u/dx^2 καθώς $h \to 0$, αλλά το βήμα h πρέπει να είναι θετικό.

Σε κάθε σημείο $x = jh$ του πλέγματος, η εξίσωση $-d^2u/dx^2 = f(x)$ αντικαθίσταται από το διακριτό της ανάλογο (5). Πολλαπλασιάσαμε με h^2 ώστε να πάρουμε τις n εξισώσεις του συστήματος $Au = b$:

Εξίσωση διαφορών $$-u_{j+1} + 2u_j - u_{j-1} = h^2 f(jh) \quad \text{για } j = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Η πρώτη και τελευταία εξίσωση ($j = 1$ και $j = n$) περιλαμβάνουν τις $u_0 = 0$ και $u_{n+1} = 0$, τις οποίες γνωρίζουμε από τις συνοριακές συνθήκες. Οι τιμές αυτές θα μπορούσαν να μετακινηθούν στο δεξί μέλος της εξίσωσης αν δεν ήταν μηδέν. Η δομή αυτών των n εξισώσεων (5) αναπαρίσταται καλύτερα σε μορφή πινάκων. Επιλέγουμε $h = \frac{1}{6}$, ώστε να πάρουμε έναν 5 επί 5 πίνακα A:

Εξίσωση πινάκων $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ f(4h) \\ f(5h) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Από εδώ και στο εξής, *θα εργαστούμε με την εξίσωση* (6). Έχει έναν πολύ κανονικό πίνακα συντελεστών, το μέγεθος n του οποίου μπορεί να είναι πολύ μεγάλο. Ο πίνακας A έχει πολλές ιδιαίτερες ιδιότητες, τρεις από τις οποίες είναι θεμελιώδεις:

1. ***Ο πίνακας Α είναι τριδιαγώνιος.*** Όλα τα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο και τις δύο παρακείμενες διαγωνίους. Εκτός αυτής της ζώνης, όλα τα στοιχεία είναι $a_{ij} = 0$. Τα μηδενικά αυτά θα απλουστεύσουν δραματικά την απαλοιφή Gauss.
2. ***Ο πίνακας είναι συμμετρικός.*** Κάθε στοιχείο a_{ij} ισούται με το κατοπτρικό του στοιχείο a_{ji}, άρα $A^{\mathrm{T}} = A$. Ο άνω τριγωνικός πίνακας U θα είναι ο ανάστροφος του κάτω τριγωνικού πίνακα L, και $A = LDL^{\mathrm{T}}$. Αυτή η συμμετρία του A αντανακλά τη συμμετρία της d^2u/dx^2. Μια περιττή παράγωγος σαν την du/dx ή την d^3u/dx^3 θα κατέστρεφε τη συμμετρία.
3. ***Ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος.*** Αυτή η επιπλέον ιδιότητα λέει ότι *οι οδηγοί είναι θετικοί*. Οι αντιμεταθέσεις γραμμών δεν είναι απαραίτητες ούτε στη θεωρία ούτε στην πράξη. Αντιθέτως, ο πίνακας B που θα δούμε στο τέλος αυτής της ενότητας δεν είναι θετικά ορισμένος και χωρίς αντιμετάθεση γραμμών είναι εξαιρετικά ευάλωτος σε σφάλματα στρογγυλοποίησης.

   Η έννοια της θετικής ορισιμότητας συνδέει μεταξύ τους τα διάφορα μέρη αυτού του μαθήματος (βλ. Κεφάλαιο 6)!

Επιστρέφουμε στο γεγονός ότι ο A είναι τριδιαγώνιος. Πώς επηρεάζει αυτό την απαλοιφή; Το πρώτο βήμα της διαδικασίας απαλοιφής παράγει μηδενικά κάτω από τον πρώτο οδηγό:

Απαλοιφή επί του A: Βήμα 1
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ 0 & \mathbf{\frac{3}{2}} & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Συγκρινόμενο με το αντίστοιχο βήμα για έναν γενικό 5 επί 5 πίνακα, το συγκεκριμένο βήμα είναι απλούστερο κατά δύο σημαντικούς τρόπους:

(α) Υπήρχε *μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο* κάτω από τον οδηγό.
(β) Η γραμμή οδηγός ήταν *πολύ μικρή*.

Ο πολλαπλασιαστής $\ell_{21} = -\frac{1}{2}$ προέκυψε με μία διαίρεση. Ο νέος οδηγός $\frac{3}{2}$ προέκυψε με *μια μόνο πράξη πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης*. Επιπλέον, *η τριδιαγώνια δομή διατηρείται*: Σε κάθε βήμα της απαλοιφής ισχύουν και οι δύο απλοποιήσεις (α) και (β).

Το τελικό αποτέλεσμα είναι η παραγοντοποίηση $LDU = LDL^{\mathrm{T}}$ του A. Προσέξτε τους οδηγούς!

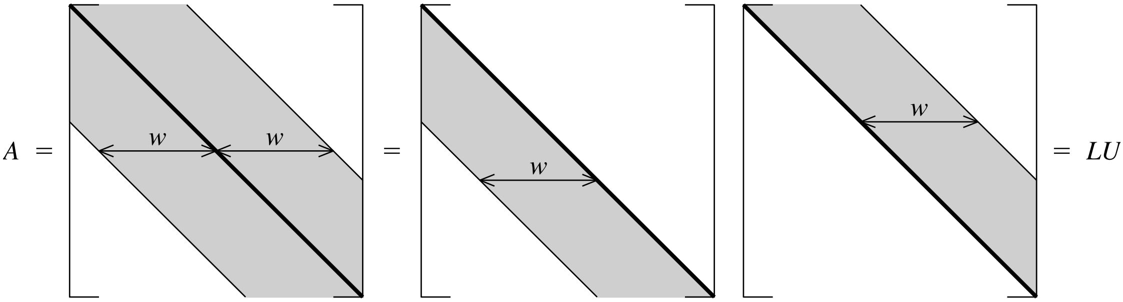
$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\frac{2}{1}} & & & & \\ & \mathbf{\frac{3}{2}} & & & \\ & & \mathbf{\frac{4}{3}} & & \\ & & & \mathbf{\frac{5}{4}} & \\ & & & & \mathbf{\frac{6}{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι παράγοντες L και U ενός τριδιαγώνιου πίνακα είναι διδιαγώνιοι. Οι τρεις παράγοντες μαζί έχουν την ίδια ταινιωτή δομή τριών διαγωνίων ($3n - 2$ παράμετροι) με τον A. Προσέξτε επίσης ότι οι L και U είναι ανάστροφοι ο ένας του άλλου, όπως είναι αναμενόμενο λόγω της συμμετρίας. Οι οδηγοί 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5 είναι όλοι θετικοί. Το γινόμενό τους είναι η ***ορίζουσα*** του A: $\det A = 6$. Οι οδηγοί συγκλίνουν προφανώς στο 1, καθώς μεγαλώνει το n. Οι υπολογιστές χαίρονται να δουλεύουν με τέτοιου είδους πίνακες.

Οι αραιοί παράγοντες L και U αλλάζουν εντελώς το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων. Για την εφαρμογή της απαλοιφής σε κάθε στήλη απαιτούνται μόνο δύο πράξεις, όπως παραπάνω, και υπάρχουν n στήλες. *Αντί για $n^3/3$ πράξεις χρειαζόμαστε μόνο $2n$.* Τα τριδιαγώνια συστήματα $Ax = b$ επιλύονται σχεδόν ακαριαία. *Το κόστος επίλυσης ενός τριδιαγώνιου συστήματος είναι ανάλογο του n.*

Όλα τα στοιχεία ενός **ταινιωτού πίνακα** που βρίσκονται εκτός της ταινίας $|i - j| < w$ είναι $a_{ij} = 0$ (Σχήμα 1.8). Το «ταινιακό ημιεύρος» είναι $w = 1$ για τους διαγώνιους πίνακες, $w = 2$ για τους τριδιαγώνιους πίνακες και $w = n$ για τους πλήρεις πίνακες. Για κάθε στήλη, η απαλοιφή απαιτεί $w(w - 1)$ πράξεις: μια γραμμή μήκους w επιδρά στις $w - 1$ γραμμές που βρίσκονται από κάτω της. *Για την εφαρμογή της απαλοιφής στις n στήλες ενός ταινιωτού πίνακα απαιτούνται περίπου $w^2 n$ πράξεις.*

Καθώς το w προσεγγίζει το n, ο πίνακας γίνεται πλήρης και το πλήθος των πράξεων είναι χοντρικά n^3. Για να υπολογίσουμε το ακριβές πλήθος πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι στην κάτω δεξιά γωνία δεν υπάρχει αρκετός χώρος για το ταινιακό εύρος w. Το ακριβές πλήθος διαιρέσεων και πράξεων πολλαπλασιασμού–αφαίρεσης που απαιτούνται για την παραγωγή



Σχήμα 1.8 Ένας ταινιωτός πίνακας A και οι παράγοντές του L και U.

των L, D και U (χωρίς να υποθέσουμε ότι ο A είναι συμμετρικός) είναι $P = \frac{1}{3}w(w-1)(3n-2w+1)$. Για έναν πλήρη πίνακα με $w = n$, βρίσκουμε ότι $P = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$. Ο αριθμός αυτός είναι ακέραιος, αφού οι $n-1$, n και $n+1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι και κάποιος από αυτούς διαιρείται με το 3.

Αυτό είναι το τελικό πλήθος πράξεων. Θα υπογραμμίσουμε το βασικό συμπέρασμα. Ένας πίνακας πεπερασμένων διαφορών σαν τον A έχει πλήρη αντίστροφο. Όταν λύνουμε το $Ax = b$, *στην πραγματικότητα είναι πολύ καλύτερο να γνωρίζουμε τους L και U από ό,τι τον A^{-1}*. Για τον πολλαπλασιασμό του A^{-1} με το b απαιτούνται n^2 βήματα, ενώ για την ορθόδρομη απαλοιφή και την ανάδρομη αντικατάσταση που δίνουν το $x = U^{-1}c = U^{-1}L^{-1}b = A^{-1}b$ αρκούν $4n$ βήματα.

Αυτό το παράδειγμα θα πρέπει να σας βοήθησε να κατανοήσετε καλύτερα την απαλοιφή (την οποία θεωρούμε πλέον ότι έχετε κατανοήσει πλήρως!). Είναι ένα αυθεντικό παράδειγμα μεγάλου γραμμικού συστήματος που συναντάται στην πράξη. Στο επόμενο κεφάλαιο θα στρέψουμε την προσοχή μας στην ύπαρξη και τη μοναδικότητα του x, για m εξισώσεις με n αγνώστους.

Σφάλμα στρογγυλοποίησης

Θεωρητικά, έχουμε ολοκληρώσει τη μελέτη της μη ιδιόμορφης περίπτωσης. Υπάρχει πλήρες σύνολο οδηγών (με αντιμεταθέσεις γραμμών). Στην πράξη, μπορεί να είναι εξίσου απαραίτητο να κάνουμε *επιπλέον αντιμεταθέσεις γραμμών* —διαφορετικά η λύση που θα υπολογίσουμε μπορεί εύκολα να γίνει άχρηστη. Θα αφιερώσουμε δύο σελίδες (τελείως προαιρετικές για το μάθημα στην τάξη) για να κάνουμε την απαλοιφή πιο ευσταθή —θα δούμε γιατί χρειάζεται αυτό και πώς γίνεται.

Για ένα σύστημα μετρίου μεγέθους, φερ' ειπείν 100 επί 100, η απαλοιφή απαιτεί ένα εκατομμύριο πράξεις δια τρία ($\frac{1}{3}n^3$). Από κάθε πράξη πρέπει να αναμένουμε κάποιο σφάλμα στρογγυλοποίησης. Κανονικά, κρατάμε ένα σταθερό πλήθος σημαντικών ψηφίων (φερ' ειπείν τρία, για έναν εξαιρετικά ανίσχυρο υπολογιστή). Με αυτό τον τρόπο όμως, όταν προσθέτουμε δύο αριθμούς διαφορετικού μεγέθους προκύπτει κάποιο σφάλμα:

Σφάλμα στρογγυλοποίησης από το $0{,}456 + 0{,}00123 \to 0{,}457$ χάνονται τα ψηφία 2 και 3.

Ποια είναι η συμβολή όλων αυτών των επιμέρους σφαλμάτων στο τελικό σφάλμα του Ax=b;

Το πρόβλημα δεν είναι εύκολο. Μελετήθηκε από τον John von Neumann, ο οποίος ήταν η κυρίαρχη μαθηματική φυσιογνωμία την εποχή που οι υπολογιστές κατέστησαν ξαφνικά εφικτή την εκτέλεση εκατομμυρίων πράξεων. Μάλιστα, ο συνδυασμός Gauss με τον von Neumann δίνει στον απλό αλγόριθμο της απαλοιφής μια ιδιαίτερα ξεχωριστή ιστορία, μολονότι ακόμη και ο von Neumann υπερεκτίμησε το τελικό σφάλμα στρογγυλοποίησης. Τον σωστό τρόπο απάντησης στο ερώτημα βρήκε ο Wilkinson, τα βιβλία του οποίου είναι πλέον κλασικά.

Θα κάνουμε τρεις σημαντικές παρατηρήσεις σημεία σχετικά με το σφάλμα στρογγυλοποίησης με τη βοήθεια δύο απλών παραδειγμάτων. Τα παραδείγματα είναι τα εξής:

Πίνακας σε κακή κατάσταση $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0001 \end{bmatrix}$ **Πίνακας σε καλή κατάσταση** $B = \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ο A είναι παρ' ολίγο ιδιόμορφος ενώ ο B δεν είναι σε καμία περίπτωση ιδιόμορφος. Αν αλλάξουμε ελαφρώς το τελευταίο στοιχείο του A σε $a_{22} = 1$, ο A *είναι* ιδιόμορφος. Ας θεωρήσουμε δύο παραπλήσια δεξιά μέλη b:

$$\begin{aligned} u + \phantom{1{,}0001}v &= 2 \\ u + 1{,}0001v &= 2 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + \phantom{1{,}0001}v &= 2 \\ u + 1{,}0001v &= 2{,}0001 \end{aligned}$$

Η λύση του πρώτου είναι $u = 2$, $v = 0$, ενώ η λύση του δεύτερου είναι $u = v = 1$. *Μια αλλαγή στο πέμπτο ψηφίο του b μεγεθύνθηκε σε αλλαγή του πρώτου ψηφίου της λύσης. Καμία αριθμητική μέθοδος δεν μπορεί να αποφύγει αυτή την ευαισθησία σε μικρές διαταραχές.* Η κακή κατάσταση μπορεί να μεταφερθεί από ένα σημείο σε κάποιο άλλο, αλλά δεν μπορεί να εξαλειφθεί. Η πραγματική λύση είναι πολύ ευαίσθητη, οπότε η λύση που υπολογίζουμε δεν μπορεί να είναι λιγότερο ευαίσθητη.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι η εξής.

1ΙΕ Ακόμη και ένας πίνακας σε καλή κατάσταση όπως ο B μπορεί να καταστραφεί από έναν κακό αλγόριθμο.

Δυστυχώς είμαστε υποχρεωμένοι να πούμε ότι, για τον πίνακα B, η απευθείας απαλοιφή Gauss είναι ένας κακός αλγόριθμος. Ας υποθέσουμε ότι δεχόμαστε ως πρώτο οδηγό το 0,0001. Κατόπιν αφαιρούμε 10.000 επί την πρώτη γραμμή από τη δεύτερη. Το κάτω δεξιά στοιχείο γίνεται -9999, αλλά η στρογγυλοποίηση στα τρία ψηφία θα έδινε -10.000. Κάθε ίχνος του στοιχείου 1 θα εξαφανιζόταν:

Απαλοιφή στον B με μικρό οδηγό $$\begin{aligned} 0{,}0001u + v &= 1 \\ u + v &= 2 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} 0{,}0001u + v &= 1 \\ -9999v &= -9998. \end{aligned}$$

Η στρογγυλοποίηση θα έδινε $-10.000v = -10.000$, ή $v = 1$. Αυτό είναι σωστό με προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων. Η ανάδρομη αντικατάσταση με χρήση του σωστού $v = 0{,}9999$ θα άφηνε $u = 1$:

Σωστό αποτέλεσμα $0{,}0001u + 0{,}9999 = 1, \quad$ ή $\quad u = 1.$

Αντ' αυτού, αν αποδεχτούμε το $v = 1$, το οποίο είναι λάθος μόνο ως προς το τέταρτο ψηφίο, παίρνουμε $u = 0$:

Λανθασμένο αποτέλεσμα $0{,}0001u + 1 = 1, \quad$ ή $\quad u = 0.$

Το u που υπολογίσαμε είναι εντελώς λάθος. Ο B είναι πίνακας σε καλή κατάσταση, αλλά η απαλοιφή είναι εξαιρετικά ασταθής. Οι L, D και U έχουν τελείως διαφορετική κλίμακα από τον B:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10{,}000 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}0001 & 0 \\ 0 & -9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 10.000 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ο μικρός οδηγός $0{,}0001$ προκάλεσε αστάθεια, αλλά η θεραπεία είναι προφανής —*αντιμετάθεση γραμμών*.

1ΙΣΤ Ένας μικρός οδηγός επιβάλλει μια πρακτική αλλαγή στη διαδικασία της απαλοιφής. Κανονικά, συγκρίνουμε κάθε οδηγό με όλους τους δυνατούς οδηγούς στην ίδια στήλη. Η αντιμετάθεση γραμμών με σκοπό τη λήψη του μεγαλύτερου δυνατού οδηγού καλείται ***μερική οδήγηση.***

Στην περίπτωση του B, θα συγκρίναμε τον οδηγό $0{,}0001$ με τον δυνατό οδηγό 1 που υπάρχει από κάτω του και θα προχωρούσαμε αμέσως σε αντιμετάθεση γραμμών. Στη γλώσσα των πινάκων, αυτό είναι ένας πολλαπλασιασμός με τον πίνακα μετάθεσης $P = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ο νέος πίνακας $C = PB$ έχει καλούς παράγοντες:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}0001 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}0001 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}9999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι οδηγοί του C είναι 1 και $0{,}9999$, οι οποίοι είναι πολύ καλύτεροι από τους $0{,}0001$ και -9999 του B.

Η στρατηγική της *πλήρους οδήγησης* εξετάζει και όλες τις επόμενες στήλες για να βρει τον μεγαλύτερο δυνατό οδηγό. Ενδέχεται να χρειαστεί όχι μόνο αντιμετάθεση γραμμών αλλά και αντιμετάθεση στηλών (το οποίο είναι ένας πολλαπλασιασμός από δεξιά με έναν πίνακα μετάθεσης.) Το μειονέκτημα μιας τόσο συντηρητικής προσέγγισης είναι το κόστος, αλλά η μερική οδήγηση είναι αρκετά καλή.

Φτάσαμε τελικά στον θεμελιώδη αλγόριθμο της αριθμητικής γραμμικής άλγεβρας: την ***απαλοιφή με μερική οδήγηση.*** Μπορούμε να κάνουμε επιπλέον βελτιώσεις, όπως να ελέγχουμε αν πρέπει να αλλάξουμε την κλίμακα μιας ολόκληρης γραμμής ή στήλης. Ωστόσο, ο αναγνώστης γνωρίζει πλέον πώς μεταχειρίζεται ένας υπολογιστής ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Συγκρινόμενη με τη «θεωρητική» περιγραφή —*βρίσκουμε τον A^{-1} και κάνουμε τον πολλαπλασιασμό $A^{-1}b$*— η περιγραφή μας κατανάλωσε αρκετό από τον χρόνο (και την υπομονή) του αναγνώστη. Μακάρι να υπήρχε ευκολότερος τρόπος να εξηγηθεί πώς βρίσκεται πραγματικά το x, αλλά νομίζω πως δεν υπάρχει.

Προβλήματα 1.7

1. Γράψτε τους παράγοντες $LDU = LDL^{\mathrm{T}}$ του A της εξίσωσης (6) όταν $n = 4$. Βρείτε την ορίζουσα ως το γινόμενο των οδηγών που περιέχει ο D.

2. Στην εξίσωση (6), αλλάξτε το a_{11} από $a_{11} = 2$ σε $a_{11} = 1$ και βρείτε τους παράγοντες LDU του νέου αυτού τριδιαγώνιου πίνακα.

3. Βρείτε τον 5 επί 5 πίνακα A_0 $\left(h = \frac{1}{6}\right)$ που προσεγγίζει την

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \qquad \frac{du}{dx}(0) = \frac{du}{dx}(1) = 0,$$

αντικαθιστώντας αυτές τις συνοριακές συνθήκες με τις $u_0 = u_1$ και $u_6 = u_5$. Επαληθεύστε ότι το γινόμενο του A_0 που βρήκατε επί το σταθερό διάνυσμα (C, C, C, C, C) είναι μηδέν· ο A_0 είναι *ιδιόμορφος*. Με αντίστοιχο τρόπο, δείξτε ότι αν $u(x)$ είναι μια λύση του συνεχούς προβλήματος, το ίδιο είναι και η $u(x) + C$.

4. Γράψτε την 3 επί 3 εξίσωση πινάκων πεπερασμένων διαφορών $\left(h = \frac{1}{4}\right)$ που αντιστοιχεί στην

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u = x, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

5. Για $h = \frac{1}{4}$ και $f(x) = 4\pi^2 \sin 2\pi x$, η εξίσωση διαφορών (5) είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Λύστε ως προς u_1, u_2, u_3 και βρείτε το σφάλμα σε σχέση με την πραγματική λύση $u = \sin 2\pi x$ στα $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ και $x = \frac{3}{4}$.

6. Με ποιο 5 επί 5 σύστημα αντικαθίσταται η (6) αν οι συνοριακές συνθήκες γίνουν $u(0) = 1$, $u(1) = 0$;

Τα προβλήματα 7–11 αφορούν το σφάλμα στρογγυλοποίησης και τις αντιμεταθέσεις γραμμών.

7. Υπολογίστε με δύο τρόπους τον H^{-1} για τον 3 επί 3 πίνακα Hilbert

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

πρώτον κάνοντας τις πράξεις με ακρίβεια και δεύτερον στρογγυλοποιώντας κάθε αριθμό κρατώντας τρία ψηφία. Ο συγκεκριμένος πίνακας H είναι σε κακή κατάσταση και η αντιμετάθεση γραμμών δεν βοηθάει.

8. Για τον ίδιο πίνακα H, συγκρίνετε τα δεξιά μέλη του $Hx = b$ όταν οι λύσεις είναι $x = (1, 1, 1)$ και $x = (0, 6, -3.6)$.

9. Λύστε την $Hx = b = (1, 0, \ldots, 0)$ για τον 10 επί 10 πίνακα Hilbert με $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$, χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε πρόγραμμα επίλυσης γραμμικών εξισώσεων. Κατόπιν μεταβάλετε ένα στοιχείο του b κατά 0,0001 και συγκρίνετε τις λύσεις.

10. Συγκρίνετε τους οδηγούς που παράγονται κατά την απευθείας απαλοιφή με τους οδηγούς που παράγονται κατά την απαλοιφή με μερική οδήγηση για τον

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}001 & 0 \\ 1 & 1000 \end{bmatrix}.$$

(Αυτό είναι ένα παράδειγμα όπου χρειάζεται αλλαγή κλίμακας πριν από την απαλοιφή.)

11. Εξηγήστε γιατί οι πολλαπλασιαστές ℓ_{ij} που παράγονται και τοποθετούνται στον L κατά την απαλοιφή με μερική οδήγηση ικανοποιούν την $|\ell_{ij}| \leq 1$. Μπορείτε να κατασκευάστε ένα 3 επί 3 παράδειγμα όπου για όλα τα στοιχεία να ισχύει $|a_{ij}| \leq 1$ και ο τελευταίος οδηγός να είναι 4; Αυτό είναι το χειρότερο δυνατό, αφού κάθε στοιχείο το πολύ διπλασιάζεται όταν $|\ell_{ij}| \leq 1$.

Επαναληπτικές ασκήσεις

1.1 (α) Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \qquad \text{και} \qquad b_{ij} = \frac{i}{j}.$$

(β) Υπολογίστε τα γινόμενα AB και BA και A^2.

1.2 Υπολογίστε τους πίνακες AB, BA, A^{-1}, B^{-1} και $(AB)^{-1}$ αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

1.3 Βρείτε παραδείγματα 2 επί 2 πινάκων με $a_{12} = \frac{1}{2}$ για τους οποίους
(α) $A^2 = I$. (β) $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. (γ) $A^2 = A$.

1.4 Λύστε με απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση τα εξής συστήματα:

$$\begin{aligned} u \qquad + w &= 4 \\ u + v \qquad &= 3 \\ u + v + w &= 6 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} v + w &= 0 \\ u \qquad + w &= 0 \\ u + v \qquad &= 6. \end{aligned}$$

1.5 Παραγοντοποιήστε τους προηγούμενους πίνακες στη μορφή $A = LU$ ή $PA = LU$.

1.6 (α) Υπάρχουν δεκαέξι 2 επί 2 πίνακες με στοιχεία μονάδες και μηδενικά. Πόσοι είναι αντιστρέψιμοι;
(β) (Πολύ δυσκολότερο!) Αν χρησιμοποιήσετε τυχαία μονάδες και μηδενικά ως στοιχεία ενός 10 επί 10 πίνακα, ο πίνακας είναι πιθανότερο να είναι αντιστρέψιμος ή ιδιόμορφος;

1.7 Υπάρχουν δεκαέξι 2 επί 2 πίνακες με στοιχεία το 1 και το -1. Πόσοι είναι αντιστρέψιμοι;

1.8 Πώς σχετίζονται οι γραμμές του EA με τις γραμμές του A στις παρακάτω περιπτώσεις;

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.9 Γράψτε ένα 2 επί 2 σύστημα με άπειρες λύσεις.

1.10 Βρείτε τους αντιστρόφους αν υπάρχουν, είτε με το μάτι είτε με τη μέθοδο Gauss–Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.11 Αν ο E είναι 2 επί 2 και προσθέτει την πρώτη εξίσωση στη δεύτερη, ποιοι είναι οι E^2, E^8 και $8E$;

1.12 Σωστό ή λάθος, με *αιτιολόγηση* αν είναι σωστό ή *αντιπαράδειγμα* αν είναι λάθος:

(1) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και οι γραμμές του εμφανίζονται με αντίστροφη σειρά στον B, τότε ο B είναι αντιστρέψιμος.

(2) Αν οι A και B είναι συμμετρικοί, τότε ο AB είναι συμμετρικός.

(3) Αν οι A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ο BA είναι αντιστρέψιμος.

(4) Κάθε μη ιδιόμορφος πίνακας μπορεί να παραγοντοποιηθεί στο γινόμενο $A = LU$ ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με εναν άνω τριγωνικό πίνακα U.

1.13 Λύστε το $Ax = b$ λύνοντας τα τριγωνικά συστήματα $Lc = b$ και $Ux = c$:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ποιο μέρος του A^{-1} βρήκατε με το συγκεκριμένο b;

1.14 Αν είναι δυνατόν, βρείτε 3 επί 3 πίνακες B τέτοιους ώστε

(α) $BA = 2A$ για κάθε A.

(β) $BA = 2B$ για κάθε A.

(γ) Ο BA να έχει τις πρώτες και τις τελευταίες γραμμές του A αντεστραμμένες.

(δ) Ο BA να έχει τις πρώτες και τις τελευταίες στήλες του A αντεστραμμένες.

1.15 Βρείτε την τιμή του c στον παρακάτω n επί n αντίστροφο:

$$\text{αν} \quad A = \begin{bmatrix} n & -1 & \cdot & -1 \\ -1 & n & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ -1 & -1 & -1 & n \end{bmatrix} \quad \text{τότε} \quad A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} c & 1 & \cdot & 1 \\ 1 & c & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

1.16 Για ποιες τιμές του k έχει το

$$\begin{aligned} kx + y &= 1 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}$$

καμία, μία ή άπειρες λύσεις;

1.17 Βρείτε τη συμμετρική παραγοντοποίηση $A = LDL^{\mathrm{T}}$ των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

1.18 Υποθέστε ότι A είναι ο ταυτοτικός 4 επί 4 πίνακας με τη διαφορά ότι ως στήλη 2 έχει ένα διάνυσμα v:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3 & 1 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(α) Παραγοντοποιήστε τον A στη μορφή LU, θεωρώντας ότι $v_2 \neq 0$.
(β) Βρείτε τον A^{-1}, ο οποίος έχει την ίδια μορφή με τον A.

1.19 Λύστε με απαλοιφή τα παρακάτω συστήματα ή δείξτε ότι δεν υπάρχει λύση:

$$\begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + 2v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} u + v + w &= 0 \\ u + v + 3w &= 0 \\ 3u + 5v + 7w &= 1. \end{aligned}$$

1.20 Οι n επί n πίνακες μετάθεσης είναι ένα σημαντικό παράδειγμα «ομάδας». Αν τους πολλαπλασιάσουμε παραμένουμε εντός της ομάδας, οι αντίστροφοί τους ανήκουν στην ομάδα, ο ταυτοτικός πίνακας ανήκει στην ομάδα και η ιδιότητα $P_1(P_2P_3) = (P_1P_2)P_3$ ισχύει —αφού ισχύει για όλους τους πίνακες.

(α) Πόσα μέλη αριθμούν οι ομάδες των 4 επί 4 και n επί n πινάκων μετάθεσης;
(β) Βρείτε μια δύναμη k για την οποία όλοι οι 3 επί 3 πίνακες μετάθεσης να ικανοποιούν την $P^k = I$.

1.21 Περιγράψτε τις γραμμές του DA και τις στήλες του AD αν $D = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{smallmatrix}\right]$.

1.22 (α) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος ποιος είναι ο αντίστροφος του A^{T};
(β) Αν ο A είναι και συμμετρικός ποιος είναι ο ανάστροφος του A^{-1};
(γ) Εφαρμόστε και τους δύο τύπους αν $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

1.23 Πειραματιζόμενοι με $n = 2$ και $n = 3$, βρείτε τους

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

1.24 Ξεκινώντας με το $u + 2v - w = 6$ ως πρώτο επίπεδο, βρείτε την εξίσωση

(α) του παράλληλου επιπέδου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
(β) ενός δεύτερου επιπέδου που περιέχει επίσης τα σημεία $(6, 0, 0)$ και $(2, 2, 0)$.
(γ) ενός τρίτου επιπέδου που τέμνει το πρώτο και το δεύτερο στο σημείο $(4, 1, 0)$.

1.25 Ποιο πολλαπλάσιο της γραμμής 2 αφαιρείται από τη γραμμή 3 κατά την εφαρμογή της ορθόδρομης απαλοιφής στον A;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Πώς ξέρετε (χωρίς να πολλαπλασιάσετε τους δύο παράγοντες) ότι ο A είναι *αντιστρέψιμος*, *συμμετρικός* και *τριδιαγώνιος*; Ποιοι είναι οι οδηγοί του;

1.26 (α) Για ποιο διάνυσμα x θα ισχύει $Ax =$ στήλη 1 του A + 2 (στήλη 3), για έναν 3 επί 3 πίνακα A;

(β) Κατασκευάστε έναν πίνακα για τον οποίο στήλη $1 + 2\,(\text{στήλη } 3) = 0$. Επιβεβαιώστε ότι ο A είναι ιδιόμορφος (έχει λιγότερους από 3 οδηγούς) και εξηγήστε γιατί συμβαίνει αυτό.

1.27 Σωστό ή λάθος, με αιτιολόγηση αν είναι σωστό και αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος:

(1) Αν $L_1U_1 = L_2U_2$ (οι U είναι άνω τριγωνικοί με μη μηδενική διαγώνιο, οι L είναι κάτω τριγωνικοί με μοναδιαία διαγώνιο), τότε $L_1 = L_2$ και $U_1 = U_2$. Η παραγοντοποίηση LU είναι μοναδική.

(2) Αν $A^2 + A = I$, τότε $A^{-1} = A + I$.

(3) Αν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του A είναι μηδέν, τότε ο A είναι ιδιόμορφος.

1.28 Δοκιμάζοντας ή χρησιμοποιώντας με τη μέθοδο Gauss–Jordan υπολογίστε τους

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

1.29 Γράψτε τους 2 επί 2 πίνακες που

(α) αντιστρέφουν την κατεύθυνση κάθε διανύσματος.

(β) προβάλλουν κάθε διάνυσμα στον άξονα x_2.

(γ) στρέφουν κάθε διάνυσμα κατά την αντιωρολόγια φορά κατά $90°$.

(δ) ανακλούν κάθε διάνυσμα ως προς την ευθεία $x_1 = x_2$ με κλίση $45°$.

Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοί χώροι

2.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Η απαλοιφή απλοποιεί, στοιχείο προς στοιχείο, το γραμμικό σύστημα $Ax = b$. Ευτυχώς, απλοποιεί και τη θεωρία. Μετά την απαλοιφή, μπορούμε να απαντήσουμε πολύ ευκολότερα τα βασικά ερωτήματα της *ύπαρξης* και της *μοναδικότητας* —υπάρχει μία λύση, καμία λύση ή άπειρες λύσεις; Θα χρειαστεί να αφιερώσουμε μια ακόμη ενότητα σε αυτά τα ερωτήματα, ώστε να βρούμε όλες τις λύσεις ενός m επί n συστήματος. Με αυτόν τον τρόπο, θα έχουμε καλύψει πλήρως το θέμα.

Η απαλοιφή μάς προσφέρει έναν μόνο τρόπο κατανόησης του $Ax = b$. Κύριος στόχος μας είναι να επιτύχουμε μια διαφορετική και βαθύτερη κατανόηση. Αυτό το κεφάλαιο ίσως είναι δυσκολότερο από το πρώτο. Φτάνει ώς την καρδιά της γραμμικής άλγεβρας.

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της έννοιας του ***διανυσματικού χώρου*** αναφέροντας εξ αρχής τους σημαντικότερους χώρους, οι οποίοι συμβολίζονται με $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, … Ο χώρος $\mathbf{R}^n$ αποτελείται από *όλα τα διανύσματα στήλες με n συνιστώσες*. (Γράφουμε $\mathbf{R}$ διότι οι συνιστώσες είναι πραγματικοί αριθμοί.) Ο $\mathbf{R}^2$ αναπαριστάται με το σύνηθες επίπεδο x-y· οι δύο συνιστώσες του διανύσματος είναι οι συντεταγμένες x και y του αντίστοιχου σημείου. Οι τρεις συνιστώσες ενός διανύσματος του $\mathbf{R}^3$ δίνουν ένα σημείο του τριδιάστατου χώρου. Ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbf{R}^1$ είναι μια ευθεία.

Αυτό που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη γραμμική άλγεβρα είναι ότι η επέκταση στις n διαστάσεις είναι πολύ εύκολη. Για ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^7$ χρειαζόμαστε μόνο τις επτά συνιστώσες, ακόμα και αν είναι δύσκολο να φανταστούμε τη γεωμετρία. Σε κάθε διανυσματικό χώρο, είναι δυνατές δύο πράξεις:

> ***Μπορούμε να προσθέτουμε δύο διανύσματα και μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε διανύσματα με αριθμούς.***
>
> **Με άλλα λόγια, μπορούμε να σχηματίζουμε γραμμικούς συνδυασμούς.**

Η πρόσθεση ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα $x + y = y + x$, υπάρχει ένα «μηδενικό διάνυσμα» που ικανοποιεί την $0 + x = x$ και υπάρχει ένα διάνυσμα «$-x$» που ικανοποιεί την $-x + x = 0$. Οι θεμελιώδεις ιδιότητες είναι οκτώ (στις οποίες περιλαμβάνονται αυτές οι τρεις)· ο πλήρης κατάλογος δίνεται στο Πρόβλημα 5 στο τέλος αυτής της ενότητας. ***Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο*** *διανυσμάτων* ***μαζί με κανόνες για την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό τους με πραγματικούς αριθμούς***. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πρέπει να παράγουν διανύσματα του ίδιου χώρου και πρέπει να ικανοποιούν τις οκτώ ιδιότητες.

Συνήθως, τα διανύσματά μας ανήκουν σε έναν από τους χώρους $\mathbf{R}^n$· είναι συνηθισμένα διανύσματα στήλες. Αν $x = (1,0,0,3)$, τότε οι συνιστώσες του $2x$ (και του $x + x$) είναι $2,0,0,6$. Ο τυπικός ορισμός επιτρέπει και σε άλλα πράγματα να είναι «διανύσματα» —υπό τον όρο να είναι δυνατή η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Ακολουθούν τρία παραδείγματα:

1. *Ο απειροδιάστατος χώρος* $\mathbf{R}^\infty$. Τα διανύσματά του έχουν άπειρες το πλήθος συνιστώσες, όπως το $x = (1,2,1,2,\dots)$. Οι κανόνες για τις $x + y$ και cx παραμένουν οι ίδιοι.
2. *Ο χώρος των 3 επί 2 πινάκων.* Σε αυτήν την περίπτωση τα «διανύσματα» είναι πίνακες! Μπορούμε να προσθέτουμε δύο πίνακες, $A + B = B + A$, υπάρχει μηδενικός πίνακας κ.ο.κ. Ο χώρος αυτός είναι σχεδόν ίδιος με τον $\mathbf{R}^6$. (Οι έξι συνιστώσες διατάσσονται σε ένα παραλληλόγραμμο αντί σε μια στήλη.) Οποιαδήποτε επιλογή m και n θα έδινε, με αντίστοιχο τρόπο, τον διανυσματικό χώρο όλων των m επί n πινάκων.
3. *Ο χώρος των συναρτήσεων* $f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση δεχόμαστε όλες τις συναρτήσεις f που ορίζονται επί ενός σταθερού διαστήματος, φερ' ειπείν επί του $0 \le x \le 1$. Ο χώρος αυτός περιλαμβάνει τις $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, το άθροισμά τους $(f+g)(x) = x^2 + \sin x$ και όλα τα πολλαπλάσιά τους, όπως τις $3x^2$ και $-\sin x$. Τα διανύσματα είναι συναρτήσεις και η διάσταση είναι κατά κάποιο τρόπο ένα μεγαλύτερο άπειρο από αυτό του $\mathbf{R}^\infty$.

Επιπλέον παραδείγματα δίνονται στις ασκήσεις, αλλά οι διανυσματικοί χώροι που χρειαζόμαστε περισσότερο βρίσκονται κάπου αλλού —***βρίσκονται εντός των συνήθων χώρων*** $\mathbf{R}^n$. Θέλουμε να τους περιγράψουμε και να εξηγήσουμε γιατί είναι σημαντικοί. Γεωμετρικά, σκεφτείτε τον συνήθη τριδιάστατο χώρο $\mathbf{R}^3$ και επιλέξτε ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. ***Το επίπεδο αυτό αποτελεί από μόνο του έναν διανυσματικό χώρο***. Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του επιπέδου με το 3, ή με το -3, ή με οποιονδήποτε άλλο αριθμό, παίρνουμε ένα διάνυσμα του ίδιου επιπέδου. Αν προσθέσουμε δύο διανύσματα του επιπέδου, το άθροισμά τους παραμένει στο επίπεδο. Το συγκεκριμένο επίπεδο που διέρχεται από το $(0,0,0)$ καταδεικνύει μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής άλγεβρας· είναι ένας ***υπόχωρος*** του αρχικού χώρου $\mathbf{R}^3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας ***υπόχωρος*** ενός διανυσματικού χώρου είναι ένα μη κενό υποσύνολο που ικανοποιεί τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένας διανυσματικός χώρος: ***Οι γραμμικοί συνδυασμοί παραμένουν εντός του υποχώρου***.

(i) Αν προσθέσουμε δύο διανύσματα x και y του υποχώρου, το $x + y$ ανήκει *στον υπόχωρο*.

(ii) Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα x του υποχώρου με έναν αριθμό c, το cx ανήκει *στον υπόχωρο*.

Προσέξτε την έμφαση στη λέξη ***χώρος***. Ένας υπο*χώρος* είναι ένα υποσύνολο που είναι «κλειστό» ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Οι πράξεις αυτές ακολουθούν τους κανόνες του φιλοξενούντος χώρου, κρατώντας μας ***εντός του υποχώρου***. Οι οκτώ απαιτούμενες ιδιότητες ικανοποιούνται στον μεγαλύτερο χώρο και θα ικανοποιούνται αυτομάτως σε κάθε υπόχωρο. Προσέξτε ειδικότερα ότι ***το μηδενικό διάνυσμα θα ανήκει σε κάθε υπόχωρο***. Αυτό προκύπτει από τον κανόνα (ii): Επιλέγουμε ως αριθμό το $c = 0$.

Ο μικρότερος υπόχωρος $\mathbf{Z}$ περιέχει μόνο ένα διάνυσμα, το μηδενικό διάνυσμα. Είναι ένας «μηδενοδιάστατος χώρος», ο οποίος περιέχει μόνο το σημείο της αρχής των αξόνων.

Οι κανόνες (i) και (ii) ικανοποιούνται, αφού το άθροισμα $0 + 0$ ανήκει σε αυτόν τον μονοσημειακό χώρο, και το ίδιο ισχύει για όλα τα πολλαπλάσια $c0$. *Είναι ο μικρότερος δυνατός διανυσματικός χώρος*: το σύνολο δεν επιτρέπεται να είναι κενό. Στο άλλο άκρο, ο μεγαλύτερος υπόχωρος είναι ολόκληρος ο αρχικός χώρος. Αν ο αρχικός χώρος είναι ο $\mathbf{R}^3$, μπορούμε εύκολα να περιγράψουμε τους δυνατούς υποχώρους: ο ίδιος ο $\mathbf{R}^3$, κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ή μόνη της η αρχή των αξόνων (το μηδενικό διάνυσμα).

Μερικά παραδείγματα θα μας βοηθήσουν να ξεκαθαρίσουμε τη διαφορά μεταξύ υποσυνόλου και υποχώρου. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα και να τα πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς χωρίς να βρεθούμε εκτός του χώρου.

Παράδειγμα 1 Ας θεωρήσουμε όλα τα διανύσματα του $\mathbf{R}^2$ των οποίων οι συνιστώσες είναι θετικές ή μηδέν. Το συγκεκριμένο υποσύνολο είναι το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου x-y· οι συντεταγμένες ικανοποιούν τις $x \geq 0$ και $y \geq 0$. *Δεν είναι υπόχωρος*, μολονότι περιέχει το μηδέν και η πρόσθεση μας κρατά εντός του υποσυνόλου. Ο κανόνας (ii) παραβιάζεται, αφού αν ο αριθμός είναι το -1 και το διάνυσμα το $[1 \quad 1]$, το πολλαπλάσιο $cx = [-1 \quad -1]$ ανήκει στο τρίτο και όχι στο πρώτο τεταρτημόριο.

Αν μαζί με το πρώτο συμπεριλάβουμε και το τρίτο τεταρτημόριο, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν παρουσιάζει πρόβλημα. Κάθε πολλαπλάσιο cx παραμένει εντός του υποσυνόλου. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση παραβιάζεται ο κανόνας (i), αφού η πρόσθεση $[1 \quad 2] + [-2 \quad -1]$ δίνει $[-1 \quad 1]$, το οποίο δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο τεταρτημόρια. Ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει το πρώτο τεταρτημόριο είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbf{R}^2$.

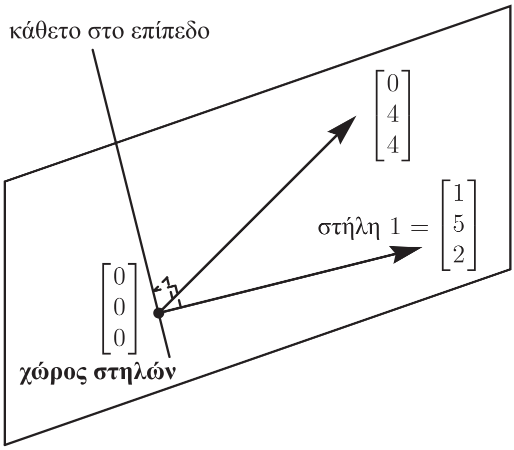
Παράδειγμα 2 Αν πάρουμε ως αφετηρία τον διανυσματικό χώρο των 3 επί 3 πινάκων, ένας δυνατός υπόχωρος είναι το σύνολο των *κάτω τριγωνικών πινάκων*. Ένας άλλος είναι το σύνολο των *συμμετρικών πινάκων*. Οι $A + B$ και cA είναι κάτω τριγωνικοί αν οι A και B είναι κάτω τριγωνικοί, και είναι συμμετρικοί αν οι A και B είναι συμμετρικοί. Ασφαλώς, ο μηδενικός πίνακας ανήκει και στους δύο υποχώρους.

Ο χώρος στηλών του A

Ερχόμαστε τώρα στα κομβικά παραδείγματα, τον **χώρο στηλών** και τον **μηδενόχωρο** ενός πίνακα A. ***Ο χώρος στηλών περιέχει όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A***. Είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$. Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα ένα σύστημα $m = 3$ εξισώσεων με $n = 2$ αγνώστους:

$$\textbf{Ο συνδυασμός των στηλών ισούται με } \boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Αν $m > n$, έχουμε περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους —και *συνήθως δεν θα υπάρχει καμία λύση*. Το σύστημα θα έχει λύση μόνο για ένα πολύ «λεπτό» υποσύνολο των δυνατών b. Το λεπτό αυτό υποσύνολο μπορεί να περιγραφεί με έναν τόσο απλό τρόπο, που είναι εύκολο να μας διαφύγει.



Σχήμα 2.1 Ο χώρος στηλών $\boldsymbol{C}(A)$, ένα επίπεδο του τριδιάστατου χώρου.

2A Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα b μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυασμός των στηλών του A. Σε αυτή την περίπτωση το b ανήκει στον χώρο στηλών.

Η παραπάνω περιγραφή παραπέμπει απλώς σε έναν διαφορετικό τρόπο γραφής του $Ax = b$, *κατά στήλες*:

$$\textbf{Συνδυασμός στηλών} \qquad u\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Πρόκειται για τις ίδιες τρεις εξισώσεις με δύο αγνώστους. Το πρόβλημα είναι πλέον το εξής: Να βρεθούν αριθμοί u και v με τους οποίους αν πολλαπλασιαστεί η πρώτη και η δεύτερη στήλη προκύπτει το b. Το σύστημα έχει λύση μόνο αν υπάρχουν τέτοιοι συντελεστές, και το διάνυσμα (u, v) είναι η λύση x.

Αυτό που προσπαθούμε να πούμε είναι ότι τα εφικτά δεξιά μέλη b είναι *όλοι οι συνδυασμοί των στηλών του* A. Ένα δυνατό δεξί μέλος είναι η πρώτη στήλη από μόνη της· τα βάρη είναι $u = 1$ και $v = 0$. Μια άλλη δυνατότητα είναι η δεύτερη στήλη: $u = 0$ και $v = 1$. Μια τρίτη είναι το δεξί μέλος $b = 0$. Για $u = 0$ και $v = 0$, το διάνυσμα $b = 0$ είναι πάντα εφικτό.

Μπορούμε να περιγράψουμε *όλους τους συνδυασμούς* των δύο στηλών γεωμετρικά: Το $Ax = b$ *λύνεται αν και μόνο αν το* b *περιέχεται στο* ***επίπεδο*** *που παράγουν τα δύο διανύσματα στήλες* (Σχήμα 2.1). Αυτό είναι το λεπτό σύνολο των εφικτών b. Αν το b δεν περιέχεται στο επίπεδο, δεν είναι συνδυασμός των δύο στηλών. Σε αυτή την περίπτωση το $Ax = b$ δεν έχει λύση.

Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι το συγκεκριμένο επίπεδο δεν είναι απλώς ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$· είναι ένας υπόχωρος. Είναι ο ***χώρος στηλών*** του A, που αποτελείται από ***όλους τους συνδυασμούς των στηλών***. Συμβολίζεται με $\boldsymbol{C}(A)$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι, για έναν υπόχωρο του $\mathbf{R}^m$, οι συνθήκες (i) και (ii) ικανοποιούνται:

(i) Υποθέτουμε ότι τα b και b' περιέχονται στον χώρο στηλών, οπότε $Ax = b$ για κάποιο x και $Ax' = b'$ για κάποιο x'. Επομένως, $A(x + x') = b + b'$, οπότε το $b + b'$ είναι επίσης ένας συνδυασμός των στηλών. Ο χώρος στηλών όλων των εφικτών διανυσμάτων b είναι κλειστός ως προς την πρόσθεση.

(ii) Αν το b ανήκει στον χώρο στηλών $\boldsymbol{C}(A)$, το ίδιο ισχύει για κάθε πολλαπλάσιό του cb. Αν κάποιος συνδυασμός στηλών παράγει το b (φερ' ειπείν $Ax = b$), τότε πολλαπλασιάζοντας αυτόν τον συνδυασμό με το c παράγεται το cb. Με άλλα λόγια, $A(cx) = cb$.

Για άλλους πίνακες A, οι διαστάσεις του Σχήματος 2.1 μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές. Ο μικρότερος δυνατός χώρος στηλών (που περιέχει μόνο ένα διάνυσμα) προκύπτει από τον μηδενικό πίνακα $A = 0$. Ο μόνος συνδυασμός των στηλών είναι το $b = 0$. Στο άλλο άκρο, αν υποθέσουμε ότι ο A είναι ο 5 επί 5 ταυτοτικός πίνακας, τότε ο $\boldsymbol{C}(I)$ είναι ολόκληρος ο $\mathbf{R}^5$· οι πέντε στήλες του I μπορούν να συνδυαστούν ώστε να προκύψει οποιοδήποτε πενταδιάστατο διάνυσμα b. Αυτό δεν ισχύει μόνο για τον ταυτοτικό πίνακα. *Κάθε μη ιδιόμορφος 5 επί 5 πίνακας έχει ολόκληρο τον $\mathbf{R}^5$ ως χώρο στηλών του.* Για έναν τέτοιο πίνακα μπορούμε να λύσουμε το $Ax = b$ με απαλοιφή Gauss· υπάρχουν πέντε οδηγοί. Συνεπώς, για έναν μη ιδιόμορφο πίνακα, κάθε b ανήκει στο $\boldsymbol{C}(A)$.

Όπως βλέπετε, το Κεφάλαιο 1 περιέχεται σε αυτό το κεφάλαιο. Σε εκείνο μελετήσαμε τους n επί n πίνακες των οποίων ο χώρος στηλών είναι ο $\mathbf{R}^n$. Σε αυτό επιτρέπουμε ιδιόμορφους πίνακες και παραλληλόγραμμους πίνακες οποιουδήποτε σχήματος, οπότε ο $\boldsymbol{C}(A)$ μπορεί να βρίσκεται κάπου μεταξύ του μηδενικού χώρου και ολόκληρου του χώρου $\mathbf{R}^m$. Μαζί με τον ορθογώνιο του χώρο, μας δίνει τον έναν από τους δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε και να κατανοήσουμε το $Ax = b$.

Ο μηδενόχωρος του A

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης του $Ax = b$ είναι «δυϊκός» του πρώτου. Μας ενδιαφέρουν όχι μόνο τα εφικτά δεξιά μέλη b, αλλά και οι λύσεις x μέσω των οποίων τα επιτυγχάνουμε. Αν το δεξί μέλος είναι το $b = 0$ έχουμε πάντα τη λύση $x = 0$, αλλά μπορεί να υπάρχουν άπειρες το πλήθος άλλες λύσεις. (Υπάρχουν πάντα, αν υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από εξισώσεις, $n > m$.) ***Οι λύσεις του $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο —τον μηδενόχωρο του $\boldsymbol{A}$***.

Ο ***μηδενόχωρος*** ενός πίνακα αποτελείται από όλα τα διανύσματα x για τα οποία $Ax = 0$. Συμβολίζεται με $\boldsymbol{N}(A)$. Είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$, ακριβώς όπως ο χώρος στηλών ήταν υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$.

Η συνθήκη (i) ισχύει: Αν $Ax = 0$ και $Ax' = 0$, τότε $A(x + x') = 0$. Η συνθήκη (ii) ισχύει και αυτή: Αν $Ax = 0$, τότε $A(cx) = 0$. Καμία από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει αν το δεξί μέλος δεν είναι μηδέν! Μόνο οι λύσεις μιας *ομογενούς* εξίσωσης ($b = 0$) σχηματίζουν υπόχωρο. Μπορούμε εύκολα να βρούμε τον μηδενόχωρο του παραπάνω παραδείγματος· είναι ο μικρότερος δυνατός:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $u = 0$, ενώ η δεύτερη εξίσωση επιβάλλει να έχουμε $v = 0$. Ο μηδενόχωρος περιέχει μόνο το διάνυσμα $(0, 0)$. Ο πίνακας αυτός έχει «ανεξάρτητες στήλες» —μια κομβική έννοια την οποία θα δούμε σύντομα.

Η κατάσταση αλλάζει αν μια τρίτη στήλη είναι συνδυασμός των δύο πρώτων:

$$\textbf{Μεγαλύτερος μηδενόχωρος} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο B έχει τον ίδιο χώρο στηλών με τον A. Η νέα στήλη περιέχεται στο επίπεδο του Σχήματος 2.1· είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων στηλών με τις οποίες ξεκινήσαμε. Αλλά ο μηδενόχωρος του B περιέχει το διάνυσμα $(1, 1, -1)$ και περιέχει αυτομάτως και κάθε πολλαπλάσιο $(c, c, -c)$:

$$\textbf{Ο μηδενόχωρος είναι μια ευθεία} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ο μηδενόχωρος του B είναι η ευθεία όλων των σημείων $x = c$, $y = c$, $z = -c$. (Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η οποία πρέπει να ανήκει σε κάθε υπόχωρο.) Θέλουμε να είμαστε σε θέση, για οποιοδήποτε σύστημα $Ax = b$, να βρίσκουμε τους $\boldsymbol{C}(A)$ και $\boldsymbol{N}(A)$: όλα τα εφικτά δεξιά μέλη b και όλες τις λύσεις του $Ax = 0$.

Τα διανύσματα b ανήκουν στον χώρο στηλών ενώ τα διανύσματα x ανήκουν στον μηδενόχωρο. Θα υπολογίσουμε τη διάσταση καθενός από αυτούς τους υποχώρους και ένα βολικό σύνολο διανυσμάτων για να τους παραγάγουμε. Ελπίζουμε ότι τελικά θα καταφέρουμε να κατανοήσουμε και τους *τέσσερις* υποχώρους που σχετίζονται στενά μεταξύ τους και με τον A —τον χώρο στηλών του A, τον μηδενόχωρο του A και τους δύο ορθογώνιους χώρους τους.

Προβλήματα 2.1

1. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο του επίπεδου x-y (του $\mathbf{R}^2$) που να είναι

(α) κλειστό ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση διανυσμάτων, αλλά όχι ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

(β) κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό αλλά όχι ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων.

Υπόδειξη: Ξεκινώντας με κάποια u και v, προσθέστε και αφαιρέστε για το (α). Δοκιμάστε τα cu και cv για το (β).

2. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$ είναι υπόχωροι;

(α) Το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1, b_2, b_3) με πρώτη συνιστώσα $b_1 = 0$.

(β) Το επίπεδο των διανυσμάτων b με $b_1 = 1$.

(γ) Τα διανύσματα b με $b_2 b_3 = 0$ (η ένωση δύο υποχώρων, του επιπέδου $b_2 = 0$ και του επιπέδου $b_3 = 0$).

(δ) Όλοι οι συνδυασμοί δύο δεδομένων διανυσμάτων $(1, 1, 0)$ και $(2, 0, 1)$.

(ε) Το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1, b_2, b_3) που ικανοποιούν την $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

3. Περιγράψτε τον χώρο στηλών και τον μηδενόχωρο των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Ποιος είναι ο μικρότερος υπόχωρος των 3 επί 3 πινάκων που περιέχει όλους τους συμμετρικούς πίνακες *και* όλους τους κάτω τριγωνικούς πίνακες; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος που περιέχεται και στους δύο αυτούς υποχώρους;

5. Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός πρέπει να ικανοποιούν τις εξής οκτώ ιδιότητες:

1. $x + y = y + x$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. Υπάρχει ένα μοναδικό «μηδενικό διάνυσμα» τέτοιο ώστε $x + 0 = x$ για κάθε x.
4. Για κάθε x υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $-x$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = 0$.
5. $1x = x$.
6. $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$.
7. $c(x + y) = cx + cy$.
8. $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$.

(α) Υποθέστε ότι η πρόσθεση στον $\mathbf{R}^2$ προσθέτει ένα επιπλέον 1 σε κάθε συνιστώσα, έτσι ώστε το $(3, 1) + (5, 0)$ να ισούται με $(9, 2)$ αντί για $(8, 1)$. Αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν αλλάξει, ποιες ιδιότητες δεν ισχύουν;
(β) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών, αν ορίσουμε τους $x + y$ και cx να ισούται με τους συνήθεις xy και x^c αντίστοιχα, είναι διανυσματικός χώρος. Ποιο είναι το «μηδενικό διάνυσμα»;
(γ) Υποθέστε ότι το $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ ορίζεται ως το διάνυσμα $(x_1 + y_2, x_2 + y_1)$. Αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι ο συνήθης $cx = (cx_1, cx_2)$, ποιες από τις οκτώ ιδιότητες δεν ικανοποιούνται;

6. Έστω $\mathbf{P}$ το επίπεδο του τριδιάστατου χώρου με εξίσωση $x + 2y + z = 6$. Ποια είναι η εξίσωση του επιπέδου $\mathbf{P}_0$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο $\mathbf{P}$; Είναι οι $\mathbf{P}$ και $\mathbf{P}_0$ υπόχωροι του $\mathbf{R}^3$;

7. Ποια από τα παρακάτω είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^\infty$;
(α) Όλες οι ακολουθίες σαν την $(1, 0, 1, 0, \dots)$ που περιλαμβάνουν άπειρα το πλήθος μηδενικά.
(β) Όλες οι ακολουθίες $(x_1, x_2, \dots)$ με $x_j = 0$ από κάποιο σημείο και έπειτα.
(γ) Όλες οι φθίνουσες ακολουθίες: $x_{j+1} \leq x_j$ για κάθε j.
(δ) Όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες: τα x_j έχουν κάποιο όριο καθώς $j \to \infty$.
(ε) Όλες οι αριθμητικές πρόοδοι: το $x_{j+1} - x_j$ είναι ίδιο για κάθε j.
(στ) Όλες οι γεωμετρικές πρόοδοι $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$ για οποιαδήποτε k και x_1.

8. Ποιες από τις παρακάτω περιγραφές είναι σωστές; Οι λύσεις x του

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν

(α) ένα επίπεδο.
(β) μια ευθεία.
(γ) ένα σημείο.
(δ) έναν υπόχωρο.
(ε) τον μηδενόχωρο του A.
(στ) τον χώρο στηλών του A.

9. Δείξτε ότι το σύνολο των μη ιδιόμορφων 2 επί 2 πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των *ιδιόμορφων* 2 επί 2 πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος.

10. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ένα «διάνυσμα» του χώρου $\mathbf{M}$ όλων των 2 επί 2 πινάκων. Γράψτε το μηδενικό διάνυσμα αυτού του χώρου, το διάνυσμα $\frac{1}{2}A$ και το διάνυσμα $-A$. Ποιοι πίνακες ανήκουν στον μικρότερο υπόχωρο που περιέχει τον A;

11. (α) Περιγράψτε έναν υπόχωρο του $\mathbf{M}$ που να περιέχει τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αλλά όχι τον $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
(β) Αν ένας υπόχωρος του $\mathbf{M}$ περιέχει τους A και B, πρέπει να περιέχει τον I;
(γ) Περιγράψτε έναν υπόχωρο του $\mathbf{M}$ που να μην περιέχει κανέναν μη μηδενικό διαγώνιο πίνακα.

12. Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 5x$ είναι «διανύσματα» του διανυσματικού χώρου $\mathbf{F}$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων. Ο συνδυασμός $3f(x)-4g(x)$ είναι η συνάρτηση $h(x) =$ ______. Ποια ιδιότητα παραβιάζεται αν ο πολλαπλασιασμός της $f(x)$ με το c δίνει τη συνάρτηση $f(cx)$;

13. Αν το άθροισμα των «διανυσμάτων» $f(x)$ και $g(x)$ του $\mathbf{F}$ ορίζεται να είναι το $f(g(x))$, τότε το «μηδενικό διάνυσμα» είναι το $g(x) = x$. Κρατώντας τον συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό $cf(x)$, βρείτε δύο ιδιότητες που παραβιάζονται.

14. Περιγράψτε τον μικρότερο υπόχωρο του χώρου των 2 επί 2 πινάκων $\mathbf{M}$ που περιέχει

(α) τους $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (β) τους $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(γ) τον $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (δ) τους $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Έστω $\mathbf{P}$ το επίπεδο του $\mathbf{R}^3$ με εξίσωση $x + y - 2z = 4$. Η αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο $\mathbf{P}$! Βρείτε δύο διανύσματα του $\mathbf{P}$ και επιβεβαιώστε ότι το άθροισμά τους δεν ανήκει στο $\mathbf{P}$.

16. Το $\mathbf{P}_0$ είναι το επίπεδο που διέρχεται από το $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $\mathbf{P}$ του Προβλήματος 15. Ποια είναι η εξίσωση του $\mathbf{P}_0$; Βρείτε δύο διανύσματα του $\mathbf{P}_0$ και επιβεβαιώστε ότι το άθροισμά τους ανήκει στο $\mathbf{P}_0$.

17. Οι τέσσερις τύποι υποχώρων του $\mathbf{R}^3$ είναι τα επίπεδα, οι ευθείες, ο ίδιος ο $\mathbf{R}^3$ και ο $\mathbf{Z}$ που περιέχει μόνο το $(0, 0, 0)$.

(α) Περιγράψτε τους τρεις τύπους υποχώρων του $\mathbf{R}^2$.
(β) Περιγράψτε τους πέντε τύπους υποχώρων του $\mathbf{R}^4$.

18. (α) Η τομή δύο επιπέδων που διέρχονται από το $(0,0,0)$ ενδέχεται να είναι ______ αλλά μπορεί να είναι ______. Δεν μπορεί να είναι το μηδενικό διάνυσμα **Z**!
(β) Η τομή ενός επιπέδου που διέρχεται από το $(0,0,0)$ με μια ευθεία που διέρχεται από το $(0,0,0)$ ενδέχεται να είναι ______ αλλά μπορεί να είναι ______.
(γ) Αν **S** και **T** είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$, η τομή τους $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ (τα διανύσματα που ανήκουν και στους δύο υποχώρους) είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^5$. *Ελέγξτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $x + y$ και cx.*

19. Έστω **P** ένα επίπεδο που διέρχεται από το $(0,0,0)$ και **L** μια ευθεία που διέρχεται από το $(0,0,0)$. Ο μικρότερος διανυσματικός χώρος που περιέχει και το **P** και την **L** είναι είτε ______ είτε ______.

20. Σωστό ή λάθος, αν **M** είναι το σύνολο όλων των 3 επί 3 πινάκων (ελέγξτε την πρόσθεση με ένα παράδειγμα);
(α) Οι αντισυμμετρικοί πίνακες του **M** (με $A^{\mathrm{T}} = -A$) σχηματίζουν έναν υπόχωρο.
(β) Οι μη συμμετρικοί πίνακες του **M** (με $A^{\mathrm{T}} \neq A$) σχηματίζουν έναν υπόχωρο.
(γ) Οι πίνακες που έχουν το $(1,1,1)$ στους μηδενόχωρούς τους σχηματίζουν έναν υπόχωρο.

Τα Προβλήματα 21–30 αφορούν τους χώρους στηλών $\boldsymbol{C(A)}$ και την εξίσωση $\boldsymbol{Ax = b}$.

21. Περιγράψτε τους χώρους στηλών (ευθείες ή επίπεδα) των εξής πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

22. Για ποια δεξιά μέλη έχουν λύση τα παρακάτω συστήματα (βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3);

$$\text{(α)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(β)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

23. Αν προσθέσουμε τη γραμμή 1 του A στη γραμμή 2 προκύπτει ο B. Αν προσθέσουμε τη στήλη 1 στη στήλη 2 προκύπτει ο C. Ένας συνδυασμός των στηλών του ______ είναι επίσης ένας συνδυασμός των στηλών του A. Ποιοι δύο πίνακες έχουν την ίδια στήλη ______;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

24. Για ποια διανύσματα (b_1, b_2, b_3) έχουν λύση τα παρακάτω συστήματα;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

25. (Προτεινόμενο) Αν προσθέτουμε μια επιπλέον στήλη b σε έναν πίνακα A, τότε ο χώρος στηλών μεγαλώνει εκτός αν ______. Δώστε ένα παράδειγμα όπου ο χώρος στηλών μεγαλώνει και ένα παράδειγμα όπου δεν μεγαλώνει. Γιατί το $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν ο χώρος στηλών *δεν* μεγαλώνει με τη συμπερίληψη του b;

26. Οι στήλες του AB είναι συνδυασμοί των στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι *ο χώρος στηλών του AB περιέχεται στον* (πιθανώς ισούται με τον) *χώρο στηλών του A*. Δώστε ένα παράδειγμα όπου οι χώροι στηλών των A και AB δεν είναι ίσοι.

27. Αν A είναι ένας 8 επί 8 αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο χώρος στηλών του είναι ______. Γιατί;

28. Σωστό ή λάθος (με αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος);

(α) Τα διανύσματα b που δεν ανήκουν στον χώρο στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ σχηματίζουν έναν υπόχωρο.
(β) Αν ο $\boldsymbol{C}(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε ο A είναι ο μηδενικός πίνακας.
(γ) Ο χώρος στηλών του $2A$ ισούται με τον χώρο στηλών του A.
(δ) Ο χώρος στηλών του $A - I$ ισούται με τον χώρο στηλών του A.

29. Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$ αλλά όχι το $(1, 1, 1)$. Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να είναι μόνο μια ευθεία.

30. Αν το 9 επί 12 σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b, τότε $\boldsymbol{C}(A) =$ ______.

31. Γιατί δεν είναι ο $\mathbf{R}^2$ υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$;

2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ $Ax = 0$ ΚΑΙ $Ax = b$

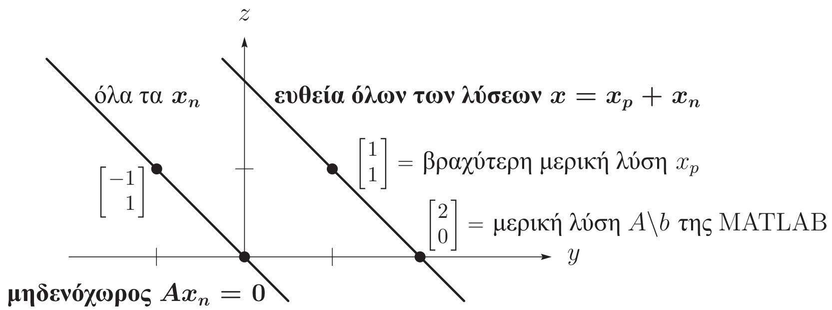
Στο Κεφάλαιο 1 επικεντρωθήκαμε στους τετραγωνικούς αντιστρέψιμους πίνακες. Το $Ax = b$ είχε μία λύση, η οποία ήταν η $x = A^{-1}b$ και την οποία βρήκαμε με τη μέθοδο της απαλοιφής (όχι υπολογίζοντας τον A^{-1}). Στην περίπτωση των παραλληλόγραμμων πινάκων υπάρχουν νέα ενδεχόμενα —ο U μπορεί να μην διαθέτει πλήρες σύνολο οδηγών. Σε αυτή ενότητα θα προχωρήσουμε από τον U προς μια ανηγμένη μορφή R —**τον απλούστερο πίνακα που μπορεί να προκύψει από την απαλοιφή**. Ο R αποκαλύπτει αμέσως όλες τις λύσεις.

Ο μηδενόχωρος ενός αντιστρέψιμου πίνακα περιέχει μόνο το $x = 0$ (πολλαπλασιάζουμε το $Ax = 0$ με τον A^{-1}). Ο χώρος στηλών είναι ολόκληρος ο χώρος (το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b). Τα νέα ερωτήματα προκύπτουν όταν ο μηδενόχωρος *δεν περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα* και/ή ο χώρος στηλών *δεν περιέχει όλα τα διανύσματα*:

1. Κάθε διάνυσμα x_n του μηδενόχωρου μπορεί να προστεθεί σε μια μερική λύση x_p. Οι λύσεις όλων των γραμμικών εξισώσεων έχουν τη μορφή $x = x_p + x_n$:

Πλήρης λύση **Τα $\boldsymbol{Ax_p = b}$ και $\boldsymbol{Ax_n = 0}$ παράγουν το $\boldsymbol{A(x_p + x_n) = b}$.**

2. Όταν ο χώρος στηλών δεν περιέχει κάθε b του $\mathbf{R}^m$, χρειαζόμαστε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση.



Σχήμα 2.2 Οι παράλληλες ευθείες των λύσεων των $Ax_n = 0$ και $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$.

Ένα 3 επί 4 παράδειγμα έχει καλό μέγεθος. Θα γράψουμε όλες τις λύσεις του $Ax = 0$ και θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε να ανήκει στον χώρο στηλών (ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση). Για το 1 επί 1 σύστημα $0x = b$, μια εξίσωση με έναν άγνωστο, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

Το $0x = b$ *δεν έχει λύση* εκτός αν $b = 0$. Ο χώρος στηλών του 1 επί 1 μηδενικού πίνακα περιέχει μόνο το $b = 0$.

Το $0x = 0$ έχει *άπειρες λύσεις*. Ο μηδενόχωρος περιέχει *όλα* τα x. Μια μερική λύση είναι το $x_p = 0$, ενώ η πλήρης λύση είναι το $x = x_p + x_n = 0 + (\text{οποιοδήποτε } x)$.

Απλό, ομολογουμένως. Αν προχωρήσουμε στα 2 επί 2 συστήματα, τα πράγματα γίνονται πιο ενδιαφέροντα. Ο πίνακας $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος: οι $y + z = b_1$ και $2y + 2z = b_2$ συνήθως δεν έχουν λύση.

Δεν υπάρχει λύση εκτός αν $b_2 = 2b_1$. Ο χώρος στηλών του A περιέχει μόνο αυτά τα b, τα πολλαπλάσια του $(1, 2)$.

Αν $b_2 = 2b_1$, υπάρχουν ***άπειρες λύσεις***. Μια μερική λύση των $y+z = 2$ και $2y+2z = 4$ είναι το $x_p = (1, 1)$. Ο μηδενόχωρος του A στο Σχήμα 2.2 περιέχει το $(-1, 1)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του $x_n = (-c, c)$:

Πλήρης λύση Η λύση του $\begin{aligned} y + z &= 2 \\ 2y + 2z &= 4 \end{aligned}$ είναι η $x_p + x_n = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-c\\1+c\end{bmatrix}$.

Κλιμακωτή μορφή U και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R

Θα ξεκινήσουμε απλοποιώντας τον παρακάτω 3 επί 4 πίνακα, πρώτα στη μορφή U και κατόπιν στη μορφή R:

Βασικό παράδειγμα $$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\2 & 6 & 9 & 7\\-1 & -3 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} & * & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & * & * & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 2.3 Τα στοιχεία ενός 5 επί 8 κλιμακωτού πίνακα U και η ανηγμένη μορφή του, R.

Ο οδηγός $a_{11} = 1$ είναι μη μηδενικός. Με τις συνήθεις στοιχειώδεις πράξεις θα προκύψουν μηδενικά στην πρώτη στήλη κάτω από αυτόν τον οδηγό. Τα άσχημα νέα εμφανίζονται στη στήλη 2:

$$\textbf{Η στήλη 2 δεν έχει οδηγό} \qquad A \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο υποψήφιος δεύτερος οδηγός έγινε μηδέν: αυτό *δεν είναι αποδεκτό*. Κοιτάμε κάτω από αυτό το μηδέν για κάποιο μη μηδενικό στοιχείο —σκοπεύοντας να πραγματοποιήσουμε αντιμετάθεση γραμμών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση *το από κάτω στοιχείο είναι και αυτό μηδέν*. Αν ο A ήταν τετραγωνικός, αυτό θα σήμαινε ότι ο πίνακας είναι ιδιόμορφος. Στην περίπτωση των παραλληλόγραμμων πινάκων πρέπει να αναμένουμε ούτως ή άλλως προβλήματα, οπότε δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να *προχωρήσουμε στην επόμενη στήλη*, όπου το στοιχείο οδηγός είναι το 3. Αφαιρώντας δύο επί τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη, καταλήγουμε στον U:

$$\textbf{Κλιμακωτός πίνακας } U \qquad U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς, προχωράμε στην τέταρτη στήλη. Στην τρίτη θέση οδηγού υπάρχει μηδέν, οπότε δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα. Ο U είναι άνω τριγωνικός, αλλά οι οδηγοί του δεν βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο. Τα μη μηδενικά στοιχεία του U «σχηματίζουν σκάλα», έχουν δηλαδή ***κλιμακωτή μορφή***. Για την 5 επί 8 περίπτωση του Σχήματος 2.3, τα στοιχεία που σημειώνονται με αστερίσκο μπορεί να είναι ή να μην είναι μηδέν.

Μπορούμε να φτάσουμε πάντα σε αυτή την κλιμακωτή μορφή U, όπου κάτω από τους οδηγούς υπάρχουν μηδενικά:

1. Οι οδηγοί είναι τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία των αντίστοιχων γραμμών.
2. Κάτω από κάθε οδηγό υπάρχει μια στήλη μηδενικών, που προκύπτει με απαλοιφή.
3. Κάθε οδηγός βρίσκεται δεξιότερα από τον οδηγό της από πάνω γραμμής. Αυτό δίνει στο σχήμα σκάλας. Οι μηδενικές γραμμές εμφανίζονται τελευταίες.

Αφού ξεκινήσαμε από τον A και καταλήξαμε στον U, είναι βέβαιο ότι ο αναγνώστης θα αναρωτηθεί: Ισχύει ότι $A = LU$ όπως προηγουμένως; Δεν υπάρχει λόγος να μην ισχύει, αφού τα βήματα της απαλοιφής δεν άλλαξαν. Και σε αυτή την περίπτωση, κάθε βήμα αφαιρεί ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής από μια γραμμή που βρίσκεται από κάτω της. Το αντίστροφο κάθε βήματος προσθέτει ξανά το πολλαπλάσιο που αφαιρέθηκε. Τα αντίστροφα βήματα εκτελούνται με τη σωστή σειρά, ώστε οι πολλαπλασιαστές να τοποθετηθούν απευθείας στον L:

$$\textbf{Κάτω τριγωνικός πίνακας} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \quad A = LU.$$

Προσέξτε ότι ο L είναι τετραγωνικός. Έχει το ίδιο πλήθος γραμμών με τους A και U.

Η μόνη πράξη που δεν χρειαστήκαμε στο παράδειγμά μας, αλλά που εν γένει χρειάζεται, είναι η αντιμετάθεση γραμμών μέσω ενός πίνακα μετάθεσης P. Αφού προχωράμε στην επόμενη στήλη όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμοι οδηγοί, δεν υπάρχει ανάγκη να θεωρήσουμε ότι ο A είναι μη ιδιόμορφος. Ακολουθεί η περιγραφή της $PA = LU$ για όλους τους πίνακες:

2B Για οποιονδήποτε m επί n πίνακα A, υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P, ένας κάτω τριγωνικός πίνακας L με μοναδιαία διαγώνιο και ένας m επί n κλιμακωτός πίνακας U, τέτοιοι ώστε $PA = LU$.

Ακολουθεί ο R. Μπορούμε να προχωρήσουμε πέρα από τον U, ώστε να κάνουμε τον πίνακα ακόμα απλούστερο. Διαιρούμε τη δεύτερη γραμμή με τον οδηγό της, το 3, έτσι ώστε ***όλοι οι οδηγοί να είναι 1***. Κατόπιν χρησιμοποιούμε τη γραμμή οδηγό για να παραγάγουμε ένα ***μηδενικό πάνω από τον οδηγό***. Αυτή τη φορά αφαιρούμε μια γραμμή από μια *γραμμή που βρίσκεται πιο πάνω*. Το τελικό αποτέλεσμα (η καλύτερη μορφή στην οποία μπορούμε να καταλήξουμε) είναι η ***ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R***:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = R.$$

Ο πίνακας R είναι το τελικό αποτέλεσμα της εφαρμογής της απαλοιφής στον A. Στη MATLAB θα χρησιμοποιούσαμε την εντολή R = rref(A). Ασφαλώς, η rref(R) θα μας έδινε ξανά τον R!

Ποια είναι η ανηγμένη κλιμακωτή γραμμή ενός τετραγωνικού αντιστρέψιμου πίνακα; Σε αυτή την περίπτωση ο R είναι ο *ταυτοτικός πίνακας*. Υπάρχει πλήρες σύνολο οδηγών, όλοι ισούνται με 1, και από πάνω και από κάτω υπάρχουν μηδενικά. Άρα, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, rref(A) = I.

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R ενός 5 επί 8 πίνακα με τέσσερις οδηγούς. **Περιέχει και αυτός έναν ταυτοτικό πίνακα, στις τέσσερις γραμμές οδηγούς και τις τέσσερις στήλες οδηγούς**. Από τον R θα βρούμε γρήγορα τον μηδενόχωρο του A. Το $Rx = 0$ έχει τις ίδιες λύσεις με τα $Ux = 0$ και $Ax = 0$.

Οδηγικές μεταβλητές και ελεύθερες μεταβλητές

Στόχος μας είναι να βρούμε κατευθείαν όλες τις λύσεις του $Rx = 0$. Οι οδηγοί παίζουν κομβικό ρόλο:

$$\begin{array}{c}\textbf{Μηδενόχωρος του } \boldsymbol{R} \\ \textbf{(οι στήλες οδηγοί γράφονται} \\ \textbf{με έντονα στοιχεία)}\end{array} \qquad Rx = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ v \\ \boldsymbol{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι άγνωστοι u, v, w, y χωρίζονται σε δύο ομάδες. Η μία ομάδα περιέχει τις ***οδηγικές μεταβλητές***, αυτές που αντιστοιχούν στις ***στήλες με οδηγούς***. Οι οδηγοί περιέχονται στην πρώτη και την τρίτη στήλη, άρα οι οδηγικές μεταβλητές είναι οι $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{w}$. Η άλλη ομάδα αποτελείται από τις ***ελεύθερες μεταβλητές***, οι οποίες αντιστοιχούν στις ***στήλες χωρίς οδηγούς***. Αυτές είναι η δεύτερη και η τέταρτη στήλη, άρα οι v και y είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Για να βρούμε την πλέον γενική λύση του $Rx = 0$ (ή, ισοδύναμα, του $Ax = 0$) δίνουμε αυθαίρετες τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι καλούμε αυτές τις τιμές απλά v και y. Οι οδηγικές μεταβλητές καθορίζονται πλήρως μέσω των v και y:

$$\boldsymbol{Rx = 0} \quad \begin{array}{lrlr} \text{η} & \boldsymbol{u} + 3v - y = 0 & \text{δίνει} & \boldsymbol{u} = -3v + y \\ \text{η} & \boldsymbol{w} + y = 0 & \text{δίνει} & \boldsymbol{w} = \quad\;\; -y \end{array} \tag{1}$$

Υπάρχει μια «διπλή απειρία» λύσεων· οι v και y είναι ελεύθερες και ανεξάρτητες. Η πλήρης λύση είναι ένας συνδυασμός δύο **ειδικών λύσεων**:

Ο μηδενόχωρος περιέχει όλους τους συνδυασμούς των ειδικών λύσεων

$$x = \begin{bmatrix} -3v + y \\ v \\ -y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Κοιτάξτε ξανά αυτή την πλήρη λύση των $Rx = 0$ και $Ax = 0$. Η ειδική λύση $(-3, 1, 0, 0)$ έχει ελεύθερες μεταβλητές $v = 1$, $y = 0$. Η άλλη ειδική λύση $(1, 0, -1, 1)$ έχει $v = 0$ και $y = 1$. *Όλες οι λύσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των δύο*. Ο καλύτερος τρόπος να βρούμε όλες τις λύσεις του $Ax = 0$ είναι από τις ειδικές λύσεις:

1. Μόλις φτάσουμε στο $Rx = 0$, αναγνωρίζουμε τις οδηγικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές.
2. Δίνουμε σε μία ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 1, εξισώνουμε τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές με το 0 και λύνουμε το $Rx = 0$ ως προς τις οδηγικές μεταβλητές. Το x που προκύπτει είναι μια ειδική λύση.
3. Κάθε ελεύθερη μεταβλητή παράγει τη δική της «ειδική λύση» σύμφωνα με το βήμα 2. Οι συνδυασμοί των ειδικών λύσεων σχηματίζουν τον μηδενόχωρο —όλες τις λύσεις του $Ax = 0$.

Εντός του τετραδιάστατου χώρου όλων των δυνατών διανυσμάτων x, οι λύσεις του $Ax = 0$ σχηματίζουν έναν ***διδιάστατο υπόχωρο*** —τον μηδενόχωρο του A. Στο παράδειγμα, ο $\boldsymbol{N}(A)$ παράγεται από τα ειδικά διανύσματα $(-3, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, -1, 1)$. Οι συνδυασμοί αυτών των δύο διανυσμάτων παράγουν ολόκληρο τον μηδενόχωρο.

Ακολουθεί ένα μικρό τέχνασμα. Οι ειδικές λύσεις προκύπτουν εξαιρετικά εύκολα από τον R. Οι αριθμοί $3, 0, -1$ και 1 βρίσκονται στις «στήλες μη οδηγούς» του R. **Αντιστρέφοντας τα πρόσημά τους, βρίσκουμε τις τιμές των οδηγικών μεταβλητών** (των μη ελεύθερων) **στις ειδικές λύσεις**. Αν τοποθετήσουμε τις δύο ειδικές λύσεις της εξίσωσης (2) σε έναν πίνακα μηδενόχωρου N, προκύπτει η εξής κομψή δομή:

Πίνακας μηδενόχωρου (οι στήλες είναι ειδικές λύσεις)

$$N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{μη ελεύθερη} \\ \text{ελεύθερη} \\ \text{μη ελεύθερη} \\ \text{ελεύθερη} \end{array}$$

Οι ελεύθερες μεταβλητές έχουν τιμές 1 και 0. Όταν οι ελεύθερες στήλες μετακινήθηκαν στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2), οι συντελεστές τους, 3, 0, -1 και 1, άλλαξαν πρόσημο. Έτσι προέκυψαν οι τιμές των οδηγικών μεταβλητών στις ειδικές λύσεις (τις στήλες του N).

Αυτό είναι το κατάλληλο σημείο να αναφέρουμε ένα εξαιρετικά σημαντικό θεώρημα.

Ας υποθέσουμε ότι ένας πίνακας έχει περισσότερες στήλες από γραμμές, $n > m$. Αφού m γραμμές μπορούν να περιέχουν το πολύ m οδηγούς, ***πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον $\boldsymbol{n - m}$ ελεύθερες μεταβλητές***. Θα υπάρχουν ακόμη *περισσότερες* ελεύθερες μεταβλητές αν κάποιες γραμμές του R μηδενιστούν· σε κάθε περίπτωση όμως, τουλάχιστον μια μεταβλητή πρέπει να είναι ελεύθερη. Σε αυτή την ελεύθερη μεταβλητή μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή, με αποτέλεσμα το εξής συμπέρασμα:

2Γ Αν το $Ax = 0$ έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις ($n > m$), έχει τουλάχιστον μία ειδική λύση: Υπάρχουν περισσότερες λύσεις από την τετριμμένη $x = 0$.

Πρέπει να υπάρχουν άπειρες λύσεις, αφού κάθε πολλαπλάσιο cx θα ικανοποιεί επίσης την $A(cx) = 0$. Ο μηδενόχωρος περιέχει την ευθεία που διέρχεται από το x. Και αν υπάρχουν επιπλέον ελεύθερες μεταβλητές, ο μηδενόχωρος γίνεται κάτι περισσότερο από μια ευθεία του n-διάστατου χώρου. *Ο μηδενόχωρος έχει την ίδια «διάσταση» με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών και ειδικών λύσεων.*

Θα ορίσουμε ακριβέστερα την κομβική αυτή έννοια —τη ***διάσταση*** ενός υποχώρου— στην επόμενη ενότητα. Για τον μηδενόχωρο μετράμε τις ελεύθερες μεταβλητές. Για τον χώρο στηλών μετράμε τις οδηγικές μεταβλητές!

Επίλυση των $Ax = b$, $Ux = c$ και $Rx = d$

Η περίπτωση $b \neq 0$ είναι αρκετά διαφορετική από την $b = 0$. Οι γραμμοπράξεις που εφαρμόζονται στον A πρέπει να εφαρμοστούν και στο δεξί μέλος (το b). Θα ξεκινήσουμε την προσπάθεια εύρεσης της συνθήκης επιλυσιμότητας —πότε ανήκει το b στον χώρο στηλών— χρησιμοποιώντας γράμματα (b_1, b_2, b_3). Κατόπιν, θα επιλέξουμε $b = (1, 5, 5)$ και θα βρούμε όλες τις λύσεις x.

Για το αρχικό παράδειγμα $Ax = b = (b_1, b_2, b_3)$, εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη τις πράξεις που οδήγησαν από τον A στον U. Το αποτέλεσμα είναι ένα άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$:

$$\boldsymbol{Ux = c} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Το διάνυσμα c του δεξιού μέλους, το οποίο εμφανίστηκε μετά την εφαρμογή των βημάτων της ορθόδρομης απαλοιφής, είναι απλώς το $L^{-1}b$, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ξεκινάμε τώρα με το $Ux = c$.

Δεν είναι σίγουρο ότι αυτές οι εξισώσεις έχουν λύση. Η ικανοποίηση της τρίτης εξίσωσης είναι πολύ αμφίβολη, διότι το αριστερό της μέλος είναι μηδέν. ***Οι εξισώσεις είναι ασυμβίβαστες, εκτός αν $\boldsymbol{b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0}$***. Μολονότι υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από εξισώσεις, μπορεί να μην υπάρχει λύση. Γνωρίζουμε έναν άλλο τρόπο να απαντήσουμε στο ίδιο ερώτημα: το $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το b ανήκει στον χώρο στηλών του A. Ο υπόχωρος αυτός προκύπτει από τις τέσσερις στήλες του A (όχι του U!):

$$\textbf{Οι στήλες του } \boldsymbol{A} \textbf{ «παράγουν» τον χώρο στηλών} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Μολονότι υπάρχουν τέσσερα διανύσματα, οι συνδυασμοί τους καλύπτουν μόνο ένα επίπεδο του τριδιάστατου χώρου. Η στήλη 2 ισούται με τρία επί τη στήλη 1. Η τέταρτη στήλη ισούται με την τρίτη μείον την πρώτη. *Οι εξαρτημένες αυτές στήλες, η δεύτερη και η τέταρτη, είναι αυτές που δεν έχουν οδηγούς.*

Ο χώρος στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ μπορεί να περιγραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Από τη μία, είναι *το επίπεδο που παράγεται από τις στήλες 1 και 3*. Οι υπόλοιπες στήλες ανήκουν σε αυτό το επίπεδο και δεν συνεισφέρουν τίποτα νέο. Ισοδύναμα, είναι το επίπεδο όλων των διανυσμάτων b που ικανοποιούν την $b_3-2b_2+5b_1=0$· αυτός είναι ο περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το σύστημα να έχει λύση. ***Αφού όλες οι στήλες ικανοποιούν αυτό τον περιορισμό, πρέπει να τον ικανοποιεί και το b!*** Γεωμετρικά, θα δούμε ότι το διάνυσμα $(5,-2,1)$ είναι ορθογώνιο σε κάθε στήλη.

Αν το b ανήκει στον χώρο στηλών, μπορούμε εύκολα να βρούμε τις λύσεις του $Ax=b$. Η τελευταία εξίσωση του $Ux=c$ είναι η $0=0$. Στις ελεύθερες μεταβλητές v και y μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή, όπως προηγουμένως. Οι οδηγικές μεταβλητές u και w προκύπτουν πάλι με ανάδρομη αντικατάσταση. Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με $b_3-2b_2+5b_1=0$, επιλέγουμε $b=(1,5,5)$:

$$\boldsymbol{Ax=b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Η ορθόδρομη απαλοιφή παράγει τον U στα αριστερά και το c στα δεξιά:

$$\boldsymbol{Ux=c} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η $0=0$, όπως ήταν αναμενόμενο. Η ανάδρομη αντικατάσταση δίνει

$$\begin{aligned} 3w+3y&=3 &\quad \text{ή} \quad w&=1-y \\ u+3v+3w+2y&=1 &\quad \text{ή} \quad u&=-2-3v+y. \end{aligned}$$

Υπάρχει πάλι μια διπλή απειρία λύσεων: οι v και y είναι ελεύθερες, ενώ οι u και w δεν είναι:

Πλήρης λύση
$\boldsymbol{x=x_p+x_n}$

$$x=\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Αυτές είναι όλες οι λύσεις του $Ax=0$ συν το νέο διάνυσμα $x_p=(-2,0,1,0)$. Το συγκεκριμένο x_p είναι ***μια μερική λύση*** του $Ax=b$. Οι δύο τελευταίοι όροι με τα v και y δίνουν επιπλέον λύσεις (διότι ικανοποιούν το $Ax=0$). ***Κάθε λύση του $\boldsymbol{Ax=b}$ είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης και μιας λύσης του $\boldsymbol{Ax=0}$***:

$$x_{\textbf{πλήρης}}=x_{\textbf{μερική}}+x_{\textbf{μηδενόχωρου}}$$

Η μερική λύση της εξίσωσης (4) προκύπτει με επίλυση της εξίσωσης *αφού όλες οι ελεύθερες μεταβλητές εξισωθούν με το μηδέν*. Αυτό είναι το μόνο καινούργιο κομμάτι, αφού έχουμε υπολογίσει ήδη τον μηδενόχωρο. Αν πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω εξίσωση με τον A, παίρνουμε $Ax_{\textbf{πλήρης}} = b + 0$.

Γεωμετρικά, οι λύσεις γεμίζουν πάλι μια διδιάστατη επιφάνεια —η οποία όμως δεν είναι υπόχωρος. Δεν περιέχει το $x = 0$. Είναι *παράλληλη* στον μηδενόχωρο που είχαμε προηγουμένως, μετατοπισμένη κατά τη μερική λύση x_p, όπως στο Σχήμα 2.2. Η εξίσωση (4) είναι ένας καλός τρόπος να γράψουμε την απάντηση:

1. Ανάγουμε το $Ax = b$ στο $Ux = c$.
2. Εξισώνοντας τις ελεύθερες μεταβλητές με το μηδέν, βρίσκουμε μια μερική λύση των $Ax_p = b$ και $Ux_p = c$.
3. Βρίσκουμε τις ειδικές λύσεις του $Ax = 0$ (ή του $Ux = 0$ ή του $Rx = 0$). Δίνουμε σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή, με τη σειρά, την τιμή 1. Επομένως, $x = x_p +$ (οποιοσδήποτε συνδυασμός x_n ειδικών λύσεων).

Όταν η εξίσωση ήταν η $Ax = 0$, η μερική λύση ήταν το μηδενικό διάνυσμα! Αυτό συμφωνεί με τον παραπάνω τύπο, με τη διαφορά ότι στην εξίσωση (2) δεν είχαμε γράψει την $x_{\textbf{μερική}} = 0$. Τώρα προσθέτουμε την x_p στις λύσεις μηδενόχωρου, όπως στην εξίσωση (4).

Ερώτημα: Πώς καθιστά η ανηγμένη μορφή R ακόμη πιο ξεκάθαρη αυτή τη λύση; Μπορούμε να το δούμε στο παράδειγμά μας. Αφαιρούμε την εξίσωση 2 από την εξίσωση 1 και κατόπιν διαιρούμε την εξίσωση 2 με τον οδηγό της. Με αυτόν τον τρόπο, στο αριστερό μέλος παράγεται ο R, όπως προηγουμένως. Στο δεξί μέλος, αυτές οι πράξεις μετατρέπουν το $c = (1, 3, 0)$ σε ένα νέο διάνυσμα $d = (-2, 1, 0)$:

Ανηγμένη εξίσωση
$\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{d}$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Η μερική μας λύση x_p (μία από τις πολλές επιλογές) έχει ελεύθερες μεταβλητές $v = y = 0$. Μπορούμε να αγνοήσουμε τις στήλες 2 και 4, οπότε έχουμε αμέσως $u = -2$ και $w = 1$, ακριβώς όπως στην εξίσωση (4). **Τα στοιχεία του $\boldsymbol{d}$ μεταφέρονται κατευθείαν στην $\boldsymbol{x_p}$.** Αυτό συμβαίνει διότι οι στήλες οδηγοί του R σχηματίζουν τον ταυτοτικό πίνακα!

Θα συνοψίσουμε το περιεχόμενο αυτής της ενότητας, πριν παρουσιάσουμε ένα ακόμη αναλυτικό παράδειγμα. Η απαλοιφή αποκαλύπτει τις οδηγικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές. ***Αν υπάρχουν $\boldsymbol{r}$ οδηγοί, υπάρχουν $\boldsymbol{r}$ οδηγικές μεταβλητές και $\boldsymbol{n - r}$ ελεύθερες μεταβλητές***. Ο σημαντικός αυτός αριθμός r έχει όνομα —είναι η ***τάξη του πίνακα***.

2Δ Έστω ότι η απαλοιφή ανάγει το $Ax = b$ στα $Ux = c$ και $Rx = d$, με r γραμμές οδηγούς και r στήλες οδηγούς. **Η τάξη αυτών των πινάκων είναι $\boldsymbol{r}$.** Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές των U και R είναι μηδέν, άρα λύση υπάρχει μόνο αν τα τελευταία $m - r$ στοιχεία των c και d είναι επίσης μηδέν.

Η πλήρης λύση είναι η $x = x_p + x_n$. Μια μερική λύση x_p έχει όλες τις ελεύθερες μεταβλητές ίσες με μηδέν. Οι οδηγικές μεταβλητές της είναι τα πρώτα r στοιχεία του d, άρα $Rx_p = d$.

Οι λύσεις μηδενόχωρου x_n είναι συνδυασμοί των $n - r$ ειδικών λύσεων, με μία ελεύθερη μεταβλητή ίση με 1. Οι οδηγικές μεταβλητές αυτής της ειδικής λύσης βρίσκονται στις αντίστοιχες στήλες του R (με αντίθετο πρόσημο).

Βλέπουμε την κομβική σημασία της τάξης r. Μετράει τις γραμμές οδηγούς του «χώρου γραμμών» και τις στήλες οδηγούς του χώρου στηλών. Ο μηδενόχωρος περιέχει $n-r$ ειδικές λύσεις. Υπάρχουν $m-r$ συνθήκες επιλυσιμότητας για τα b, c ή d.

Ένα ακόμη αναλυτικό παράδειγμα

Η πλήρης διαδικασία περιλαμβάνει τη χρήση της απαλοιφής και των στηλών οδηγών για την εύρεση του χώρου στηλών, του μηδενόχωρου και της τάξης. Ο 3 επί 4 πίνακας A έχει τάξη 2:

$$\text{Το}\quad Ax=b \quad \text{είναι το}\quad \begin{aligned} \mathbf{1}x_1+\mathbf{2}x_2+\mathbf{3}x_3+\ \ \mathbf{5}x_4&=b_1\\ \mathbf{2}x_1+\mathbf{4}x_2+\mathbf{8}x_3+\mathbf{12}x_4&=b_2\\ \mathbf{3}x_1+\mathbf{6}x_2+\mathbf{7}x_3+\mathbf{13}x_4&=b_3\end{aligned} \tag{6}$$

1. Ανάγουμε τον $[A \quad b]$ στον $[U \quad c]$ για να φτάσουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα $Ux = c$.
2. Βρίσκουμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε να υπάρχει λύση.
3. Περιγράφουμε τον χώρο στηλών του A: Ποιο επίπεδο του $\mathbf{R}^3$;
4. Περιγράφουμε τον μηδενόχωρο του A: Ποιες ειδικές λύσεις του $\mathbf{R}^4$;
5. Βρίσκουμε μια μερική λύση του $Ax = (0, 6, -6)$ και την πλήρη λύση $x_p + x_n$.
6. Ανάγουμε τον $[U \quad c]$ στον $[R \quad d]$: Οι ειδικές λύσεις προκύπτουν από τον R και το x_p από το d.

Λύση (Επισημαίνουμε ότι το δεξί μέλος περιλαμβάνεται σαν μια επιπλέον στήλη!)

1. Οι πολλαπλασιαστές της απαλοιφής είναι το 2, το 3 και το -1, οι οποίοι μετατρέπουν τον $[A \quad b]$ στον $[U \quad c]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & \boldsymbol{b_1}\\ 2 & 4 & 8 & 12 & \boldsymbol{b_2}\\ 3 & 6 & 7 & 13 & \boldsymbol{b_3}\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & 5 & \boldsymbol{b_1}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & \boldsymbol{b_2-2b_1}\\ 0 & 0 & -2 & -2 & \boldsymbol{b_3-3b_1}\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & 5 & \boldsymbol{b_1}\\ 0 & 0 & 2 & 2 & \boldsymbol{b_2-2b_1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b_3+b_2-5b_1}\end{array}\right].$$

2. Η τελευταία εξίσωση δίνει τη συνθήκη επιλυσιμότητας $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Αν ισχύει, έχουμε $0 = 0$.
3. Ο χώρος στηλών του A είναι το επίπεδο που περιέχει όλους τους συνδυασμούς των στηλών οδηγών $(1, 2, 3)$ και $(3, 8, 7)$. **Δεύτερη περιγραφή**: Ο χώρος στηλών περιέχει όλα τα διανύσματα με $b_3+b_2-5b_1 = 0$. Αυτό καθιστά το $Ax = b$ επιλύσιμο, άρα το b ανήκει στον χώρο στηλών. *Όλες οι στήλες του A ικανοποιούν το κριτήριο $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Αυτή είναι η εξίσωση του επιπέδου* (*της πρώτης περιγραφής του χώρου στηλών*).
4. Οι ειδικές λύσεις του N έχουν ελεύθερες μεταβλητές $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ και $x_2 = 0$, $x_4 = 1$:

$$\begin{array}{l}\textbf{Πίνακας μηδενόχωρου}\\ \textbf{Ειδικές λύσεις του } \boldsymbol{Ax=0}\\ \textbf{Ανάδρομη αντικατάσταση στο } \boldsymbol{Ux=0}\\ \textbf{Αλλαγή προσήμων στο } \boldsymbol{Rx=0}\end{array} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

5. Επιλέγουμε $b = (0, 6, -6)$, για το οποίο ισχύει $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Η απαλοιφή μετατρέπει το $Ax = b$ στο $Ux = c = (0, 6, 0)$. Εκτελούμε ανάδρομη αντικατάσταση εξισώνοντας τις ελεύθερες μεταβλητές με το 0:

$$\textbf{Μερική λύση του } \boldsymbol{Ax_p} = \mathbf{(0, 6, -6)} \qquad x_p = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{ελεύθερη} \\ \\ \text{ελεύθερη} \end{matrix}$$

Η πλήρης λύση του $Ax = (0, 6, -6)$ είναι (αυτό το x_p) + (όλα τα x_n).

6. Στον ανηγμένο πίνακα R, η τρίτη στήλη αλλάζει από $(3, 2, 0)$ σε $(0, 1, 0)$. Το δεξί μέλος $c = (0, 6, 0)$ γίνεται $d = (-9, 3, 0)$. Τα -9 και 3 μπαίνουν στο x_p:

$$[U \quad c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow [R \quad d] = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & \mathbf{-9} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ο τελικός πίνακας $[\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{d}]$ **είναι ο** $\mathrm{rref}([\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}]) = \mathrm{rref}([\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{c}])$. Οι αριθμοί 2, 0, 2 και 1 στις ελεύθερες στήλες του R έχουν αντίθετα πρόσημα στις ειδικές λύσεις (τον πίνακα μηδενόχωρου N). Το $Rx = d$ αποκαλύπτει τα πάντα.

Προβλήματα 2.2

1. Κατασκευάστε ένα σύστημα που να έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις αλλά να μην έχει λύση. Κάντε το δεξί μέλος μηδέν και βρείτε όλες τις λύσεις x_n.

2. Βρείτε την τάξη των A και B ανάγοντάς τους σε κλιμακωτή μορφή. Ποιες μεταβλητές είναι ελεύθερες;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις ειδικές λύσεις των $Ax = 0$ και $Bx = 0$. Βρείτε όλες τις λύσεις.

3. Βρείτε την κλιμακωτή μορφή U, τις ελεύθερες μεταβλητές και τις ειδικές λύσεις, αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Το $Ax = b$ είναι συμβιβαστό (έχει λύση) όταν το b ικανοποιεί την $b_2 =$ ______. Βρείτε την πλήρη λύση στην ίδια μορφή με την εξίσωση (4).

4. Εκτελώντας τα βήματα του προηγούμενου προβλήματος, βρείτε την πλήρη λύση του $Mx = b$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

5. Γράψτε τις πλήρεις λύσεις $x = x_p + x_n$ των παρακάτω συστημάτων, όπως στην εξίσωση (4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6. Περιγράψτε το σύνολο των εφικτών δεξιών μελών b (στον χώρο στηλών) του

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

βρίσκοντας τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε η τρίτη εξίσωση να γίνει $0 = 0$ (μετά την απαλοιφή). Βρείτε την τάξη και μια μερική λύση.

7. Βρείτε την τιμή του c που καθιστά δυνατή την επίλυση του $Ax = b$ και λύστε το:

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 2 \\ 2u + 3v - w &= 5 \\ 3u + 4v + w &= c. \end{aligned}$$

8. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1 και b_2 (αν υπάρχουν) ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε δύο διανύσματα του μηδενόχωρου του A και την πλήρη λύση του $Ax = b$.

9. (α) Βρείτε τις ειδικές λύσεις του $Ux = 0$. Αναγάγετε τον U στον R και επαναλάβετε:

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Βρείτε όλες τις λύσεις αν το δεξί μέλος αλλάξει από $(0, 0, 0)$ σε $(a, b, 0)$;

10. Βρείτε ένα 2 επί 3 σύστημα $Ax = b$ που να έχει πλήρη λύση το

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε ένα 3 επί 3 σύστημα που να έχει αυτές τις λύσεις αν και μόνο αν $b_1 + b_2 = b_3$.

11. Γράψτε ένα 2 επί 2 σύστημα $Ax = b$ με πολλές λύσεις x_n αλλά καμία λύση x_p. (Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.) Για ποια b υπάρχει κάποια x_p;

12. Ποιες από τις παρακάτω περιγραφές αποτελούν σωστό ορισμό της *τάξης* του A;

(α) Το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του R.
(β) Το πλήθος των στηλών μείον το συνολικό πλήθος των γραμμών.
(γ) Το πλήθος των στηλών μείον το πλήθος των ελεύθερων στηλών.
(δ) Το πλήθος των μονάδων στον R.

13. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R και την τάξη των εξής πινάκων:

(α) Του 3 επί 4 πίνακα που περιέχει μόνο μονάδες.
(β) Του 4 επί 4 πίνακα με $a_{ij} = (-1)^{ij}$.
(γ) Του 3 επί 4 πίνακα με $a_{ij} = (-1)^{j}$.

14. Βρείτε τον R και τις ειδικές λύσεις για καθέναν από τους παρακάτω (μπλοκ) πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Αν οι r οδηγικές μεταβλητές εμφανίζονται πρώτες, ο ανηγμένος R πρέπει να έχει την εξής μορφή:

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{ο } I \text{ είναι } r \text{ επί } r \\ \text{ο } F \text{ είναι } r \text{ επί } n - r \end{matrix}$$

Ποιος είναι ο πίνακας μηδενόχωρου N που περιέχει τις ειδικές λύσεις;

16. Υποθέστε ότι και οι r οδηγικές μεταβλητές εμφανίζονται *τελευταίες*. Περιγράψτε τα τέσσερα μπλοκ της m επί n ανηγμένης κλιμακωτής μορφής (το μπλοκ B πρέπει να είναι r επί r):

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Ποιος είναι ο πίνακας μηδενόχωρου N των ειδικών λύσεων; Τι σχήμα έχει;

17. (Ανόητο πρόβλημα) Περιγράψτε όλους τους 2 επί 3 πίνακες A_1 και A_2 με κλιμακωτές μορφές R_1 και R_2 τέτοιες ώστε ο $R_1 + R_2$ να είναι η κλιμακωτή μορφή του $A_1 + A_2$. Ισχύει σε αυτή την περίπτωση ότι $R_1 = A_1$ και $R_2 = A_2$;

18. Αν ο A έχει r στήλες οδηγούς, τότε ο A^{T} έχει r στήλες οδηγούς. Δώστε ένα 3 επί 3 παράδειγμα όπου τα πλήθη των στηλών να είναι διαφορετικά για τους A και A^{T}.

19. Ποιες είναι οι ειδικές λύσεις των $Rx = 0$ και $R^{\mathrm{T}}y = 0$ για τους παρακάτω R;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

20. *Αν ο A έχει τάξη r, τότε έχει έναν r επί r υποπίνακα S που είναι αντιστρέψιμος.* Βρείτε αυτόν τον υποπίνακα S από τις γραμμές οδηγούς και τις στήλες οδηγούς κάθε A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Εξηγήστε γιατί οι γραμμές οδηγοί και οι στήλες οδηγοί του A (όχι του R) δίνουν πάντα έναν r επί r αντιστρέψιμο υποπίνακα του A.

22. Βρείτε τις τάξεις των AB και AM (πίνακας τάξης 1 επί πίνακα τάξης 1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1{,}5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc \end{bmatrix}.$$

23. Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες τάξης 1 $A = uv^{\mathrm{T}}$ και $B = wz^{\mathrm{T}}$, παίρνουμε uz^{T} επί τον αριθμό ___. Ο AB έχει τάξη 1 εκτός αν ___ $= 0$.

24. Αν κάθε στήλη του AB είναι ένας συνδυασμός των στηλών του A, τότε από τις διαστάσεις των χώρων στηλών προκύπτει ότι **τάξη**$(\boldsymbol{AB}) \leq$ **τάξη**$(\boldsymbol{A})$. Πρόβλημα: Αποδείξτε επίσης ότι **τάξη**$(\boldsymbol{AB}) \leq$ **τάξη**$(\boldsymbol{B})$.

25. (Σημαντικό) Υποθέστε ότι οι A και B είναι n επί n πίνακες και $AB = I$. Χρησιμοποιώντας την τάξη$(AB) \leq$ τάξη(A), αποδείξτε ότι η τάξη του A είναι n. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και ο B πρέπει να είναι ο αμφίπλευρος αντίστροφός του. Συνεπώς, $BA = I$ (*το οποίο δεν είναι τόσο προφανές!*).

26. Αν ο A είναι 2 επί 3 και ο C είναι 3 επί 2, χρησιμοποιώντας την τάξη του δείξτε ότι $CA \neq I$. Δώστε ένα παράδειγμα όπου $AC = I$. Για $m < n$, ένας δεξιός αντίστροφος δεν είναι αριστερός αντίστροφος.

27. Υποθέστε ότι οι A και B έχουν την *ίδια* ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R. Εξηγήστε πώς μπορούμε να μετατρέψουμε τον A στον B με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις. Άρα ο B ισούται με έναν ______ πίνακα επί A.

28. Κάθε m επί n πίνακας τάξης r ανάγεται σε ένα γινόμενο (m επί r) επί (r επί n):

$$A = (\text{στήλες οδηγοί του } A)(\text{πρώτες } r \text{ γραμμές του } R) = (\textbf{ΣΤΗΛ})(\textbf{ΓΡΑΜ}).$$

Γράψτε τον 3 επί 4 πίνακα A που δίνεται στην αρχή αυτής της ενότητας σαν το γινόμενο του 3 επί 2 πίνακα που προκύπτει από τις στήλες οδηγούς και του 2 επί 4 πίνακα που προκύπτει από τον R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

29. Υποθέστε ότι A είναι ένας m επί n πίνακας τάξης r. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι R. Περιγράψτε ακριβώς την *ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του* R^{T} (όχι του A^{T}).

30. (Προτεινόμενο) Εκτελώντας τα έξι βήματα που αναφέρονται μετά την εξίσωση (6), βρείτε τον χώρο στηλών και τον μηδενόχωρο του A, και τη λύση του $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

31. Για κάθε c, βρείτε τον R και τις ειδικές λύσεις του $Ax = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & c & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} 1-c & 2 \\ 0 & 2-c \end{bmatrix}.$$

32. Ποιος είναι ο πίνακας μηδενόχωρου N (των ειδικών λύσεων) των A, B, C;

$$A = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} I & I & I \end{bmatrix}.$$

Τα Προβλήματα 33–36 αφορούν την επίλυση του $Ax = b$. Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στο κείμενο, βρείτε τις x_p και x_n. Αναγάγετε τον επαυξημένο πίνακα $[A \;\; b]$.

33. Βρείτε τις πλήρεις λύσεις των

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 5 \\ -x - 3y + 3z &= 5 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

34. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση; Συμπεριλάβετε το b ως τέταρτη στήλη στον $[A \;\; b]$. Βρείτε όλες τις λύσεις όταν ισχύει αυτή η συνθήκη:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= b_1 \\ 2x + 5y - 4z &= b_2 \\ 4x + 9y - 8z &= b_3. \end{aligned}$$

35. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3, b_4 ώστε τα παρακάτω συστήματα να έχουν λύση; *Λύστε ως προς* x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

36. Ποια διανύσματα (b_1, b_2, b_3) ανήκουν στον χώρο στηλών του A; Ποιοι συνδυασμοί γραμμών του A δίνουν μηδέν;

$$\text{(α)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{(β)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

37. Γιατί σε ένα 1 επί 3 σύστημα δεν μπορεί να έχουμε $x_p = (2, 4, 0)$ και $x_n =$ οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του $(1, 1, 1)$;

38. (α) Αν x_1 και x_2 είναι δύο λύσεις του $Ax = b$, βρείτε δύο λύσεις του $Ax = 0$.
(β) Στη συνέχεια βρείτε μια ακόμη λύση του $Ax = b$.

39. Εξηγήστε γιατί δεν ισχύει τίποτα από τα παρακάτω:
(α) Η πλήρης λύση είναι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των x_p και x_n.
(β) Ένα σύστημα $Ax = b$ έχει το πολύ μία μερική λύση.
(γ) Η λύση x_p με όλες τις ελεύθερες μεταβλητές ίσες με μηδέν είναι η βραχύτερη λύση (ελάχιστο μήκος $\|x\|$). (Βρείτε ένα 2 επί 2 αντιπαράδειγμα.)
(δ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ο μηδενόχωρος δεν περιέχει καμία λύση x_n.

40. Αν η στήλη 5 του U δεν έχει οδηγό, τότε το x_5 είναι ______ μεταβλητή. Το μηδενικό διάνυσμα (είναι) (δεν είναι) η μοναδική λύση του $Ax = 0$. Αν το $Ax = b$ έχει λύση, τότε έχει ______ λύσεις.

41. Αν γνωρίζετε την x_p (ελεύθερες μεταβλητές $= 0$) και όλες τις ειδικές λύσεις του $Ax = b$, βρείτε την x_p και όλες τις ειδικές λύσεις των παρακάτω συστημάτων:

$$Ax = 2b \qquad \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ X \end{bmatrix} = b \qquad \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}.$$

42. Αν το $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις, γιατί είναι αδύνατο να έχει μόνο μία λύση το $Ax = B$ (νέο δεξί μέλος); Θα μπορούσε να μην έχει λύση το $Ax = B$;

43. Επιλέξτε τον αριθμό q έτσι ώστε (αν είναι δυνατό) η τάξη να είναι (α) 1, (β) 2, (γ) 3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}.$$

44. Δώστε παραδείγματα πινάκων A για τους οποίους το πλήθος των λύσεων του $Ax = b$ να είναι

(α) 0 ή 1, ανάλογα με το b.
(β) ∞, ανεξάρτητα από το b.
(γ) 0 ή ∞, ανάλογα με το b.
(δ) 1, ανεξάρτητα από το b.

45. Γράψτε όλες τις γνωστές σχέσεις μεταξύ r, m και n αν το $Ax = b$ έχει

(α) καμία λύση για κάποια b.
(β) άπειρες λύσεις για κάθε b.
(γ) ακριβώς μία λύση για κάποια b, καμία λύση για άλλα b.
(δ) ακριβώς μία λύση για κάθε b.

46. Εφαρμόστε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss–Jordan (το δεξί μέλος γίνεται μια επιπλέον στήλη) στα $Ux = 0$ και $Ux = c$. Καταλήξτε στα $Rx = 0$ και $Rx = d$:

$$\begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{8} \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το $Rx = 0$, βρείτε την x_n (η ελεύθερη μεταβλητή του είναι $x_2 = 1$). Λύνοντας το $Rx = d$, βρείτε την x_p (η ελεύθερη μεταβλητή του είναι $x_2 = 0$).

47. Εφαρμόζοντας απαλοιφή με την επιπλέον στήλη, καταλήξετε στα $Rx = 0$ και $Rx = d$:

$$\begin{bmatrix} & & \\ U & 0 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} & & \\ U & c \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & \mathbf{9} \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}.$$

Λύστε το $Rx = 0$ (ελεύθερη μεταβλητή $= 1$). Ποιες είναι οι λύσεις του $Rx = d$;

48. Αναγάγετε το παρακάτω σύστημα στο $Ux = c$ (εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss) και κατόπιν στο $Rx = d$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = b.$$

Βρείτε μια μερική λύση x_p και όλες τις λύσεις μηδενόχωρου x_n.

49. Βρείτε πίνακες A και B που να έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα. Αν δεν μπορείτε να βρείτε, εξηγήστε γιατί.

(α) Η μοναδική λύση του $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι το $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(β) Η μοναδική λύση του $Bx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

50. Η πλήρης λύση του $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον A.

51. Ο μηδενόχωρος ενός 3 επί 4 πίνακα A είναι η ευθεία που διέρχεται από το $(2, 3, 1, 0)$.

(α) Ποια είναι η *τάξη* του A και η πλήρης λύση του $Ax = 0$;

(β) Ποια είναι η ακριβής ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R του A;

52. Αναγάγετε τους παρακάτω πίνακες A και B στις συνήθεις κλιμακωτές μορφές τους, U:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

Βρείτε μια ειδική λύση για κάθε ελεύθερη μεταβλητή και περιγράψτε κάθε λύση των $Ax = 0$ και $Bx = 0$. Αναγάγετε τις κλιμακωτές μορφές U στους αντίστοιχους R και σημειώστε τον ταυτοτικό πίνακα που σχηματίζουν οι γραμμές οδηγοί και οι στήλες οδηγοί.

53. Σωστό ή λάθος; (Με αιτιολόγηση αν είναι σωστό και αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος.)

(α) Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

(β) Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

(γ) Ένας m επί n πίνακας έχει το πολύ n οδηγικές μεταβλητές.

(δ) Ένας m επί n πίνακας έχει το πολύ m οδηγικές μεταβλητές.

54. Υπάρχει 3 επί 3 πίνακας χωρίς μηδενικά στοιχεία για τον οποίο να ισχύει $U = R = I$;

55. Βάλτε όσο το δυνατόν περισσότερες μονάδες σε έναν 4 επί 7 κλιμακωτό πίνακα U και σε μια *ανηγμένη* μορφή R με στήλες οδηγούς τις $2, 4, 5$.

56. Αν η στήλη 4 ενός 3 επί 5 πίνακα περιέχει μόνο μηδενικά, τότε η x_4 είναι σίγουρα ______ μεταβλητή. Η ειδική λύση για αυτή τη μεταβλητή είναι το διάνυσμα $x =$ ______.

57. Αν οι πρώτες και τελευταίες στήλες ενός 3 επί 5 πίνακα είναι ίδιες (μη μηδενικές), τότε η ______ είναι ελεύθερη μεταβλητή. Βρείτε την ειδική λύση για αυτή τη μεταβλητή.

58. Η εξίσωση $x - 3y - z = 0$ ορίζει ένα επίπεδο του $\mathbf{R}^3$. Ποιος είναι ο πίνακας A αυτής της εξίσωσης; Ποιες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές; Οι ειδικές λύσεις είναι οι $(3, 1, 0)$ και ______. Το παράλληλο επίπεδο $x - 3y - z = 12$ περιέχει το σημείο $(12, 0, 0)$. Όλα τα σημεία αυτού του επίπεδου έχουν την εξής μορφή (συμπληρώστε τις πρώτες συνιστώσες):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

59. Υποθέστε ότι σε έναν 4 επί 5 πίνακα με τέσσερις οδηγούς έχουμε στήλη $1 +$ στήλη $3 +$ στήλη $5 = 0$. Ποια στήλη είναι σίγουρο ότι δεν έχει οδηγό (και ποια μεταβλητή είναι ελεύθερη); Ποια είναι η ειδική λύση; Ποιος είναι ο μηδενόχωρος;

Στα Προβλήματα 60–66 σας ζητείται να βρείτε πίνακες (αν είναι δυνατό) με συγκεκριμένες ιδιότητες.

60. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

61. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(4, 3, 2, 1)$.

62. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 5)$ και $(0, 3, 1)$, και του οποίου ο μηδενόχωρος να περιέχει το $(1, 1, 2)$.

63. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$, και του οποίου ο μηδενόχωρος να περιέχει τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1)$.

64. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει το $(1, 1, 1)$ και του οποίου ο μηδενόχωρος να είναι η ευθεία των πολλαπλασίων του $(1, 1, 1, 1)$.

65. Κατασκευάστε έναν 2 επί 2 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να ισούται με τον χώρο στηλών του.

66. Γιατί δεν υπάρχει 3 επί 3 πίνακας του οποίου ο μηδενόχωρος να ισούται με τον χώρο στηλών του;

67. Η ανηγμένη μορφή R ενός 3 επί 3 πίνακα με τυχαία επιλεγμένα στοιχεία είναι σχεδόν σίγουρα ______. Ποιος θα είναι πρακτικά σίγουρα ο R αν ο τυχαίος A είναι 4 επί 3;

68. Χρησιμοποιώντας παραδείγματα, δείξτε ότι οι παρακάτω τρεις ισχυρισμοί εν γένει *δεν ισχύουν*:

(α) Οι A και A^{T} έχουν τον ίδιο μηδενόχωρο.
(β) Οι A και A^{T} έχουν τις ίδιες ελεύθερες μεταβλητές.
(γ) Αν ο R είναι η ανηγμένη μορφή του $\mathrm{rref}(A)$, τότε ο R^{T} είναι ο $\mathrm{rref}(A^{\mathrm{T}})$.

69. Αν οι ειδικές λύσεις του $Rx = 0$ βρίσκονται στις στήλες των παρακάτω N, εργαζόμενοι ανάδρομα βρείτε τις μη μηδενικές γραμμές των ανηγμένων πινάκων R:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad \text{(κενός 3 επί 1).}$$

70. Εξηγήστε γιατί οι A και $-A$ έχουν πάντα την ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R.

2.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ, ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Από μόνοι τους, οι αριθμοί m και n δεν δίνουν την πλήρη εικόνα του πραγματικού μεγέθους ενός γραμμικού συστήματος. Ο πίνακας του παραδείγματός μας είχε τρεις γραμμές και τέσσερις στήλες, αλλά η τρίτη γραμμή δεν ήταν παρά συνδυασμός των δύο πρώτων. Η απαλοιφή τη μετέτρεψε σε μηδενική γραμμή. Δεν επηρέασε καθόλου το ομογενές πρόβλημα $Ax = 0$. Οι τέσσερις στήλες δεν ήταν ούτε αυτές ανεξάρτητες, ενώ ο χώρος στηλών εκφυλίστηκε σε ένα διδιάστατο επίπεδο.

Ο σημαντικός αριθμός που αρχίζει να αποκαλύπτεται (το πραγματικό μέγεθος) είναι η ***τάξη r***. Εισαγάγαμε την τάξη ως το *πλήθος των οδηγών* στη διαδικασία απαλοιφής. Ισοδύναμα, ο τελικός πίνακας U έχει r μη μηδενικές γραμμές. Αυτός ο ορισμός θα μπορούσε να δοθεί σε έναν υπολογιστή. Θα ήταν όμως λάθος να μην προχωρήσουμε παραπέρα, διότι η τάξη έχει μια απλή διαισθητικά σημασία: *Η τάξη μετράει το πλήθος των γνησίως ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A*. Θέλουμε μαθηματικούς και όχι υπολογιστικούς ορισμούς.

Στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να εξηγήσουμε και να χρησιμοποιήσουμε τέσσερις έννοιες:

1. Τη γραμμική ανεξαρτησία και εξάρτηση.
2. Την παραγωγή ενός υποχώρου.
3. Τη βάση ενός υποχώρου (ένα σύνολο διανυσμάτων).
4. Τη διάσταση ενός υποχώρου (ένας αριθμός).

Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε τη ***γραμμική ανεξαρτησία***. Δεδομένου ενός συνόλου διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$, εξετάζουμε τους συνδυασμούς τους, $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k$. Ο τετριμμένος συνδυασμός, με όλα τα βάρη $c_i = 0$, παράγει προφανώς το μηδενικό διάνυσμα: $0v_1 + \cdots + 0v_k = 0$. Το ερώτημα είναι αν αυτός είναι ο *μοναδικός τρόπος* παραγωγής του μηδενός. Αν ναι, τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα.

Αν υπάρχει άλλος συνδυασμός των διανυσμάτων που δίνει μηδέν, τα διανύσματα είναι *εξαρτημένα*.

2E Αν η $c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = 0$ ισχύει μόνο όταν $c_1 = \cdots = c_k = 0$, τότε τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_k$ είναι ***γραμμικά ανεξάρτητα***. Αν κάποιο c είναι μη μηδενικό, τα v είναι ***γραμμικά εξαρτημένα***. Κάποιο διάνυσμα είναι συνδυασμός των υπόλοιπων.

Μπορούμε εύκολα να παραστήσουμε γραφικά τη γραμμική εξάρτηση στον τριδιάστατο χώρο, όταν όλα τα διανύσματα ξεκινούν από την αρχή των αξόνων. Δύο διανύσματα είναι εξαρτημένα αν περιέχονται στην ίδια ευθεία. *Τρία διανύσματα είναι εξαρτημένα αν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο*. Αν επιλέξουμε τυχαία τρία διανύσματα, και δεν τύχει κάτι εξαιρετικό, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν θα περιέχονται στο ίδιο επίπεδο). Τέσσερα διανύσματα είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbf{R}^3$.

Παράδειγμα 1 Αν το v_1 είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε το σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο. Μπορούμε να επιλέξουμε $c_1 = 3$ και $c_i = 0$ για όλα τα υπόλοιπα, το οποίο είναι ένας μη τετριμμένος συνδυασμός που παράγει το μηδέν.

Παράδειγμα 2 Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένες, αφού η δεύτερη στήλη ισούται με τρία επί την πρώτη. Συνδυάζοντας τις στήλες με βάρη $-3, 1, 0, 0$, παίρνουμε μια στήλη μηδενικών.

Οι γραμμές είναι και αυτές γραμμικά εξαρτημένες· η γραμμή 3 ισούται με δύο επί τη γραμμή 2 μείον πέντε επί τη γραμμή 1. (Αυτό είναι το ίδιο με τον συνδυασμό των b_1, b_2, b_3 που έπρεπε να μηδενίζεται στο δεξί μέλος ώστε να είναι συμβιβαστό το $Ax = b$. Αν δεν ίσχυε $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, η τρίτη εξίσωση δεν θα γινόταν $0 = 0$.)

Παράδειγμα 3 Οι στήλες του παρακάτω τριγωνικού πίνακα είναι γραμμικά *ανεξάρτητες*:

Κανένα μηδενικό στη διαγώνιο $$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αναζητούμε έναν συνδυασμό των στηλών που να δίνει μηδέν:

Λύνουμε το $\boldsymbol{Ac = 0}$ $$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι τα c_1, c_2, c_3 είναι όλα υποχρεωτικά μηδέν. Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $c_3 = 0$. Κατόπιν, από την επόμενη εξίσωση παίρνουμε $c_2 = 0$, και αντικαθιστώντας στη πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι υποχρεωτικά $c_1 = 0$. Ο μόνος συνδυασμός που παράγει το μηδενικό διάνυσμα είναι ο τετριμμένος συνδυασμός. ***Ο μηδενόχωρος του A περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα $c_1 = c_2 = c_3 = 0$***.

Οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $N(A) = \{$μηδενικό διάνυσμα$\}$.

Αντίστοιχος συλλογισμός ισχύει για τις γραμμές του A, οι οποίες είναι επίσης ανεξάρτητες. Ας υποθέσουμε ότι

$$c_1(3,4,2) + c_2(0,1,5) + c_3(0,0,2) = (0,0,0).$$

Από τις πρώτες συνιστώσες βρίσκουμε ότι $3c_1 = 0$ ή $c_1 = 0$. Κατόπιν, από τις δεύτερες συνιστώσες παίρνουμε $c_2 = 0$ και τέλος $c_3 = 0$.

Οι μη μηδενικές γραμμές κάθε κλιμακωτού πίνακα U πρέπει να είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, αν επιλέξουμε *τις στήλες που περιέχουν τους οδηγούς*, είναι και αυτές γραμμικά ανεξάρτητες. Στο προηγούμενο παράδειγμά μας, με

Δύο ανεξάρτητες γραμμές
Δύο ανεξάρτητες στήλες $$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

οι στήλες οδηγοί 1 και 3 είναι ανεξάρτητες. Κανένα σύνολο τριών στηλών δεν αποτελείται από ανεξάρτητες στήλες, και σίγουρα δεν είναι ανεξάρτητες και οι τέσσερις. Ισχύει ότι οι στήλες 1 και 4 είναι επίσης ανεξάρτητες, αν όμως αλλάζαμε το τελευταίο 1 σε 0 θα ήταν εξαρτημένες. *Αυτές που είναι εγγυημένα ανεξάρτητες είναι οι στήλες με τους οδηγούς*. Ο γενικός κανόνας είναι ο εξής:

2ΣΤ Οι r μη μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα U και ενός ανηγμένου πίνακα R είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει για τις r στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Παράδειγμα 4 Οι στήλες του n επί n ταυτοτικού πίνακα είναι ανεξάρτητες:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι στήλες $e_1, \ldots, e_n$ αυτού του πίνακα αντιπροσωπεύουν τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις των συντεταγμένων. Στον $\mathbf{R}^4$,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Τα περισσότερα σύνολα τεσσάρων διανυσμάτων στον $\mathbf{R}^4$ αποτελούνται από ανεξάρτητα διανύσματα. Τα συγκεκριμένα e είναι η ασφαλέστερη επιλογή.

Για να ελέγξουμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$ είναι ανεξάρτητα, τα τοποθετούμε στις στήλες ενός πίνακα A και λύνουμε το σύστημα $Ac = 0$. Τα διανύσματα είναι εξαρτημένα αν υπάρχει λύση διαφορετική από την $c = 0$. Αν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές (*τάξη* n), δεν υπάρχει άλλος μηδενόχωρος εκτός του $c = 0$· τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. Αν η τάξη είναι μικρότερη από n, τουλάχιστον μια ελεύθερη μεταβλητή μπορεί να είναι μη μηδενική και οι στήλες είναι εξαρτημένες.

Μια περίπτωση έχει ειδικό ενδιαφέρον. Έστω ότι τα n διανύσματα έχουν m συνιστώσες, οπότε ο A είναι ένας m επί n πίνακας. Αν $n > m$, υπάρχουν πάρα πολλές στήλες για να είναι ανεξάρτητες! Δεν μπορούν να υπάρχουν n οδηγοί, αφού δεν υπάρχουν αρκετές γραμμές για να τους χωρέσουν. Η τάξη θα είναι μικρότερη από n. Κάθε σύστημα $Ac = 0$ με περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις έχει λύσεις $c \neq 0$.

2Ζ Ένα σύνολο n διανυσμάτων του $\mathbf{R}^m$ αποτελείται υποχρεωτικά από γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα αν $n > m$.

Ο αναγνώστης θα αναγνωρίσει ότι αυτό είναι μια διαφορετική μορφή του 2Γ: Κάθε m επί n σύστημα $Ax = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις αν $n > m$.

Παράδειγμα 5 Οι παρακάτω τρεις στήλες του $\mathbf{R}^2$ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τον συνδυασμό των στηλών που παράγουν το μηδέν λύνουμε το $Ac = 0$:

$$A \to U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν δώσουμε στην ελεύθερη μεταβλητή c_3 την τιμή 1, εφαρμόζοντας ανάδρομη αντικατάσταση στο $Uc = 0$ παίρνουμε $c_2 = -1$ και $c_1 = 1$. Με αυτά τα τρία βάρη, η πρώτη στήλη μείον τη δεύτερη συν την τρίτη δίνει μηδέν: Εξάρτηση.

Παραγωγή ενός υποχώρου

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων *παράγει έναν χώρο*. Ο χώρος στηλών του A *παράγεται* από τις στήλες. **Οι συνδυασμοί τους παράγουν ολόκληρο τον χώρο:**

2Η Αν ένας διανυσματικός χώρος $\mathbf{V}$ αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $w_1, \ldots, w_\ell$, τότε τα διανύσματα αυτά ***παράγουν*** τον χώρο. Κάθε διάνυσμα v του $\mathbf{V}$ είναι ένας συνδυασμός των w:

Κάθε v προκύπτει από τα w: $\quad v = c_1 w_1 + \cdots + c_\ell w_\ell \quad$ για κάποιους συντελεστές c_i.

Επιτρέπεται διαφορετικοί συνδυασμοί των w να δίνουν το ίδιο διάνυσμα v. Τα c δεν χρειάζεται να είναι μοναδικά, διότι το παράγον σύνολο μπορεί να είναι πάρα πολύ μεγάλο —μπορεί να περιέχει το μηδενικό διάνυσμα ή ακόμη και όλα τα διανύσματα.

Παράδειγμα 6 Τα διανύσματα $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$ και $w_3 = (-2, 0, 0)$ παράγουν ένα επίπεδο (το επίπεδο x-y) του $\mathbf{R}^3$. Τα δύο πρώτα διανύσματα παράγουν επίσης το ίδιο επίπεδο, ενώ τα w_1 και w_3 παράγουν μόνο μια ευθεία.

Παράδειγμα 7 Ο χώρος στηλών του A είναι ακριβώς ***ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του***. Ο χώρος γραμμών παράγεται από τις γραμμές. Ο ορισμός ικανοποιείται. Πολλαπλασιάζοντας τον A με οποιοδήποτε x παίρνουμε έναν συνδυασμό των στηλών· ένα διάνυσμα Ax του χώρου στηλών.

Τα διανύσματα συντεταγμένων $e_1, \ldots, e_n$ που προκύπτουν από τον ταυτοτικό πίνακα παράγουν τον $\mathbf{R}^n$. Κάθε διάνυσμα $b = (b_1, \ldots, b_n)$ είναι ένας συνδυασμός αυτών των στηλών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, τα βάρη είναι οι ίδιες οι συνιστώσες b_i: $b = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$. Αλλά ο $\mathbf{R}^n$ παράγεται και από τις στήλες άλλων πινάκων!

Βάση ενός διανυσματικού χώρου

Για να διαπιστώσουμε αν ένα b είναι ένας συνδυασμός των στηλών, δοκιμάζουμε να λύσουμε το $Ax = b$. Για να διαπιστώσουμε αν οι στήλες είναι ανεξάρτητες, λύνουμε το $Ax = 0$. ***Η παραγωγή συνδέεται με τον χώρο στηλών, ενώ η ανεξαρτησία συνδέεται με τον μηδενόχωρο***. Τα διανύσματα συντεταγμένων $e_1, \ldots, e_n$ παράγουν τον $\mathbf{R}^n$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σε γενικές γραμμές, ***κανένα διάνυσμα αυτού του συνόλου δεν περισσεύει***. Αυτό μας οδηγεί στην κομβική έννοια της ***βάσης***.

2Θ Μια ***βάση*** ενός διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων που έχουν ταυτόχρονα δύο ιδιότητες:

1. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν είναι περισσότερα από όσα πρέπει).

2. Παράγουν τον χώρο $\mathbf{V}$ (δεν είναι λιγότερα από όσα πρέπει).

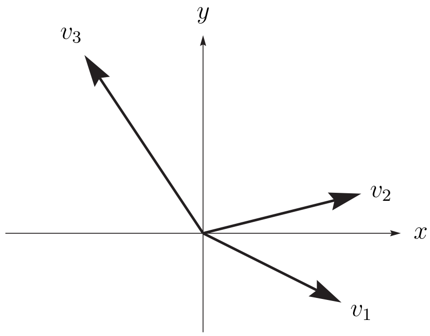
Ο συνδυασμός αυτών των ιδιοτήτων είναι θεμελιώδους σημασίας για τη γραμμική άλγεβρα. Σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου είναι συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης, διότι τα διανύσματα της βάσης παράγουν τον χώρο. Σημαίνει επίσης ότι ο συνδυασμός είναι μοναδικός: Αν $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ και $v = b_1v_1 + \cdots + b_kv_k$, τότε αφαιρώντας παίρνουμε $0 = \sum(a_i - b_i)v_i$. Λόγω της ανεξαρτησίας, όμως, κάθε συντελεστής $a_i - b_i$ πρέπει να είναι μηδέν. Συνεπώς, $a_i = b_i$. ***Υπάρχει ένας και μόνο ένας τρόπος να γράψουμε το v σαν συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης***.

Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι τα διανύσματα συντεταγμένων $e_1, \ldots, e_n$ δεν είναι η μοναδική βάση του $\mathbf{R}^n$. Μερικά πράγματα στη γραμμική άλγεβρα είναι μοναδικά, αλλά όχι αυτό. Ένας διανυσματικός χώρος έχει ***άπειρες το πλήθος διαφορετικές βάσεις***. Όταν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, οι στήλες του είναι ανεξάρτητες —και είναι μια βάση του $\mathbf{R}^n$. Οι δύο στήλες του παρακάτω μη ιδιόμορφου πίνακα είναι μια βάση του $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Κάθε διδιάστατο διάνυσμα είναι ένας συνδυασμός αυτών των (ανεξάρτητων!) στηλών.

Παράδειγμα 8 Το επίπεδο x-y στο Σχήμα 2.4 είναι ο $\mathbf{R}^2$. Το διάνυσμα v_1 από μόνο του είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά δεν παράγει τον $\mathbf{R}^2$. Τα τρία διανύσματα v_1, v_2, v_3 παράγουν σίγουρα τον $\mathbf{R}^2$, αλλά δεν είναι ανεξάρτητα. *Οποιαδήποτε δύο* από αυτά τα διανύσματα, φερ' ειπείν τα v_1 και v_2, έχουν και τις δύο ιδιότητες —παράγουν τον χώρο και είναι ανεξάρτητα. Άρα αποτελούν μια βάση. Επισημαίνουμε ξανά ότι *ένας διανυσματικός χώρος δεν έχει μοναδική βάση*.



Σχήμα 2.4 Ένα παράγον σύνολο v_1, v_2, v_3. Βάσεις v_1, v_2 και v_1, v_3 και v_2, v_3.

Παράδειγμα 9 Οι παρακάτω τέσσερις στήλες παράγουν τον χώρο στηλών του U, αλλά δεν είναι ανεξάρτητες:

$$\textbf{Κλιμακωτός πίνακας} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν πολλές δυνατές βάσεις, αλλά προτείνουμε μια συγκεκριμένη επιλογή: ***Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς*** (στη συγκεκριμένη περίπτωση η πρώτη και η τρίτη, οι οποίες αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές) ***είναι μια βάση του χώρου στηλών***. Οι στήλες αυτές είναι ανεξάρτητες και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι παράγουν τον χώρο. Στην πραγματικότητα, ο χώρος στηλών του U είναι το επίπεδο x-y του $\mathbf{R}^3$. Ο $\boldsymbol{C}(U)$ *δεν είναι ίδιος* με τον χώρο στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ πριν από την απαλοιφή —όμως το *πλήθος* των ανεξάρτητων στηλών δεν άλλαξε.

Για να συνοψίσουμε: *Οι στήλες ενός πίνακα παράγουν τον χώρο στηλών του*. Αν είναι ανεξάρτητες, είναι μια βάση του χώρου στηλών —είτε ο πίνακας είναι τετραγωνικός είτε παραλληλόγραμμος. Αν θέλουμε οι στήλες να είναι μια βάση ολόκληρου του χώρου $\mathbf{R}^n$, ο πίνακας πρέπει να είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Ένας χώρος έχει άπειρες το πλήθος διαφορετικές βάσεις, αλλά όλες οι επιλογές έχουν κάτι κοινό. Το ***πλήθος των διανυσμάτων βάσης*** είναι μια ιδιότητα του ίδιου του χώρου:

2I Οποιεσδήποτε δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}$ περιέχουν το ίδιο πλήθος διανυσμάτων. Αυτός ο αριθμός, ο οποίος είναι κοινός για όλες τις βάσεις και εκφράζει το πλήθος των «βαθμών ελευθερίας» του χώρου, είναι η ***διάσταση*** του $\mathbf{V}$.

Πρέπει να αποδείξουμε το εξής: Όλες οι δυνατές βάσεις περιέχουν το ίδιο πλήθος διανυσμάτων. Κάθε βάση του επιπέδου x-y στο Σχήμα 2.4 περιέχει δύο διανύσματα· η διάσταση του είναι 2. Στις τρεις διαστάσεις χρειαζόμαστε τρία διανύσματα, επί των αξόνων x-y-z ή τριών άλλων (γραμμικά ανεξάρτητων!) διευθύνσεων. ***Η διάσταση του χώρου*** $\mathbf{R}^n$ ***είναι*** $\boldsymbol{n}$. Ο χώρος στηλών του U στο Παράδειγμα 9 είχε διάσταση 2· ήταν ένας «διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$». Ο μηδενικός πίνακας αποτελεί ιδιαίτερη περίπτωση, καθώς ο χώρος στηλών του περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα. Κατά σύμβαση, βάση αυτού του χώρου είναι το κενό σύνολο και η διάστασή του είναι μηδέν.

Ακολουθεί το πρώτο από τα βασικά θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας που θα παρουσιάσουμε:

2IA Αν τα $v_1, \ldots, v_m$ και $w_1, \ldots, w_n$ είναι αμφότερα βάσεις του ίδιου διανυσματικού χώρου, τότε $m = n$. Το πλήθος των διανυσμάτων είναι το ίδιο.

Απόδειξη Θα υποθέσουμε ότι τα w είναι περισσότερα από τα v ($n > m$) και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού τα v είναι βάση, πρέπει να παράγουν τον χώρο. *Κάθε w_j μπορεί να γραφτεί σαν συνδυασμός των v*: Αν $w_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{m1}v_m$, αυτό είναι η πρώτη στήλη ενός πολλαπλασιασμού πινάκων VA:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & \end{bmatrix} = VA.$$

Δεν γνωρίζουμε κάθε a_{ij}, αλλά γνωρίζουμε το σχήμα του A (είναι m επί n). Το δεύτερο διάνυσμα w_2 είναι επίσης ένας συνδυασμός των v. Οι συντελεστές αυτού του συνδυασμού συμπληρώνουν τη δεύτερη στήλη του A. Η βασική ιδέα είναι ότι ο A έχει μια γραμμή για κάθε v και μια στήλη για κάθε w. Ο A είναι ένας κοντός, φαρδύς πίνακας, αφού $n > m$.

Το $Ax = 0$ έχει μη μηδενική λύση, επομένως $VAx = 0$, που σημαίνει ότι $Wx = 0$. *Ένας συνδυασμός των w δίνει μηδέν!* Τα w δεν μπορούν να είναι βάση —άρα δεν μπορούμε να έχουμε $n > m$.

Αν $m > n$, ανταλλάσσουμε τους ρόλους των v και w, και επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα. Ο μόνος τρόπος να αποφύγουμε το άτοπο είναι να έχουμε $m = n$. Άρα αποδείξαμε ότι $m = n$. Επαναλαμβάνουμε: Η ***διάσταση ενός χώρου*** είναι το πλήθος των διανυσμάτων κάθε βάσης του. ■

Χρησιμοποιήσαμε αυτή την απόδειξη νωρίτερα για να δείξουμε ότι κάθε σύνολο $m+1$ διανυσμάτων του $\mathbf{R}^m$ αποτελείται υποχρεωτικά από εξαρτημένα διανύσματα. Τα v και w δεν χρειάζεται να είναι διανύσματα στήλες —η απόδειξη αφορούσε τον πίνακα A των συντελεστών. Μάλιστα, μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής γενικό αποτέλεσμα: *Σε έναν υπόχωρο διάστασης k, κανένα σύνολο που περιέχει περισσότερα από k διανύσματα δεν αποτελείται από ανεξάρτητα διανύσματα, και κανένα σύνολο που περιέχει λιγότερα από k διανύσματα δεν αποτελείται από διανύσματα που μπορούν να παραγάγουν τον χώρο.*

Υπάρχουν και άλλα «δυϊκά» θεωρήματα, από τα οποία θα αναφέρουμε μόνο ένα. Μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα σύνολο διανυσμάτων που είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από όσο πρέπει και να καταλήξουμε σε μια βάση:

2IΒ Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του $\mathbf{V}$ μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει βάση με την προσθήκη επιπλέον διανυσμάτων αν χρειάζεται.

Κάθε παράγον σύνολο του $\mathbf{V}$ μπορεί να συρρικνωθεί ώστε να γίνει βάση με την απόρριψη κάποιων διανυσμάτων αν χρειάζεται.

Η βασική ιδέα είναι ότι μια βάση είναι ένα ***μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο***. Δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο χωρίς απώλεια της ανεξαρτησίας. Μια βάση είναι επίσης ένα ***ελάχιστο παράγον σύνολο***. Δεν μπορεί να γίνει μικρότερο και να εξακολουθεί να παράγει το χώρο.

Πρέπει να προσέξετε ότι ο χαρακτηρισμός «-διάστατος» χρησιμοποιείται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Μιλάμε για ένα τετραδιάστατο ***διάνυσμα***, εννοώντας ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^4$. Παραπάνω ορίσαμε έναν τετραδιάστατο ***υπόχωρο***· ένα παράδειγμα είναι το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^6$ των οποίων η πρώτη και τελευταία συνιστώσα είναι μηδέν. Τα μέλη αυτού του τετραδιάστατου υποχώρου είναι εξαδιάστατα διανύσματα σαν το $(0, 5, 1, 3, 4, 0)$.

Μια τελευταία σημείωση σχετικά με τη γλώσσα της γραμμικής άλγεβρας. Δεν χρησιμοποιούμε ποτέ τους όρους «βάση ενός πίνακα», «τάξη ενός χώρου» ή «διάσταση μιας βάσης». Αυτές οι φράσεις δεν έχουν νόημα. Αυτό που έχουμε είναι ότι *η διάσταση του χώρου στηλών* ισούται με *την τάξη του πίνακα*, όπως θα αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα.

Προβλήματα 2.3

Τα Προβλήματα 1–10 αφορούν τη γραμμική ανεξαρτησία και τη γραμμική εξάρτηση.

1. Δείξτε ότι τα v_1, v_2, v_3 είναι ανεξάρτητα αλλά τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι εξαρτημένα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Λύστε την $c_1v_1 + \cdots + c_4v_4 = 0$ ή το $Ac = 0$. Οι στήλες του A είναι τα v.

2. Βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ανεξάρτητων διανυσμάτων μεταξύ των

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ο αριθμός αυτός είναι __ ______ του χώρου που παράγουν τα v.

3. Δείξτε ότι αν $a = 0$, $d = 0$ ή $f = 0$ (3 περιπτώσεις), οι στήλες του U είναι εξαρτημένες:

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

4. Αν τα a, d, f στο Πρόβλημα 3 είναι όλα μη μηδενικά, δείξτε ότι η μοναδική λύση του $Ux = 0$ είναι η $x = 0$, οπότε ο U έχει ανεξάρτητες στήλες.

5. Ελέγξτε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα:

(α) $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$ και $(3, 2, 1)$.
(β) $(1, -3, 2)$, $(2, 1, -3)$ και $(-3, 2, 1)$.

6. Επιλέξτε τρεις ανεξάρτητες στήλες του U. Κατόπιν κάντε δύο ακόμη διαφορετικές επιλογές. Κάντε το ίδιο για τον A. Για ποιους χώρους βρήκατε βάσεις;

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Αν τα w_1, w_2, w_3 είναι ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε ότι οι διαφορές $v_1 = w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 - w_3$ και $v_3 = w_1 - w_2$ είναι *εξαρτημένες*. Βρείτε έναν συνδυασμό των v που να δίνει μηδέν.

8. Αν τα w_1, w_2, w_3 είναι ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε ότι τα αθροίσματα $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_3$ και $v_3 = w_1 + w_2$ είναι *ανεξάρτητα*. (Γράψτε την $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ συναρτήσει των w. Βρείτε και λύστε εξισώσεις για τα c.)

9. Υποθέστε ότι τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι διανύσματα του $\mathbf{R}^3$.

(α) Τα τέσσερα αυτά διανύσματα είναι εξαρτημένα διότι ______.
(β) Τα δύο διανύσματα v_1 και v_2 θα είναι εξαρτημένα αν ______.
(γ) Τα διανύσματα v_1 και $(0, 0, 0)$ είναι εξαρτημένα διότι ______.

10. Βρείτε δύο ανεξάρτητα διανύσματα στο επίπεδο $x + 2y - 3z - t = 0$ του $\mathbf{R}^4$. Κατόπιν βρείτε τρία ανεξάρτητα διανύσματα. Γιατί όχι τέσσερα; Ποιος πίνακας έχει αυτό το επίπεδο ως μηδενόχωρο;

Τα Προβλήματα 11–18 αφορούν τον χώρο *που παράγεται* από ένα σύνολο διανυσμάτων. Πάρτε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων.

11. Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbf{R}^3$ (είναι ευθεία, επίπεδο ή ο $\mathbf{R}^3$;) που παράγεται από

(α) τα δύο διανύσματα $(1, 1, -1)$ και $(-1, -1, 1)$.

(β) τα τρία διανύσματα $(0,1,1)$, $(1,1,0)$ και $(0,0,0)$.
(γ) τις στήλες ενός 3 επί 5 κλιμακωτού πίνακα με 2 οδηγούς.
(δ) όλα τα διανύσματα με θετικές συνιστώσες.

12. Το διάνυσμα b ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν οι στήλες του A όταν το ______ έχει λύση. Το διάνυσμα c ανήκει στον χώρο γραμμών του A όταν το ______ έχει λύση. *Σωστό ή λάθος*: Αν το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στον χώρο γραμμών, οι γραμμές είναι εξαρτημένες.

13. Βρείτε τις διαστάσεις (α) του χώρου στηλών του A, (β) του χώρου στηλών του U, (γ) του χώρου γραμμών του A, (δ) του χώρου γραμμών του U. Ποιοι δύο από αυτούς τους χώρους είναι ίδιοι;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Επιλέξτε ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ του $\mathbf{R}^4$. Υπάρχουν 24 αναδιατάξεις σαν την (x_2, x_1, x_3, x_4) και (x_4, x_3, x_1, x_2). Τα 24 αυτά διανύσματα, συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του x, παράγουν έναν υπόχωρο **S**. Βρείτε συγκεκριμένα διανύσματα x για τα οποία η διάσταση του **S** να είναι: (α) 0, (β) 1, (γ) 3, (δ) 4.

15. Τα $v + w$ και $v - w$ είναι συνδυασμοί των v και w. Γράψτε τα v και w σαν συνδυασμό των $v + w$ και $v - w$. Τα δύο ζεύγη διανυσμάτων ______ τον ίδιο χώρο. Πότε αποτελούν βάση του ίδιου χώρου;

16. Ελέγξτε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, λύνοντας την $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε επίσης αν παράγουν τον $\mathbf{R}^4$, προσπαθώντας να λύσετε το $c_1v_1 + \cdots + c_4v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

17. Υποθέστε ότι τα διανύσματα των οποίων την ανεξαρτησία θέλουμε να ελέγξουμε τοποθετούνται στις γραμμές αντί στις στήλες του A. Πώς μπορούμε να συμπεράνουμε μέσω της διαδικασίας απαλοιφής που ανάγει τον A στον U αν τα διανύσματα είναι ή όχι είναι ανεξάρτητα;

18. Για να ελέγξετε αν το b ανήκει στον υπόχωρο που παράγεται από τα $w_1, \ldots, w_n$, θεωρήστε ότι τα διανύσματα w είναι οι στήλες του A και προσπαθήστε να λύσετε το $Ax = b$. Ποιο είναι το αποτέλεσμα για

(α) $w_1 = (1,1,0)$, $w_2 = (2,2,1)$, $w_3 = (0,0,2)$, $b = (3,4,5)$;
(β) $w_1 = (1,2,0)$, $w_2 = (2,5,0)$, $w_3 = (0,0,2)$, $w_4 = (0,0,0)$ και οποιοδήποτε b;

Τα Προβλήματα 19–37 αφορούν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια βάση.

19. Αν τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, ο χώρος που παράγουν έχει διάσταση ______. Τα διανύσματα αυτά είναι ______ αυτού του χώρου. Αν τα διανύσματα είναι οι στήλες ενός m επί n πίνακα, τότε το m είναι ______ από το n.

20. Βρείτε μια βάση για καθέναν από τους εξής υποχώρους του $\mathbf{R}^4$:

(α) Όλα τα διανύσματα με ίσες συνιστώσες.
(β) Όλα τα διανύσματα με μηδενικό άθροισμα συνιστωσών.
(γ) Όλα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, 1, 1)$.
(δ) Τον χώρο στηλών (στον $\mathbf{R}^2$) και τον μηδενόχωρο (στον $\mathbf{R}^5$) του

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

21. Βρείτε τρεις διαφορετικές βάσεις του χώρου στηλών του παραπάνω U. Κατόπιν βρείτε δύο διαφορετικές βάσεις του χώρου γραμμών του U.

22. Υποθέστε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_6$ είναι έξι διανύσματα του $\mathbf{R}^4$.

(α) Τα διανύσματα αυτά (παράγουν) (δεν παράγουν) (ενδέχεται να μην παράγουν) τον $\mathbf{R}^4$.
(β) Τα διανύσματα αυτά (είναι) (δεν είναι) (ενδέχεται να είναι) γραμμικά ανεξάρτητα.
(γ) Οποιοδήποτε τέσσερα από αυτά τα διανύσματα (είναι) (δεν είναι) (ενδέχεται να είναι) μια βάση του $\mathbf{R}^4$.
(δ) Αν τα διανύσματα αυτά είναι οι στήλες του A, τότε το $Ax = b$ (έχει) (δεν έχει) (ενδέχεται να μην έχει) λύση.

23. Οι στήλες του A είναι n διανύσματα του $\mathbf{R}^m$. Αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ποια είναι η τάξη του A; Αν παράγουν τον $\mathbf{R}^m$, ποια είναι η τάξη; Αν είναι μια βάση του $\mathbf{R}^m$, τότε τι;

24. Βρείτε μια βάση του επιπέδου $x - 2y + 3z = 0$ του $\mathbf{R}^3$. Κατόπιν βρείτε μια βάση της τομής του συγκεκριμένου επιπέδου με το επίπεδο xy. Κατόπιν βρείτε μια βάση όλων των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο επίπεδο.

25. Υποθέστε ότι οι στήλες ενός 5 επί 5 πίνακα A είναι μια βάση του $\mathbf{R}^5$.

(α) Η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$ διότι ______.
(β) Αν το b ανήκει στον $\mathbf{R}^5$, τότε το $Ax = b$ έχει λύση διότι ______.

Συμπέρασμα: ο A είναι αντιστρέψιμος. Η τάξη του είναι 5.

26. Έστω $\mathbf{S}$ ένας πενταδιάστατος υπόχωρος του $\mathbf{R}^6$. Σωστό ή λάθος;

(α) Κάθε βάση του $\mathbf{S}$ μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει βάση του $\mathbf{R}^6$ με την προσθήκη ενός επιπλέον διανύσματος.
(β) Κάθε βάση του $\mathbf{R}^6$ μπορεί να συρρικνωθεί ώστε να γίνει βάση του $\mathbf{S}$ με την αφαίρεση ενός διανύσματος.

27. Ο U προκύπτει από τον A με αφαίρεση της γραμμής 1 από τη γραμμή 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε βάσεις των δύο χώρων στηλών. Βρείτε βάσεις των δύο χώρων γραμμών. Βρείτε βάσεις των δύο μηδενόχωρων.

28. Σωστό ή λάθος (αιτιολογήστε την απάντησή σας);

(α) Αν οι στήλες ενός πίνακα είναι εξαρτημένες, το ίδιο ισχύει για τις γραμμές.
(β) Ο χώρος στηλών ενός 2 επί 2 πίνακα είναι ίδιος με τον χώρο γραμμών του.
(γ) Ο χώρος στηλών ενός 2 επί 2 πίνακα έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του.
(δ) Οι στήλες ενός πίνακα είναι μια βάση του χώρου στηλών.

29. Για ποιους αριθμούς c και d έχουν τάξη 2 οι παρακάτω πίνακες;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}.$$

30. Εντοπίζοντας τους οδηγούς, βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εκφράστε κάθε στήλη που δεν ανήκει στη βάση σαν συνδυασμό των βασικών στηλών. Βρείτε επίσης έναν πίνακα A που να έχει την ίδια κλιμακωτή μορφή U αλλά διαφορετικό χώρο στηλών.

31. Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για τον εξής ισχυρισμό: Αν τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbf{R}^4$, και $\mathbf{W}$ είναι ένας υπόχωρος, τότε κάποιο υποσύνολο των v είναι μια βάση του $\mathbf{W}$.

32. Βρείτε τις διαστάσεις των εξής διανυσματικών χώρων:

(α) Του χώρου όλων των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^4$ με μηδενικό άθροισμα συνιστωσών.
(β) Του μηδενόχωρου του 4 επί 4 ταυτοτικού πίνακα.
(γ) Του χώρου όλων των 4 επί 4 πινάκων.

33. Υποθέστε ότι γνωρίζουμε πως ο $\mathbf{V}$ έχει διάσταση k. Αποδείξτε ότι

(α) οποιαδήποτε k ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{V}$ αποτελούν βάση.
(β) οποιαδήποτε k διανύσματα που παράγουν τον $\mathbf{V}$ αποτελούν βάση.

Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος των διανυσμάτων είναι σωστό, καθεμία από τις δύο ιδιότητες που ικανοποιεί μια βάση συνεπάγεται την άλλη.

34. Δείξτε ότι αν οι $\mathbf{V}$ και $\mathbf{W}$ είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$, τότε οι $\mathbf{V}$ και $\mathbf{W}$ πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα. *Υπόδειξη*: Ξεκινήστε με βάσεις των δύο υποχώρων, δηλαδή με έξι διανύσματα συνολικά.

35. *Σωστό ή λάθος*;

(α) Αν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε το $Ax = b$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε b.
(β) Ένας 5 επί 7 πίνακας δεν έχει ποτέ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

36. Αν ο A είναι ένας 64 επί 17 πίνακας τάξης 11, πόσα ανεξάρτητα διανύσματα ικανοποιούν το $Ax = 0$; Πόσα ανεξάρτητα διανύσματα ικανοποιούν το $A^{\mathrm{T}}y = 0$;

37. Βρείτε μια βάση καθενός από τους παρακάτω υποχώρους των 3 επί 3 πινάκων:

(α) Όλους τους διαγώνιους πίνακες.
(β) Όλους τους συμμετρικούς πίνακες ($A^{\mathrm{T}} = A$).
(γ) Όλους τους αντισυμμετρικούς πίνακες ($A^{\mathrm{T}} = -A$).

Τα Προβλήματα 38–42 αφορούν χώρους όπου τα «διανύσματα» είναι συναρτήσεις.

38. (α) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την $\frac{dy}{dx} = 0$.
(β) Επιλέξτε μια συγκεκριμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την $\frac{dy}{dx} = 3$.
(γ) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την $\frac{dy}{dx} = 3$.

39. Ο χώρος συνημιτόνων $\mathbf{F}_3$ περιέχει όλους τους συνδυασμούς

$$y(x) = A\cos x + B\cos 2x + C\cos 3x.$$

Βρείτε μια βάση του υποχώρου για τον οποίο $y(0) = 0$.

40. Βρείτε μια βάση του χώρου των συναρτήσεων που ικανοποιούν

(α) την $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$.
(β) την $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 0$.

41. Υποθέστε ότι οι $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ είναι τρεις διαφορετικές συναρτήσεις του x. Ο διανυσματικός χώρος που παράγουν θα μπορούσε να έχει διάσταση 1, 2 ή 3. Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων y_1, y_2, y_3 για κάθε περίπτωση.

42. Βρείτε μια βάση του χώρου των πολυωνύμων $p(x)$ βαθμού ≤ 3. Βρείτε μια βάση του υποχώρου με $p(1) = 0$.

43. Γράψτε τον 3 επί 3 ταυτοτικό πίνακα σαν συνδυασμό των υπόλοιπων πέντε πινάκων μετάθεσης! Στη συνέχεια δείξτε ότι οι πέντε αυτοί πίνακες είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. (Θεωρήστε ότι ένας συνδυασμός δίνει μηδέν και ελέγξτε τα στοιχεία ώστε να αποδείξετε ότι κάθε όρος είναι μηδέν.) Οι πέντε μεταθέσεις είναι μια βάση του υποχώρου των 3 επί 3 πινάκων με ίσα αθροίσματα γραμμών και στηλών.

44. *Επανάληψη*: Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι βάσεις του $\mathbf{R}^3$;

(α) $(1, 2, 0)$ και $(0, 1, -1)$.
(β) $(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)$.
(γ) $(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 0)$.
(δ) $(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 6)$.

45. *Επανάληψη*: Υποθέστε ότι ο A είναι 5 επί 4 και έχει τάξη 4. Δείξτε ότι το $Ax = b$ δεν έχει λύση όταν ο 5 επί 5 πίνακας $[A \;\; b]$ είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι το $Ax = b$ έχει λύση όταν ο $[A \;\; b]$ είναι ιδιόμορφος.

2.4 ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με ορισμούς, αλλά όχι με κατασκευαστικές διαδικασίες. Γνωρίζουμε τι είναι μια βάση, αλλά όχι πώς τη βρίσκουμε. Σε αυτή την ενότητα, ξεκινώντας από τη ρητή περιγραφή ενός υποχώρου, θα θέλαμε να υπολογίσουμε μια συγκεκριμένη βάση.

Οι υπόχωροι μπορούν να περιγραφούν με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορεί να μας δίνεται ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον χώρο. (*Παράδειγμα*: Οι στήλες παράγουν τον χώρο στηλών.) Δεύτερον, μπορεί να γνωρίζουμε ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα του χώρου. (*Παράδειγμα*: Ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλα τα διανύσματα που ικανοποιούν το $Ax = 0$.)

Η πρώτη περιγραφή ενδέχεται να περιλαμβάνει άχρηστα διανύσματα (εξαρτημένες στήλες). Η δεύτερη περιγραφή ενδέχεται να περιλαμβάνει επαναλαμβανόμενες συνθήκες (εξαρτημένες γραμμές). Δεν μπορούμε να γράψουμε κατευθείαν μια βάση· χρειαζόμαστε μια συστηματική διαδικασία.

Ο αναγνώστης μπορεί να μαντέψει ποια θα είναι η διαδικασία. Αφού εφαρμόσουμε την απαλοιφή στον A και πάρουμε έναν κλιμακωτό πίνακα U ή έναν ανηγμένο πίνακα R, θα βρούμε μια βάση για καθέναν από τους υποχώρους που σχετίζονται με τον A. Στη συνέχεια πρέπει να εξετάσουμε την ακραία περίπτωση της **πλήρους τάξης**:

Όταν η τάξη είναι η μεγαλύτερη δυνατή, $\boldsymbol{r = n}$ ή $\boldsymbol{r = m}$ ή $\boldsymbol{r = m = n}$, ο πίνακας έχει έναν **αριστερό αντίστροφο** *B ή* **δεξιό αντίστροφο** *C ή* **αμφίπλευρο** *A^{-1}.*

Για να οργανώσουμε την ανάλυσή μας, θα εξετάσουμε διαδοχικά καθέναν από τους τέσσερις υποχώρους. Τους δύο τους γνωρίζουμε ήδη, ενώ οι άλλοι δύο είναι καινούργιοι.

1. Ο ***χώρος στηλών*** του A συμβολίζεται με $\boldsymbol{C}(A)$. Η διάστασή του είναι η τάξη r.
2. Ο ***μηδενόχωρος*** του A συμβολίζεται με $\boldsymbol{N}(A)$. Η διάσταση του είναι $n - r$.
3. Ο ***χώρος γραμμών*** του A είναι ο *χώρος στηλών* του A^{T}. Είναι ο $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ και παράγεται από τις γραμμές του A. Η διάστασή του είναι επίσης r.
4. Ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** του A είναι ο *μηδενόχωρος του* A^{T}. Περιέχει όλα τα διανύσματα y για τα οποία $A^{\mathrm{T}}y = 0$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Η διάσταση του είναι ______.

Το χαρακτηριστικό των δύο τελευταίων υποχώρων είναι ότι *προκύπτουν από* τον A^{T}. Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, μπορούμε να βρούμε τους «φιλοξενούντες» χώρους που περιέχουν τους τέσσερις υποχώρους εξετάζοντας το πλήθος των συνιστωσών:

Ο μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A)$ και ο χώρος γραμμών $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^n$.
Ο αριστερός μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ και ο χώρος στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^m$.

Οι γραμμές έχουν n συνιστώσες και οι στήλες m. Για έναν απλό πίνακα σαν τον

$$A = U = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ο χώρος στηλών είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ο χώρος γραμμών είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Ανήκει στον $\mathbf{R}^3$. Ο μηδενόχωρος είναι ένα επίπεδο του $\mathbf{R}^3$, ενώ ο αριστερός μηδενόχωρος είναι μια ευθεία του $\mathbf{R}^2$:

$$\text{Ο } \boldsymbol{N}(A) \text{ περιέχει τα } \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \text{Ο } \boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}}) \text{ περιέχει το } \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Προσέξτε ότι όλα τα διανύσματα είναι διανύσματα στήλες. Ακόμα και οι γραμμές είναι ανεστραμμένες, και ο χώρος γραμμών του A είναι ο χώρος *στηλών* του A^{T}. Το πρόβλημά μας θα είναι να συνδέσουμε τους τέσσερις χώρους του U (μετά την απαλοιφή) με τους τέσσερις χώρους του A:

Βασικό παράδειγμα

$$\text{Ο } U = \begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&3\\0&0&0&0\end{bmatrix} \text{ προέκυψε από τον } A = \begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&7\\-1&-3&3&4\end{bmatrix}.$$

Για αλλαγή, θα εξετάσουμε τους τέσσερις υποχώρους με μια πιο ενδιαφέρουσα σειρά.

3. Ο χώρος γραμμών του A Ο χώρος γραμμών ενός κλιμακωτού πίνακα, όπως είναι ο U, είναι ξεκάθαρος. Περιέχει όλους τους συνδυασμούς των γραμμών, όπως κάθε χώρος γραμμών —αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση η τρίτη γραμμή δεν συνεισφέρει τίποτα. Οι δύο πρώτες γραμμές είναι μια βάση του χώρου γραμμών. Αντίστοιχος κανόνας ισχύει για κάθε κλιμακωτό πίνακα U ή R με r οδηγούς και r μη μηδενικές γραμμές: ***Οι μη μηδενικές γραμμές είναι μια βάση και ο χώρος γραμμών έχει διάσταση r***. Αυτό μας βοηθάει να βρούμε τον χώρο γραμμών του αρχικού πίνακα A.

2ΙΓ Ο χώρος γραμμών του A έχει την ίδια διάσταση r με τον χώρο γραμμών του U και έχει τις ίδιες βάσεις, διότι ***οι χώροι γραμμών των A και U (και R) είναι ίδιοι***.

Ο λόγος είναι ότι καμία στοιχειώδης πράξη δεν μεταβάλλει τον χώρο γραμμών. Οι γραμμές του U είναι συνδυασμοί των αρχικών γραμμών του A. Άρα ο χώρος γραμμών του U δεν περιέχει τίποτα καινούργιο. Ταυτόχρονα, αφού κάθε βήμα μπορεί να αντιστραφεί, δεν χάνεται τίποτα· οι γραμμές του A μπορούν να ανακατασκευαστούν από τον U. Οι A και U έχουν πράγματι διαφορετικές γραμμές, αλλά οι *συνδυασμοί* των γραμμών είναι οι ίδιοι: *ίδιος χώρος*!

Προσέξτε ότι η στρατηγική μας δεν ήταν να ξεκινήσουμε με τις m γραμμές του A, οι οποίες παράγουν τον χώρο γραμμών, και απορρίπτοντας τις $m-r$ από αυτές να καταλήξουμε σε μια βάση. Σύμφωνα με το 2ΙΒ, θα μπορούσαμε να το κάνουμε. Ίσως όμως να ήταν δύσκολο να αποφασίσουμε ποιες γραμμές να κρατήσουμε και ποιες να απορρίψουμε· ήταν ευκολότερο να πάρουμε τις μη μηδενικές γραμμές του U.

2. Ο μηδενόχωρος του A Η απαλοιφή απλοποιεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων χωρίς να αλλάζει τις λύσεις. Το σύστημα $Ax = 0$ ανάγεται στο $Ux = 0$, και η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη. ***Ο μηδενόχωρος του A είναι ο ίδιος με τον μηδενόχωρο των U και R***. Μόνο r από τις εξισώσεις του $Ax = 0$ είναι ανεξάρτητες. Επιλέγοντας τις $n-r$ «ειδικές λύσεις» του $Ax = 0$, διαθέτουμε μια ορισμένη βάση του μηδενόχωρου:

2ΙΔ Ο μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A)$ έχει διάσταση $n-r$. Οι «ειδικές λύσεις» είναι μια βάση —δίνουμε διαδοχικά σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 1, ενώ στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Οι οδηγικές μεταβλητές προκύπτουν από το $Ax=0$, ή το $Ux=0$, ή το $Rx=0$ με ανάδρομη αντικατάσταση.

Αυτός ακριβώς είναι ο τρόπος με τον οποίο λύσαμε το $Ux=0$. Στο παραπάνω βασικό παράδειγμα, οι οδηγοί βρίσκονται στις στήλες 1 και 3. Άρα οι ελεύθερες μεταβλητές είναι το δεύτερο και τέταρτο v και y. Η βάση του μηδενόχωρου είναι

$$\textbf{Ειδικές λύσεις}\qquad \begin{matrix} v=1 \\ y=0 \end{matrix} \quad x_1=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \begin{matrix} v=0 \\ y=1 \end{matrix} \quad x_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Κάθε συνδυασμός $c_1x_1+c_2x_2$ έχει το c_1 ως συνιστώσα v και το c_2 ως συνιστώσα y. Ο μόνος τρόπος να έχουμε $c_1x_1+c_2x_2=0$ είναι να έχουμε $c_1=c_2=0$, άρα τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. Τα διανύσματα αυτά παράγουν και τον μηδενόχωρο· η πλήρης λύση είναι η vx_1+yx_2. Επομένως, τα $n-r=4-2$ διανύσματα είναι μια βάση.

Ο μηδενόχωρος καλείται επίσης *πυρήνας* του A, ενώ η διάστασή του $n-r$ είναι η *μηδενικότητα*.

1. Ο χώρος στηλών του A Ο χώρος στηλών καλείται μερικές φορές **πεδίο τιμών**. Αυτό συμφωνεί με τη συνήθη σημασία του πεδίου τιμών, ως του συνόλου όλων των δυνατών τιμών $f(x)$· το x ανήκει στο πεδίο ορισμού και το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο τιμών. Στην περίπτωσή μας, η συνάρτηση είναι η $f(x)=Ax$. Το πεδίο ορισμού της αποτελείται από όλα τα x του $\mathbf{R}^n$. Το πεδίο τιμών της είναι όλα τα δυνατά διανύσματα Ax, τα οποία είναι ο χώρος στηλών. (Σε προηγούμενη έκδοση αυτού του βιβλίου το καλούσαμε $R(A)$.)

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε βάσεις για τους χώρους στηλών των U και A. ***Οι χώροι αυτοί είναι διαφορετικοί*** (αρκεί να κοιτάξετε τους πίνακες!) αλλά οι διαστάσεις τους είναι ίδιες.

Η πρώτη και η τρίτη στήλη του U είναι μια βάση του χώρου στηλών του. Είναι οι ***στήλες με οδηγούς***. Όλες οι άλλες στήλες είναι συνδυασμοί αυτών των δύο. Το ίδιο ισχύει για τον αρχικό A —μολονότι οι στήλες του είναι διαφορετικές. ***Οι στήλες οδηγοί του A είναι μια βάση του χώρου στηλών του***. Η δεύτερη στήλη ισούται με τρία επί την πρώτη, ακριβώς όπως στον U. Η τέταρτη στήλη ισούται με (στήλη 3) $-$ (στήλη 1). Οι εξαρτήσεις αυτές προκύπτουν και από το γεγονός ότι οι μηδενόχωροι είναι ίδιοι.

Ο λόγος είναι ο εξής: $Ax=0$ *αν και μόνο αν* $Ux=0$. Τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα και έχουν τις ίδιες λύσεις. Η τέταρτη στήλη του U ήταν επίσης (στήλη 3) $-$ (στήλη 1). Σε κάθε γραμμική εξάρτηση $Ax=0$ μεταξύ των στηλών του A αντιστοιχεί μια εξάρτηση $Ux=0$ μεταξύ των στηλών του U, με ακριβώς τους ίδιους συντελεστές. *Αν κάποιες στήλες του A είναι ανεξάρτητες, το ίδιο ισχύει για τις αντίστοιχες στήλες του U και αντιστρόφως.*

Για να βρούμε μια βάση του χώρου στηλών $\boldsymbol{C}(A)$, χρησιμοποιούμε ό,τι έχουμε ήδη κάνει για τον U. Οι r στήλες που περιέχουν τους οδηγούς είναι μια βάση του χώρου στηλών του U. Επιλέγουμε τις ίδιες r στήλες του A:

2IE Η διάσταση του χώρου στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ ισούται με την τάξη r, η οποία ισούται επίσης με τη διάσταση του χώρου γραμμών: ***Το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων γραμμών***. Μια βάση του $\boldsymbol{C}(A)$ σχηματίζεται από τις r στήλες του A που αντιστοιχούν, στον U, στις στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών έχουν την ίδια διάσταση r! Αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας. Πολλές φορές γράφεται σύντομα ως «***τάξη γραμμών = τάξη στηλών***». Εκφράζει ένα αποτέλεσμα το οποίο, για έναν τυχαίο 10 επί 12 πίνακα, δεν είναι καθόλου προφανές. Λέει επίσης κάτι για τους τετραγωνικούς πίνακες: *Αν οι γραμμές ενός τετραγωνικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες και οι στήλες* (και αντιστρόφως). Και πάλι, αυτό δεν είναι προφανές (τουλάχιστον, για τον συγγραφέα).

Για να δούμε για ακόμη μία φορά ότι ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών του U έχουν αμφότεροι διάσταση r, θα θεωρήσουμε μια τυπική περίπτωση με τάξη $r = 3$. Ο κλιμακωτός πίνακας U έχει σίγουρα τρεις ανεξάρτητες γραμμές:

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο U έχει και αυτός τρεις ανεξάρτητες στήλες, και καμία επιπλέον. Οι στήλες έχουν μόνο τρεις μη μηδενικές συνιστώσες. Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι οι στήλες οδηγοί —η πρώτη, η τέταρτη και η έκτη— είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε πρέπει να αποτελούν μια βάση (του χώρου στηλών του U, όχι του A!). Υποθέτουμε ότι κάποιος συνδυασμός αυτών των στηλών οδηγών παράγει το μηδέν:

$$c_1 \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} * \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Εργαζόμενοι ανάδρομα με τον συνήθη τρόπο, βρίσκουμε ότι το c_3 πρέπει να είναι μηδέν διότι ο οδηγός d_3 είναι διάφορος του 0, κατόπιν ότι το c_2 πρέπει να είναι μηδέν διότι $d_2 \neq 0$, και τέλος ότι $c_1 = 0$. Άρα αποδείξαμε την ανεξαρτησία. Αφού $Ax = 0$ αν και μόνο αν $Ux = 0$, η πρώτη, η τέταρτη και η έκτη στήλη του A —όποιος και να είναι ο αρχικός πίνακας A, τον οποίο δεν γνωρίζουμε καν στο συγκεκριμένο παράδειγμα— είναι μια βάση του $\boldsymbol{C}(A)$.

Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών φάνηκαν και οι δύο ξεκάθαρα μετά την εφαρμογή της απαλοιφής στον A. Θα δούμε τώρα τον τέταρτο θεμελιώδη υπόχωρο, με τον οποίο δεν έχουμε ασχοληθεί μέχρι στιγμής. Αφού οι τρεις πρώτοι χώροι ήταν οι $\boldsymbol{C}(A)$, $\boldsymbol{N}(A)$ και $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$, ο τέταρτος χώρος πρέπει να είναι ο $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Είναι ο μηδενόχωρος του αναστρόφου, ή ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** του A. $A^{\mathrm{T}}y = 0$ σημαίνει ότι $y^{\mathrm{T}}A = 0$, και το διάνυσμα εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά του A.

4. Ο αριστερός μηδενόχωρος του A (= ο μηδενόχωρος του A^{T}) Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, τότε ο A^{T} είναι n επί m. Ο μηδενόχωρός του είναι ένας υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$· το διάνυσμα y έχει m συνιστώσες. Αν γράψουμε το σύστημα στη μορφή $y^{\mathrm{T}}A = 0$, οι συνιστώσες του y πολλαπλασιάζουν τις *γραμμές* του A και παράγουν τη μηδενική γραμμή:

$$y^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \end{bmatrix}.$$

Η διάσταση αυτού του μηδενόχωρου $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ βρίσκεται εύκολα. Για *κάθε* πίνακα, ***το πλήθος των οδηγικών μεταβλητών συν το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών πρέπει να ισούται με το συνολικό πλήθος των στηλών***. Για τον A, είχαμε $r + (n - r) = n$. Με άλλα λόγια, τάξη συν μηδενικότητα ίσον n:

$$\textbf{διάσταση του } \boldsymbol{C}(A) + \textbf{διάσταση του } \boldsymbol{N}(A) = \textbf{πλήθος στηλών.}$$

Αυτή η σχέση ισχύει και για τον A^{T}, ο οποίος έχει m στήλες. Ο A^{T} είναι ένας εξίσου καλός πίνακας με τον A. Αλλά η διάσταση του χώρου στηλών του είναι επίσης r, άρα

$$r + \text{διάσταση } (\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})) = m. \tag{1}$$

2ΙΣΤ Ο αριστερός μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ έχει διάσταση $m - r$.

Οι $m - r$ λύσεις του $y^{\mathrm{T}}A = 0$ κρύβονται κάπου στην απαλοιφή. Οι γραμμές του A συνδυάζονται και παράγουν τις $m-r$ *μηδενικές γραμμές* του U. Ξεκινάμε από την $PA = LU$, ή την $L^{-1}PA = U$. Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του αντιστρέψιμου πίνακα $L^{-1}P$ πρέπει να είναι μια βάση αποτελούμενη από διανύσματα y του αριστερού μηδενόχωρου —επειδή πολλαπλασιάζουν τον A και δίνουν τις μηδενικές γραμμές του U.

Στο 3 επί 4 παράδειγμά μας, η μηδενική γραμμή ήταν η γραμμή 3 − 2 (γραμμή 2) + 5 (γραμμή 1). Άρα οι συνιστώσες του y είναι $5, -2, 1$. Αυτός ο συνδυασμός είναι ίδιος με τον $b_3 - 2b_2 + 5b_1$ στο δεξί μέλος, που οδηγεί στην τελική εξίσωση $0 = 0$. Αυτό το διάνυσμα y είναι μια βάση του αριστερού μηδενόχωρου, ο οποίος έχει διάσταση $m - r = 3 - 2 = 1$. Είναι η τελευταία γραμμή του $L^{-1}P$ και παράγει τη μηδενική γραμμή του U —και συχνά μπορούμε να τη δούμε χωρίς να υπολογίσουμε τον L^{-1}. Όταν δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι άλλο, μπορούμε πάντα να λύσουμε το $A^{\mathrm{T}}y = 0$.

Ομολογουμένως, μέχρι στιγμής δεν έχουμε αναφέρει σε αυτό το βιβλίο κάποιον λόγο για τον οποίο πρέπει να μας ενδιαφέρει ο $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Θα ήταν σωστό, αν και όχι πειστικό, να γράφαμε με πλάγια στοιχεία ότι *ο αριστερός μηδενόχωρος είναι και αυτός σημαντικός*. Στην επόμενη ενότητα θα έχουμε κάτι περισσότερο να πούμε, βρίσκοντας μια φυσική ερμηνεία για το y μέσω του κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff.

Γνωρίζουμε πλέον τις διαστάσεις των τεσσάρων χώρων. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα και να τα χαρακτηρίσουμε με ένα όνομα.

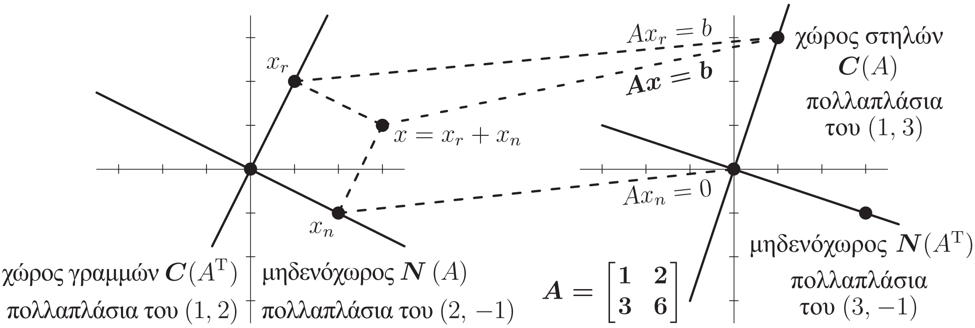
Θεμελιώδες θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας, Μέρος I

1. $\boldsymbol{C}(A)$ = χώρος στηλών του A, διάσταση r.
2. $\boldsymbol{N}(A)$ = μηδενόχωρος του A, διάσταση $n - r$.
3. $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ = χώρος γραμμών του A, διάσταση r.
4. $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ = αριστερός μηδενόχωρος του A, διάσταση $m - r$.

Παράδειγμα 1 Για τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, έχουμε $m = n = 2$ και τάξη $r = 1$.

1. Ο ***χώρος στηλών*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Η δεύτερη στήλη έχει την ίδια κατεύθυνση και δεν συνεισφέρει τίποτα καινούργιο.
2. Ο ***μηδενόχωρος*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Αυτό το διάνυσμα ικανοποιεί το $Ax = 0$.
3. Ο ***χώρος γραμμών*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Το γράφουμε σαν διάνυσμα στήλη, αφού τυπικά ανήκει στον χώρο στηλών του A^{T}.
4. Ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $y = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Οι γραμμές του A με συντελεστές -3 και 1 έχουν άθροισμα μηδέν, άρα $A^{\mathrm{T}}y = 0$.

Σε αυτό το παράδειγμα *και οι τέσσερις υπόχωροι είναι ευθείες*. Αυτό είναι σύμπτωση και οφείλεται στο γεγονός ότι $r = 1$ και $n - r = 1$, $m - r = 1$. Στο Σχήμα 2.5 φαίνεται ότι υπάρχουν δύο ζεύγη κάθετων μεταξύ τους ευθειών. Αυτό δεν είναι σύμπτωση!



Σχήμα 2.5 Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι (ευθείες) του ιδιόμορφου πίνακα A.

Αν αλλάξουμε το τελευταίο στοιχείο του A από 6 σε 7, αλλάζουν όλες οι διαστάσεις. Ο χώρος στηλών και ο χώρος γραμμών έχουν διάσταση $r = 2$. Ο μηδενόχωρος και ο αριστερός μηδενόχωρος περιέχουν μόνο τα διανύσματα $x = 0$ και $y = 0$. *Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.*

Ύπαρξη αντιστρόφων

Γνωρίζουμε ότι αν ο A έχει αριστερό αντίστροφο ($BA = I$) και δεξιό αντίστροφο ($AC = I$), τότε οι δύο αντίστροφοι είναι ίσοι: $B = B(AC) = (BA)C = C$. Αν γνωρίζουμε την τάξη ενός πίνακα, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε αν έχει πράγματι αυτούς τους αντιστρόφους. Σε γενικές γραμμές, ***αντίστροφος υπάρχει μόνο όταν η τάξη είναι η μεγαλύτερη δυνατή***.

Η τάξη ικανοποιεί πάντα την $r \leq m$ και την $r \leq n$. Ένας m επί n πίνακας δεν μπορεί να έχει περισσότερες από m ανεξάρτητες γραμμές ή n ανεξάρτητες στήλες. Δεν υπάρχει χώρος για περισσότερους από m οδηγούς ή για περισσότερους από n. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι όταν $r = m$, υπάρχει δεξιός αντίστροφος και το $Ax = b$ έχει πάντα λύση. Όταν $r = n$, υπάρχει αριστερός αντίστροφος και η λύση (*αν υπάρχει*) είναι μοναδική.

Μόνο για έναν τετραγωνικό πίνακα μπορεί να ισχύει και $r = m$ και $r = n$, άρα μόνο για έναν τετραγωνικό πίνακα μπορεί να ισχύει και η ύπαρξη και η μοναδικότητα. Μόνο ένας τετραγωνικός πίνακας έχει αμφίπλευρο αντίστροφο.

2ΙΖ **ΥΠΑΡΞΗ: Πλήρης τάξη γραμμών $\boldsymbol{r = m}$.** Το $Ax = b$ έχει ***τουλάχιστον*** μία λύση x για κάθε b αν και μόνο αν οι στήλες παράγουν τον $\mathbf{R}^m$. Σε αυτή την περίπτωση, ο A έχει έναν **δεξιό αντίστροφο** C τέτοιον ώστε $AC = I_m$ (m επί m). Αυτό είναι δυνατό μόνο αν $m \leq n$.

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ: Πλήρης τάξη στηλών $\boldsymbol{r = n}$. Το $Ax = b$ έχει ***το πολύ*** μία λύση x για κάθε b αν και μόνο αν οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση, ο A έχει έναν n επί m **αριστερό αντίστροφο** B τέτοιον ώστε $BA = I_n$. Αυτό είναι δυνατό μόνο αν $m \geq n$.

Για την περίπτωση της ύπαρξης, μία δυνατή λύση είναι η $x = Cb$, αφού τότε $Ax = ACb = b$. Αν υπάρχουν και άλλοι δεξιοί αντίστροφοι, θα υπάρχουν όμως και άλλες λύσεις. Το πλήθος των λύσεων όταν οι στήλες παράγουν τον $\mathbf{R}^m$ είναι 1 ή ∞.

Για την περίπτωση της μοναδικότητας, αν το $Ax = b$ έχει λύση, αυτή πρέπει να είναι η $x = BAx = Bb$. Ενδέχεται όμως να μην υπάρχει καμία λύση. Το πλήθος των λύσεων είναι 0 ή 1.

Ο καλύτερος αριστερός και δεξιός αντίστροφος, αν υπάρχουν, δίνονται από τους εξής απλούς τύπους:

$$\textbf{Μονόπλευροι αντίστροφοι} \qquad B = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \quad \text{και} \quad C = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Γνωρίζουμε σίγουρα ότι $BA = I$ και $AC = I$. Αυτό που δεν είναι τόσο σίγουρο είναι αν οι $A^{\mathrm{T}}A$ και AA^{T} είναι αντιστρέψιμοι. Στο Κεφάλαιο 3 θα δείξουμε ότι ο $A^{\mathrm{T}}A$ δεν έχει αντίστροφο αν η τάξη είναι n, και ότι ο AA^{T} έχει αντίστροφο όταν η τάξη είναι m. Επομένως, οι τύποι έχουν νόημα όταν η τάξη είναι η μεγαλύτερη δυνατή, και δίνουν τους μονόπλευρους αντιστρόφους.

Παράδειγμα 2 Έστω ένας απλός 2 επί 3 πίνακας τάξης 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφού $r = m = 2$, το θεώρημα διασφαλίζει ότι υπάρχει ένας δεξιός αντίστροφος C:

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν πολλοί δεξιοί αντίστροφοι, διότι η τελευταία γραμμή του C είναι εντελώς αυθαίρετη. Αυτή είναι μια περίπτωση ύπαρξης αλλά όχι μοναδικότητας. Ο πίνακας A δεν έχει αριστερό αντίστροφο, διότι η τελευταία στήλη του BA είναι σίγουρα μηδέν. Στον συγκεκριμένο δεξιό αντίστροφο $C = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$, τα c_{31} και c_{32} έχουν επιλεγεί να είναι μηδέν:

$$\textbf{Καλύτερος δεξιός αντίστροφος} \qquad A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Αυτός είναι ο *ψευδοαντίστροφος* —ένας τρόπος επιλογής του καλύτερου C στην Ενότητα 6.3. Ο ανάστροφος του A είναι ένα παράδειγμα ύπαρξης άπειρων το πλήθος *αριστερών* αντιστρόφων:

$$BA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & b_{13} \\ 0 & \frac{1}{5} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, εντελώς αυθαίρετη είναι η τελευταία στήλη του B. Ο καλύτερος αριστερός αντίστροφος (επίσης ο ψευδοαντίστροφος) έχει $b_{13} = b_{23} = 0$. Αυτή είναι μια «περίπτωση μοναδικότητας», όταν η τάξη είναι $r = n$. Δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, αφού $n - r = 0$. Αν υπάρχει λύση, θα είναι μόνο μία. Μπορούμε να δούμε πότε έχει μία ή καμία λύση το συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\text{Το} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{έχει λύση αν και μόνο αν} \quad b_3 = 0.$$

Για έναν παραλληλόγραμμο πίνακα δεν μπορούμε να έχουμε και ύπαρξη και μοναδικότητα. Αν το m είναι διαφορετικό από το n, δεν μπορούμε να έχουμε $r = m$ και $r = n$.

Για τους τετραγωνικούς πίνακες ισχύει το αντίθετο. Αν $m = n$, δεν μπορεί να ισχύει η μία ιδιότητα *χωρίς* να ισχύει η άλλη. Ένας τετραγωνικός πίνακας έχει αριστερό αντίστροφο αν και μόνο αν έχει δεξιό αντίστροφο. Υπάρχει μόνο ένας αντίστροφος, ο $B = C = A^{-1}$. *Όταν ο πίνακας είναι τετραγωνικός, η ύπαρξη συνεπάγεται τη μοναδικότητα και η μοναδικότητα συνεπάγεται την ύπαρξη.* Η συνθήκη αντιστρεψιμότητας είναι η **πλήρης τάξη**: $r = m = n$. Καθεμία από αυτές τις συνθήκες είναι ένα αναγκαίο και ικανό κριτήριο:

1. Οι στήλες παράγουν τον $\mathbf{R}^n$, άρα το $Ax = b$ έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε b.
2. Οι στήλες είναι ανεξάρτητες, άρα το $Ax = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Ο κατάλογος αυτός μπορεί να γίνει πολύ μακρύτερος, ιδιαίτερα αν λάβουμε υπόψη και την ύλη των επόμενων κεφαλαίων. Κάθε συνθήκη είναι ισοδύναμη με όλες τις υπόλοιπες και διασφαλίζει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

3. Οι γραμμές του A παράγουν τον $\mathbf{R}^n$.
4. Οι γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
5. Η απαλοιφή μπορεί να ολοκληρωθεί: $PA = LDU$, με n οδηγούς συνολικά.
6. Η ορίζουσα του A δεν είναι μηδέν.
7. Το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του A.
8. Ο $A^{\mathrm{T}}A$ είναι θετικά ορισμένος.

Ακολουθεί μια τυπική εφαρμογή στα πολυώνυμα $P(t)$ βαθμού $n-1$. Το μόνο τέτοιο πολυώνυμο που μηδενίζεται στα $t_1, \ldots, t_n$ είναι το $P(t) \equiv 0$. Κανένα άλλο πολυώνυμο βαθμού $n-1$ δεν μπορεί να έχει n ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μοναδικότητα, η οποία συνεπάγεται την ύπαρξη: Δεδομένων οποιωνδήποτε τιμών $b_1, \ldots, b_n$, *υπάρχει* ένα πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού $n-1$ για αυτές τις τιμές: $P(t_i) = b_i$. Το σημαντικό είναι ότι έχουμε να κάνουμε με τετραγωνικό πίνακα· ο αριθμός n των συντελεστών του $P(t) = x_1 + x_2t + \cdots + x_nt^{n-1}$

συμφωνεί με το πλήθος των εξισώσεων:

$$\textbf{Παρεβολή} \quad \boldsymbol{P(t_i) = b_i} \qquad \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο *πίνακας Vandermonde* είναι n επί n και είναι πλήρους τάξης. Το $Ax = b$ έχει πάντα λύση —ένα πολυώνυμο μπορεί να εξαναγκαστεί να διέρχεται από οποιαδήποτε b_i σε διαφορετικά σημεία t_i. Αργότερα, θα βρούμε την ορίζουσα του A, η οποία δεν είναι μηδέν.

Πίνακες τάξης 1

Απομένει η ευκολότερη περίπτωση, όπου η τάξη είναι η *μικρότερη* δυνατή (με την εξαίρεση του μηδενικού πίνακα τάξης 0). Ένα βασικό ζητούμενο στα μαθηματικά είναι, δεδομένου κάποιου σύνθετου αντικειμένου, η εύρεση ενός τρόπου διάσπασής του σε απλά κομμάτια. Στη γραμμική άλγεβρα, τα απλά κομμάτια είναι οι πίνακες ***τάξης* 1**:

$$\textbf{Τάξη 1} \qquad \text{Ο } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{έχει } r = 1.$$

Κάθε γραμμή είναι πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής, άρα ο χώρος γραμμών είναι μονοδιάστατος. Μάλιστα, μπορούμε να γράψουμε ολόκληρο τον πίνακα σαν *το γινόμενο ενός διανύσματος στήλης με ένα διάνυσμα γραμμή*:

$$\boldsymbol{A} = \textbf{(στήλη)(γραμμή)} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το γινόμενο ενός 4 επί 1 πίνακα με έναν 1 επί 3 πίνακα είναι ένας 4 επί 3 πίνακας. *Η τάξη του γινομένου είναι 1*. Επιπλέον, οι στήλες είναι όλες πολλαπλάσια του ίδιου διανύσματος στήλης· ο χώρος στηλών έχει την ίδια διάσταση $r = 1$ και είναι μια ευθεία.

Κάθε πίνακας τάξης* 1 *έχει την απλή μορφή $\boldsymbol{A = uv^{\mathrm{T}}}$ ***= στήλη επί γραμμή***.

Οι γραμμές είναι όλες πολλαπλάσια του ίδιου διανύσματος v^{T} και οι στήλες είναι όλες πολλαπλάσια του u. Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών είναι ευθείες —η ευκολότερη περίπτωση.

Προβλήματα 2.4

1. Σωστό ή λάθος: Αν $m = n$, ο χώρος γραμμών του A ισούται με τον χώρο στηλών. Αν $m < n$, ο μηδενόχωρος έχει μεγαλύτερη διάσταση από ______.

2. Βρείτε τη διάσταση και κατασκευάστε μια βάση των τεσσάρων υποχώρων που σχετίζονται με καθέναν από τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Περιγράψτε τους τέσσερις υποχώρους του τριδιάστατου χώρου που σχετίζονται με τον

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Αν το γινόμενο AB είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλαδή $AB = 0$, δείξτε ότι ο χώρος στηλών του B περιέχεται στον μηδενόχωρο του A. (Και ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στον αριστερό μηδενόχωρο του B, αφού κάθε γραμμή του A πολλαπλασιάζει τον B και δίνει μια μηδενική γραμμή.)

6. Υποθέστε ότι ο A είναι ένας m επί n πίνακας τάξης r. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν αυτοί οι αριθμοί ώστε

(α) ο A να έχει αμφίπλευρο αντίστροφο: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
(β) το $Ax = b$ να έχει *άπειρες* λύσεις για *κάθε* b;

7. Γιατί δεν υπάρχει πίνακας του οποίου ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος να περιέχουν αμφότεροι το $(1, 1, 1)$;

8. Έστω ότι η μοναδική λύση του $Ax = 0$ (m εξισώσεις με n αγνώστους) είναι η $x = 0$. Ποια είναι η τάξη και γιατί; Οι στήλες του A είναι γραμμικά ______.

9. Βρείτε έναν 1 επί 3 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ για τα οποία $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. Βρείτε έναν 3 επί 3 πίνακα με τον ίδιο μηδενόχωρο.

10. Αν το $Ax = b$ έχει πάντα τουλάχιστον μία λύση, δείξτε ότι η μοναδική λύση του $A^{\mathrm{T}}y = 0$ είναι η $y = 0$. *Υπόδειξη*: Ποια είναι η τάξη;

11. Αν το $Ax = 0$ έχει μη μηδενική λύση, δείξτε ότι το $A^{\mathrm{T}}y = f$ δεν έχει λύση για κάποια δεξιά μέλη f. Κατασκευάστε ένα παράδειγμα A και f.

12. Βρείτε την τάξη του A και γράψτε τον πίνακα ως $A = uv^{\mathrm{T}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

13. Αν δίνονται τα a, b, c με $a \neq 0$, επιλέξτε το d έτσι ώστε ο

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = uv^{\mathrm{T}}$$

να έχει τάξη 1. Ποιοι είναι οι οδηγοί;

14. Βρείτε έναν αριστερό αντίστροφο και/ή έναν δεξιό αντίστροφο (αν υπάρχουν) των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

15. Αν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες (ο A είναι m επί n), τότε η τάξη είναι ______, ο μηδενόχωρος είναι ______, ο χώρος γραμμών είναι ______ και υπάρχει ______ αντίστροφος.

16. (*Ένα παράδοξο*) Αν ο A έχει έναν δεξιό αντίστροφο B, τότε από την $AB = I$ παίρνουμε $A^{\mathrm{T}}AB = A^{\mathrm{T}}$, ή $B = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Αυτός ο πίνακας ικανοποιεί όμως την $BA = I$· είναι ένας *αριστερός* αντίστροφος. Ποιο βήμα είναι εσφαλμένο;

17. Βρείτε έναν πίνακα A που να έχει τον $\mathbf{V}$ ως χώρο γραμμών του και έναν πίνακα B που να έχει τον $\mathbf{V}$ ως μηδενόχωρό του, αν $\mathbf{V}$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

18. Βρείτε μια βάση καθενός από τους τέσσερις υποχώρους του

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Αν ο A έχει τους ίδιους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους με τον B, ισχύει η $A = cB$;

20. (α) Αν ένας 7 επί 9 πίνακας έχει τάξη 5, ποια είναι η διάσταση των τεσσάρων υποχώρων; Ποιο είναι το άθροισμα και των τεσσάρων διαστάσεων;
(β) Αν ένας 3 επί 4 πίνακας έχει τάξη 3, ποιος είναι ο χώρος στηλών και ο αριστερός μηδενόχωρός του;

21. Κατασκευάστε έναν πίνακα που να ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα ή εξηγήστε γιατί δεν μπορείτε να τον κατασκευάσετε.
(α) Ο χώρος στηλών περιέχει τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ο χώρος γραμμών περιέχει τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.
(β) Ο χώρος στηλών έχει βάση το $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ο μηδενόχωρος έχει βάση το $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(γ) Διάσταση του μηδενόχωρου $= 1 +$ διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου.
(δ) Ο αριστερός μηδενόχωρος περιέχει το $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, ο χώρος γραμμών περιέχει το $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(ε) Χώρος γραμμών $=$ χώρος στηλών, μηδενόχωρος $\neq$ αριστερός μηδενόχωρος.

22. Χωρίς να εφαρμόσετε απαλοιφή, βρείτε τις διαστάσεις και τις βάσεις των τεσσάρων υποχώρων των

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

23. Υποθέστε ότι ο 3 επί 3 πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Βρείτε βάσεις των τεσσάρων υποχώρων του A, καθώς και του 3 επί 6 πίνακα $B = [A \quad A]$.

24. Ποιες είναι οι διαστάσεις των τεσσάρων υποχώρων των A, B και C, αν I είναι ο 3 επί 3 ταυτοτικός πίνακας και 0 είναι ο 3 επί 2 μηδενικός πίνακας;

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0^{\mathrm{T}} & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

25. Ποιοι υπόχωροι των παρακάτω πινάκων διαφορετικού μεγέθους είναι ίδιοι;

(α) $[A]$ και $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$. (β) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$.

Αποδείξτε ότι και οι τρεις πίνακες έχουν την ίδια τάξη r.

26. Αν τα στοιχεία ενός 3 επί 3 πίνακα επιλεγούν τυχαία μεταξύ 0 και 1, ποιες είναι οι πιθανότερες διαστάσεις των τεσσάρων υποχώρων; Τι θα συμβεί αν ο πίνακας είναι 3 επί 5;

27. (Σημαντικό) Ο A είναι ένας m επί n πίνακας τάξης r. Υποθέστε ότι υπάρχουν δεξιά μέλη b για τα οποία τα $Ax = b$ *δεν έχει λύση*.

(α) Ποιες ανισότητες ($<$ ή $\leq$) πρέπει να ικανοποιούν τα m, n και r;
(β) Πώς ξέρουμε ότι το $A^{\mathrm{T}}y = 0$ έχει μη μηδενική λύση;

28. Κατασκευάστε έναν πίνακα για τον οποίο τα $(1, 0, 1)$ και $(1, 2, 0)$ να είναι βάση του χώρου γραμμών και του χώρου στηλών του. Γιατί δεν μπορούν τα διανύσματα αυτά να είναι βάση του χώρου γραμμών και του μηδενόχωρου;

29. Χωρίς να υπολογίστε τον A, βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

30. Αν αντιμεταθέσουμε τις δύο πρώτες γραμμές ενός πίνακα A, ποιοι από τους τέσσερις υποχώρους παραμένουν ίδιοι; Αν το $y = (1, 2, 3, 4)$ ανήκει στον αριστερό μηδενόχωρο του A, γράψτε ένα διάνυσμα του αριστερού μηδενόχωρου του νέου πίνακα.

31. Εξηγήστε γιατί το $v = (1, 0, -1)$ δεν μπορεί να είναι γραμμή του A και να ανήκει και στον μηδενόχωρο.

32. Περιγράψτε τους τέσσερις υποχώρους του $\mathbf{R}^3$ που σχετίζονται με τους

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

33. (Αριστερός μηδενόχωρος) Προσθέστε την επιπλέον στήλη b και αναγάγετε τον A σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Η μηδενική γραμμή προέκυψε από κάποιο συνδυασμό των γραμμών του A. Ποιος είναι αυτός ο συνδυασμός; (Κοιτάξτε το $b_3 - 2b_2 + b_1$ στο δεξί μέλος.) Ποια διανύσματα ανήκουν στον μηδενόχωρο του A^{T} και ποια στον μηδενόχωρο του A;

34. Ακολουθώντας τη μέθοδο του Προβλήματος 33, αναγάγετε τον A σε κλιμακωτή μορφή και κοιτάξτε τις μηδενικές γραμμές. Η στήλη b αποκαλύπτει ποιους συνδυασμούς γραμμών έχετε πάρει:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 4 & b_2 \\ 4 & 6 & b_3 \end{bmatrix}$. (β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & b_3 \\ 2 & 5 & b_4 \end{bmatrix}$.

Από τη στήλη b μετά την απαλοιφή, βρείτε κατευθείαν $m - r$ διανύσματα βάσης του αριστερού μηδενόχωρου του A (συνδυασμούς των γραμμών που δίνουν μηδέν).

35. Έστω ότι ο A είναι το άθροισμα δύο πινάκων τάξης 1: $A = uv^{\mathrm{T}} + wz^{\mathrm{T}}$.

(α) Ποια διανύσματα παράγουν τον χώρο στηλών του A;
(β) Ποια διανύσματα παράγουν τον χώρο γραμμών του A;
(γ) Η τάξη είναι μικρότερη από 2 αν ______ ή αν ______.
(δ) Υπολογίστε τον A και την τάξη του αν $u = z = (1, 0, 0)$ και $v = w = (0, 0, 1)$.

36. Χωρίς να πολλαπλασιάσετε τους πίνακες, βρείτε βάσεις των χώρων γραμμών και στηλών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Πώς προκύπτει από αυτά τα σχήματα ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος;

37. Σωστό ή λάθος (αιτιολογήστε ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα);

(α) Οι A και A^{T} έχουν το ίδιο πλήθος οδηγών.
(β) Οι A και A^{T} έχουν τον ίδιο αριστερό μηδενόχωρο.
(γ) Αν ο χώρος γραμμών ισούται με τον χώρο στηλών, τότε $A^{\mathrm{T}} = A$.
(δ) Αν $A^{\mathrm{T}} = -A$, τότε ο χώρος γραμμών του A ισούται με τον χώρο στηλών.

38. Αν $AB = 0$, οι στήλες του B ανήκουν στον μηδενόχωρο του A. Αν τα διανύσματα αυτά ανήκουν στον $\mathbf{R}^n$, δείξτε ότι τάξη(A) + τάξη$(B) \leq n$.

39. Μπορεί να ολοκληρωθεί η τρίλιζα (5 μονάδες και 4 μηδενικά στον A) με τρόπο ώστε τάξη$(A) = 2$, αλλά κανένας από τους δύο παίκτες να μην έχει χάσει κάποια κίνηση που θα οδηγούσε σε νίκη;

40. Κατασκευάστε έναν 2 επί 3 πίνακα τάξης 1. Αντιγράψτε το Σχήμα 2.5 και βάλτε ένα διάνυσμα σε κάθε υπόχωρο (δύο στον μηδενόχωρο). Ποια διανύσματα είναι ορθογώνια;

41. Σχεδιάστε ξανά το Σχήμα 2.5 για έναν 3 επί 2 πίνακα τάξης $r = 2$. Ποιος υπόχωρος είναι ο $\boldsymbol{Z}$ (μόνο το μηδενικό διάνυσμα); Το τμήμα μηδενόχωρου οποιουδήποτε διανύσματος x του $\mathbf{R}^2$ είναι $x_n =$ ______.

2.5 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ

Ο 3 επί 4 πίνακας της προηγούμενης ενότητας δεν ήταν ακριβώς αυτό που θα θέλαμε. Από θεωρητικής πλευράς ήταν πολύ ικανοποιητικός· μπορέσαμε να υπολογίσουμε τους τέσσερις υποχώρους, και οι διαστάσεις τους r, $n - r$, r, $m - r$ ήταν μη μηδενικές. Ωστόσο, το παράδειγμα δεν προέκυψε από κάποια πραγματική εφαρμογή. Δεν μας απέδειξε τη θεμελιώδη σημασία αυτών των υποχώρων.

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια κατηγορία παραλληλόγραμμων πινάκων με δύο πλεονεκτήματα. Είναι απλοί και σημαντικοί. Πρόκειται για τους ***πίνακες πρόσπτωσης των γραφημάτων***, τα στοιχεία των οποίων είναι 1, -1 ή 0. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι ότι τα ίδια ισχύουν για τους L και U και για τα διανύσματα βάσης και των τεσσάρων υποχώρων. Οι υπόχωροι αυτοί παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία δικτύων. Τονίζουμε ότι η λέξη «γράφημα» δεν αναφέρεται στο γράφημα μιας συνάρτησης (όπως είναι η παραβολή $y = x^2$). Υπάρχει μια δεύτερη σημασία, εντελώς διαφορετική, η οποία συνδέεται στενότερα με την επιστήμη υπολογιστών από ό,τι με τον απειροστικό λογισμό —και εξηγείται εύκολα. *Αυτή η ενότητα είναι προαιρετική*, αλλά μας δίνει την ευκαιρία να δούμε τους παραλληλόγραμμους πίνακες εν δράσει —και πώς εμφανίζεται στο τέλος ο τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας $A^{\mathrm{T}}A$.

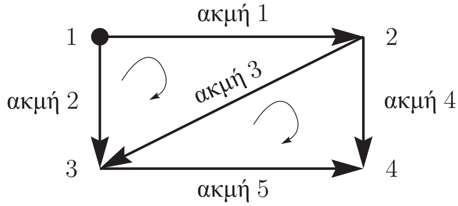
Ένα ***γράφημα*** αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών ή *κόμβων* και από ένα σύνολο *ακμών* που τους συνδέουν. Το γράφημα του Σχήματος 2.6 έχει 4 κόμβους και 5 ακμές. Δεν υπάρχει ακμή μεταξύ των κόμβων 1 και 4 (και δεν επιτρέπονται ακμές από έναν κόμβο προς στον εαυτό του). Το συγκεκριμένο γράφημα είναι *προσανατολισμένο*, διότι κάθε ακμή έχει ένα βέλος.

Ο ***πίνακας πρόσπτωσης ακμών–κόμβων*** είναι 5 επί 4 και περιέχει μια γραμμή για κάθε ακμή. ***Αν η ακμή πηγαίνει από τον κόμβο j στον κόμβο k, τότε η συγκεκριμένη γραμμή έχει -1 στη στήλη j και $+1$ στη στήλη k***. Ο πίνακας πρόσπτωσης A παρουσιάζεται δίπλα στο γράφημα (και θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε το γράφημα αν διαθέταμε μόνο τον A). Η γραμμή 1 αναπαριστά την ακμή που ξεκινάει από τον κόμβο 1 και καταλήγει στον κόμβο 2. Η γραμμή 5 προκύπτει από την πέμπτη ακμή, που ξεκινάει από τον κόμβο 3 και καταλήγει στον κόμβο 4.

Προσέξτε τις στήλες του A. Η στήλη 3 παρέχει πληροφορίες για τον κόμβο 3 —μας λέει ποιες ακμές εισέρχονται και ποιες εξέρχονται. Οι ακμές 2 και 3 εισέρχονται, ενώ η ακμή 5 εξέρχεται (με το αρνητικό πρόσημο). Ο A καλείται μερικές φορές πίνακας *συνεκτικότητας* ή πίνακας *τοπολογίας*. Όταν το γράφημα έχει m ακμές και n κόμβους, ο A είναι m επί n (και συνήθως $m > n$). Ο ανάστροφός του είναι ο πίνακας πρόσπτωσης «κόμβων–ακμών».

Καθένας από τους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους μπορεί να ερμηνευτεί με βάση το γράφημα. Μπορούμε να κάνουμε γραμμική άλγεβρα ή να μιλήσουμε για τάσεις και ρεύματα. Θα κάνουμε και τα δύο!

Μηδενόχωρος του A: Υπάρχει κάποιος συνδυασμός των στηλών που δίνει $Ax = 0$; Κανονικά, την απάντηση δίνει η απαλοιφή, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση τη βρίσκουμε



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccccc} \text{κόμβος} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Σχήμα 2.6 Ένα προσανατολισμένο γράφημα (5 ακμές, 4 κόμβοι, 2 βρόχοι) και ο αντίστοιχος πίνακας πρόσπτωσης A.

κοιτάζοντας απλώς τον πίνακα. *Το άθροισμα των στηλών είναι η μηδενική στήλη*. Ο μηδενόχωρος περιέχει το $x = (1, 1, 1, 1)$, αφού $Ax = 0$. Η εξίσωση $Ax = b$ δεν έχει μοναδική λύση (αν έχει καν λύση). Σε οποιαδήποτε μερική λύση του $Ax = b$ μπορεί να προστεθεί οποιοδήποτε «σταθερό διάνυσμα» $x = (c, c, c, c)$. Η πλήρης λύση έχει αυτή την αυθαίρετη σταθερά c (αντίστοιχη με τη σταθερά $+C$ των ολοκληρωμάτων που υπολογίζουμε στον απειροστικό λογισμό).

Μια δυνατή ερμηνεία προκύπτει αν φανταστούμε τα x_1, x_2, x_3, x_4 σαν τα ***δυναμικά*** (τις τάσεις) ***κάθε κόμβου***. Οι πέντε συνιστώσες του Ax δίνουν τις ***διαφορές*** δυναμικού κατά μήκος των πέντε ακμών. Η διαφορά κατά μήκος της ακμής 1 είναι $x_2 - x_1$, λόγω των ± 1 στην πρώτη γραμμή.

Η εξίσωση $Ax = b$ αντιστοιχεί στο εξής πρόβλημα: Δεδομένων των διαφορών $b_1, \ldots, b_5$, ζητούνται τα δυναμικά $x_1, \ldots, x_4$. Αυτό όμως είναι αδύνατο! Μπορούμε να αυξήσουμε ή να μειώσουμε τα δυναμικά κατά την ίδια σταθερά c, χωρίς να αλλάξουν οι διαφορές —πράγμα που επιβεβαιώνει το γεγονός ότι το $x = (c, c, c, c)$ ανήκει στον μηδενόχωρο του A. Αυτά είναι τα μόνα διανύσματα του μηδενόχωρου, αφού $Ax = 0$ σημαίνει ίσα δυναμικά κατά μήκος κάθε ακμής. Ο μηδενόχωρος αυτού του πίνακα πρόσπτωσης είναι μονοδιάστατος. ***Η τάξη είναι*** $\mathbf{4 - 1 = 3}$.

Χώρος στηλών: Για ποιες διαφορές $b_1, \ldots, b_5$ έχει λύση το $Ax = b$; Για να μπορέσουμε να βρούμε ένα απευθείας κριτήριο, κοιτάζουμε ξανά τον πίνακα. Γραμμή 1 συν γραμμή 3 ίσον γραμμή 2. Στο δεξί μέλος πρέπει να έχουμε $b_1 + b_3 = b_2$, διαφορετικά είναι αδύνατο να υπάρχει λύση. Με αντίστοιχο τρόπο, γραμμή 3 συν γραμμή 5 ίσον γραμμή 4. Το δεξί μέλος πρέπει να ικανοποιεί την $b_3 + b_5 = b_4$, ώστε η απαλοιφή να καταλήξει στην $0 = 0$. Επαναλαμβάνουμε: αν το b ανήκει στον χώρο στηλών, τότε

$$b_1 - b_2 + b_3 = 0 \quad \text{και} \quad b_3 - b_4 + b_5 = 0. \tag{1}$$

Συνεχίζοντας την αναζήτηση, βρίσκουμε επίσης ότι οι γραμμές $1+4$ ισούνται με τις γραμμές $2+5$. Αυτό όμως δεν είναι κάτι καινούργιο· αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) παίρνουμε $b_1 + b_4 = b_2 + b_5$. Οι πέντε συνιστώσες πρέπει να ικανοποιούν *δύο συνθήκες*, διότι ο χώρος στηλών έχει διάσταση $5-2$. Οι συνθήκες αυτές θα προέκυπταν από την απαλοιφή, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση η σημασία τους προκύπτει από το γράφημα.

Βρόχοι: Ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff λέει ότι οι *διαφορές δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου έχουν άθροισμα μηδέν*. Κατά μήκος του επάνω βρόχου του Σχήματος 2.6, οι διαφορές ικανοποιούν την $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = (x_3 - x_1)$. Οι διαφορές αυτές είναι $b_1 + b_3 = b_2$. Για να διανύσουμε τον κάτω βρόχο και να επιστρέψουμε στο ίδιο δυναμικό, πρέπει να έχουμε $b_3 + b_5 = b_4$.

2ΙΗ Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε να ανήκει στον χώρο στηλών είναι ο ***κανόνας τάσεων του Kirchhoff***:

Το άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου πρέπει να είναι μηδέν.

Αριστερός μηδενόχωρος: Για να λύσουμε το $A^{\mathrm{T}}y = 0$, βρίσκουμε τη σημασία του στο γράφημα. Το διάνυσμα y έχει πέντε συνιστώσες, μία για κάθε ακμή. Οι αριθμοί αυτοί αντιπροσωπεύουν τα **ρεύματα** που ρέουν κατά μήκος των πέντε ακμών. Αφού ο A^{T} είναι 4 επί 5, οι εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}y = 0$ δίνουν τέσσερις συνθήκες για τα πέντε αυτά ρεύματα, μία συνθήκη «διατήρησης» για κάθε κόμβο: **Η εισερχόμενη ροή ισούται με την εξερχόμενη ροή σε κάθε κόμβο**:

$$A^{\mathrm{T}}y = \mathbf{0} \qquad \begin{aligned} -y_1 - y_2 \qquad &= 0 \\ y_1 - y_3 - y_4 &= 0 \\ y_2 + y_3 - y_5 &= 0 \\ y_4 + y_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{array}{l} \text{Το συνολικό ρεύμα στον κόμβο 1 είναι μηδέν} \\ \text{στον κόμβο 2} \\ \text{στον κόμβο 3} \\ \text{στον κόμβο 4} \end{array}$$

Η ομορφιά της θεωρίας δικτύων είναι ότι οι A και A^{T} παίζουν και οι δύο σημαντικό ρόλο.

Επίλυση του $A^{\mathrm{T}}y = 0$ σημαίνει εύρεση ενός συνόλου ρευμάτων που δεν «συσσωρεύονται» σε κανέναν κόμβο. Η κυκλοφορία συνεχίζεται, και οι απλούστερες λύσεις είναι τα **ρεύματα κατά μήκος των μικρών βρόχων**. Τα γράφημά μας έχει δύο βρόχους, και στέλνουμε ρεύμα έντασης 1 amp κατά μήκος κάθε βρόχου:

$$\textbf{Διανύσματα βρόχων} \qquad y_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad y_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Κάθε βρόχος παράγει ένα διάνυσμα y του αριστερού μηδενόχωρου. Η συνιστώσα $+1$ ή -1 δηλώνει αν το ρεύμα έχει τη φορά του βέλους ή αντίθετη φορά. Οι συνδυασμοί των y_1 και y_2 γεμίζουν τον αριστερό μηδενόχωρο, άρα τα y_1 και y_2 είναι μια βάση (η διάσταση έπρεπε να είναι $m-r = 5-3 = 2$). Το $y_1 - y_2 = (1, -1, 0, 1, -1)$ αντιστοιχεί στον μεγάλο, εξωτερικό βρόχο του γραφήματος.

Ο χώρος στηλών και ο αριστερός μηδενόχωρος σχετίζονται στενά μεταξύ τους. Ο αριστερός μηδενόχωρος περιέχει το $y_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$, ενώ τα διανύσματα του χώρου στηλών ικανοποιούν την $b_1 - b_2 + b_3 = 0$. Επομένως, $y^{\mathrm{T}}b = 0$: Τα διανύσματα του χώρου στηλών και του αριστερού μηδενόχωρου είναι ορθογώνια μεταξύ τους! Αυτό θα αποτελέσει σύντομα το δεύτερο μέρος του «θεμελιώδους θεωρήματος της γραμμικής άλγεβρας».

Χώρος γραμμών: Ο χώρος γραμμών του A περιέχει τα διανύσματα του $\mathbf{R}^4$, αλλά όχι όλα τα διανύσματα. Η διάστασή του είναι η τάξη $r = 3$. Μέσω της απαλοιφής βρίσκουμε τρεις ανεξάρτητες γραμμές, αλλά μπορούμε να κοιτάξουμε και το γράφημα. Οι τρεις πρώτες γραμμές είναι *εξαρτημένες* (γραμμή 1 + γραμμή 3 = γραμμή 2· οι ακμές αυτές σχηματίζουν βρόχο). Οι *γραμμές* 1, 2, 4 *είναι ανεξάρτητες, διότι οι ακμές* 1, 2, 4 *δεν περιέχουν βρόχους.*

Οι γραμμές 1, 2, 4 είναι μια βάση του χώρου γραμμών. *Τα στοιχεία κάθε γραμμής έχουν άθροισμα μηδέν*. Κάθε συνδυασμός (f_1, f_2, f_3, f_4) του χώρου γραμμών θα έχει την εξής ιδιότητα:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{f} \textbf{ στον χώρο γραμμών} & f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \\ \boldsymbol{x} \textbf{ στον μηδενόχωρο} & x = c(1,1,1,1) \end{array} \tag{2}$$

Καταλήγουμε ξανά στο θεμελιώδες θεώρημα: Ο χώρος γραμμών είναι ορθογώνιος στον μηδενόχωρο. *Αν το f ανήκει στον χώρο γραμμών και το x ανήκει στον μηδενόχωρο, τότε $f^{\mathrm{T}}x = 0$.*

Για τον πίνακα A^{T}, ο βασικός νόμος της θεωρίας δικτύων είναι ο ***κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff***. *Η συνολική εισερχόμενη ροή σε κάθε κόμβο είναι μηδέν*. Οι αριθμοί f_1, f_2, f_3, f_4 είναι πηγές ρευμάτων που εισέρχονται στους κόμβους. Η πηγή f_1 πρέπει να αντισταθμίσει το

$-y_1 - y_2$, που είναι η ροή που εγκαταλείπει τον κόμβο 1 (κατά μήκος των ακμών 1 και 2). Αυτή είναι η πρώτη εξίσωση του $A^{\mathrm{T}}y = f$. Αντίστοιχα πράγματα ισχύουν για τους άλλους τρεις κόμβους —λόγω της διατήρησης του φορτίου πρέπει να έχουμε *εισερχόμενη ροή* = *εξερχόμενη ροή*. Το ωραίο είναι ότι ο $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ ***είναι ακριβώς ο πίνακας που χρειάζεται για τον κανόνα ρευμάτων***.

2Ιθ Οι εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}y = f$ στους κόμβους εκφράζουν τον ***κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff***:

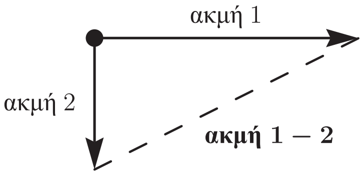
Το καθαρό ρεύμα που εισέρχεται σε κάθε κόμβο είναι μηδέν.
Εισερχόμενη ροή = Εξερχόμενη ροή.

Ο νόμος αυτός μπορεί να ικανοποιείται μόνο αν το συνολικό ρεύμα που εισέρχεται από έξω είναι $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$. Για $f = 0$, ο νόμος $A^{\mathrm{T}}y = 0$ ικανοποιείται από ***ένα ρεύμα που ρέει κατά μήκος ενός βρόχου***.

Ζευγνύοντα δέντρα και ανεξάρτητες γραμμές

Κάθε συνιστώσα των y_1 και y_2 του αριστερού μηδενόχωρου είναι 1 ή -1 ή 0 (λόγω των ροών κατά μήκος των βρόχων). Το ίδιο ισχύει για το $x = (1, 1, 1, 1)$ του μηδενόχωρου και για όλα τα στοιχεία των πινάκων της $PA = LDU$! Η βασική ιδέα είναι ότι κάθε βήμα της απαλοιφής έχει κάποια σημασία για το γράφημα.

Μπορούμε να το δούμε στο πρώτο βήμα για τον πίνακα A: *αφαιρούμε τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2*. Με αυτόν τον τρόπο, η ακμή 2 αντικαθίσταται από μια νέα ακμή «1 μείον 2»:



γραμμή 1	-1	1	0	0
γραμμή 2	-1	0	1	0
γραμμή 1 − 2	**0**	**1**	$\boldsymbol{-1}$	**0**

Αυτό το βήμα της απαλοιφής καταστρέφει μια ακμή και δημιουργεί μια νέα. Η νέα ακμή «1 − 2» είναι απλώς η παλιά ακμή 3 με αντίθετη κατεύθυνση. Στο επόμενο βήμα της απαλοιφής θα παραχθούν μηδενικά στη γραμμή 3 του πίνακα. Αυτό δείχνει ότι οι γραμμές $1, 2, 3$ είναι εξαρτημένες. *Οι γραμμές είναι εξαρτημένες αν οι αντίστοιχες ακμές περιέχουν κάποιο βρόχο.*

Στο τέλος της απαλοιφής έχουμε ένα πλήρες σύνολο r ανεξάρτητων γραμμών. **Οι $\boldsymbol{r}$ αυτές ακμές σχηματίζουν ένα δέντρο —ένα γράφημα χωρίς βρόχους**. Το γράφημά μας έχει $r = 3$, και οι ακμές $1, 2, 4$ σχηματίζουν ένα δυνατό δέντρο. Το πλήρες όνομά του είναι *ζευγνύον δέντρο*, διότι το δέντρο «συνδέει» όλους τους κόμβους του γραφήματος. Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, ένα ζευγνύον δέντρο έχει $n - 1$ ακμές. Η προσθήκη μιας επιπλέον ακμής δημιουργεί βρόχο.

Στη γλώσσα της γραμμικής άλγεβρας, το $n - 1$ είναι η τάξη του πίνακα πρόσπτωσης A. Ο χώρος γραμμών έχει διάσταση $n - 1$. Το ζευγνύον δέντρο που προκύπτει από την απαλοιφή δίνει μια βάση του χώρου γραμμών —κάθε ακμή του δέντρου αντιστοιχεί σε μια γραμμή της βάσης.

Το θεμελιώδες θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων:

Μηδενόχωρος: διάσταση 1, περιέχει το $x = (1, \ldots, 1)$.
Χώρος στηλών: διάσταση $r = n - 1$, οποιεσδήποτε $n - 1$ στήλες είναι ανεξάρτητες.
Χώρος γραμμών: διάσταση $r = n-1$, ανεξάρτητες γραμμές από οποιοδήποτε ζευγνύον δέντρο.
Αριστερός μηδενόχωρος: διάσταση $m - r = m - n + 1$, περιέχει τα y των βρόχων.

Οι τέσσερις αυτές γραμμές δίνουν ***τον τύπο του Euler***, ο οποίος είναι κατά κάποιο τρόπο το πρώτο θεώρημα της τοπολογίας. Μετράει τους μηδενοδιάστατους κόμβους μείον τις μονοδιάστατες ακμές συν τους διδιάστατους βρόχους. Στη γραμμική άλγεβρα, για κάθε συνεκτικό γράφημα αποδεικνύεται το εξής:

$$(\#\ \textbf{κόμβων}) - (\#\ \textbf{ακμών}) + (\#\ \textbf{βρόχων}) = (n) - (m) + (m - n + 1) = \mathbf{1}. \qquad (3)$$

Για έναν απλό βρόχο αποτελούμενο από 10 κόμβους και 10 ακμές, ο αριθμός Euler είναι $10 - 10 + 1$. Αν καθένας από αυτούς τους 10 κόμβους συνδεθεί με έναν ενδέκατο κόμβο στο κέντρο, τότε το $11 - 20 + 10$ παραμένει 1.

Για κάθε διάνυσμα f του χώρου γραμμών έχουμε $x^{\mathrm{T}} f = f_1 + \cdots + f_n = 0$ —τα ρεύματα που εισρέουν από έξω έχουν άθροισμα μηδέν. Για κάθε διάνυσμα b του χώρου στηλών έχουμε $y^{\mathrm{T}} b = 0$ —οι διαφορές δυναμικού κατά μήκος των βρόχων έχουν άθροισμα μηδέν. Σε λίγο θα συνδέσουμε το x με το y μέσω ενός τρίτου νόμου (του ***νόμου του Ohm για κάθε αντίσταση***). Προηγουμένως όμως, θα παραμείνουμε στον πίνακα A με μια εφαρμογή που φαίνεται ασήμαντη, αλλά δεν είναι.

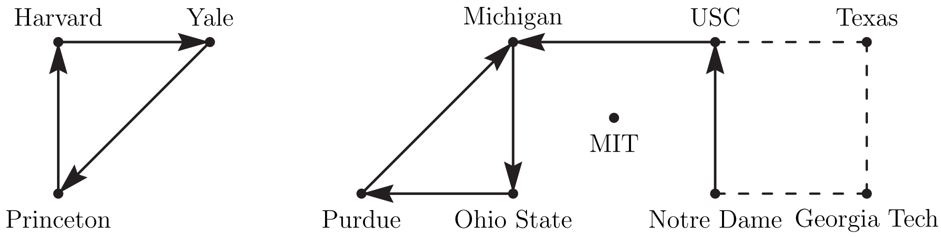
Κατάταξη ποδοσφαιρικών ομάδων

Στο τέλος κάθε αγωνιστικής περιόδου, τα πρακτορεία δημοσιεύουν μια κατάταξη των κολεγιακών ποδοσφαιρικών ομάδων. Η κατάταξη είναι εν πολλοίς ο μέσος όρος των απόψεων διάφορων αθλητικογράφων, και μερικές φορές γίνεται ασαφής μετά τα δέκα πρώτα κολέγια. Θέλουμε να κατατάξουμε όλες τις ομάδες με βάση έναν πιο μαθηματικό τρόπο.

Το πρώτο βήμα είναι να κατασκευάσουμε το γράφημα. Αν η ομάδα j έχει παίξει με την ομάδα k, υπάρχει μια ακμή μεταξύ τους. Οι *ομάδες* είναι οι *κόμβοι* και οι *αγώνες* είναι οι *ακμές*. Υπάρχουν μερικές εκατοντάδες κόμβοι και μερικές χιλιάδες ακμές —η κατεύθυνση των ακμών δηλώνεται με ένα βέλος, με φορά από τη φιλοξενούμενη προς τη φιλοξενούσα ομάδα. Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζεται ένα τμήμα του Ivy League, μερικές σοβαρές ομάδες, καθώς και ένα κολέγιο που δεν φημίζεται για το ποδόσφαιρό του. Ευτυχώς για το συγκεκριμένο κολέγιο (από όπου γράφει ο συγγραφέας), το γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Από μαθηματικής πλευράς, δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι το MIT δεν είναι το νούμερο 1 (εκτός αν τύχει να παίξει έναν αγώνα εναντίον κάποιου).

Αν το ποδόσφαιρο ήταν απόλυτα προβλέψιμο, θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε ένα «δυναμικό» x_j σε κάθε ομάδα. Έτσι, αν μια φιλοξενούμενη ομάδα v έπαιζε στην έδρα μιας ομάδας h, θα νικούσε η ομάδα με το υψηλότερο δυναμικό. Στην ιδανική περίπτωση, η διαφορά b του αποτελέσματος του αγώνα θα ήταν ακριβώς ίση με τη διαφορά $x_h - x_v$ των δυναμικών των ομάδων. Δεν θα χρειαζόταν καν να αγωνιστούν! Όλοι θα συμφωνούσαν ότι η ομάδα με το υψηλότερο δυναμικό είναι η καλύτερη.

Η μέθοδος αυτή έχει δύο (τουλάχιστον) δυσκολίες. Προσπαθούμε να βρούμε έναν αριθμό x για κάθε ομάδα και θέλουμε να ισχύει $x_h - x_v = b_i$ για κάθε αγώνα. Αυτό σημαίνει ότι θα



Σχήμα 2.7 Τμήμα του γραφήματος για το κολεγιακό ποδόσφαιρο.

έχουμε μερικές χιλιάδες εξισώσεις αλλά μόνο μερικές εκατοντάδες αγνώστους. Οι εξισώσεις $x_h - x_v = b_i$ σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου ο A είναι ένας ***πίνακας πρόσπτωσης***. Για κάθε αγώνα υπάρχει μια γραμμή, με $+1$ στη στήλη h και -1 στη στήλη v —τα οποία δηλώνουν ποιες ομάδες παίζουν στον συγκεκριμένο αγώνα.

Πρώτη δυσκολία: Αν το b δεν ανήκει στον χώρο στηλών, δεν υπάρχει λύση. Τα αποτελέσματα των αγώνων πρέπει να συμφωνούν απόλυτα, διαφορετικά δεν μπορούν να βρεθούν ακριβή δυναμικά. Δεύτερη δυσκολία: Αν ο μηδενόχωρος του A περιέχει μη μηδενικά διανύσματα, τα δυναμικά x δεν είναι καλά ορισμένα. Στην πρώτη περίπτωση το x δεν υπάρχει· στη δεύτερη περίπτωση το x δεν είναι μοναδικό. Ενδέχεται να συνυπάρχουν και οι δύο δυσκολίες.

Ο μηδενόχωρος περιέχει πάντα το διάνυσμα που αποτελείται μόνο από μονάδες, αφού ο A ελέγχει μόνο τις *διαφορές* $x_h - x_v$. Για να προσδιορίσουμε τα δυναμικά, μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετα δυναμικό μηδέν στο Harvard. (Μιλώντας καθαρά μαθηματικά και μη υπονοώντας τίποτα.) Αν όμως το γράφημα δεν είναι συνεκτικό, κάθε ασύνδετο κομμάτι του γραφήματος συνεισφέρει ένα διάνυσμα στον μηδενόχωρο. Υπάρχει ακόμα και το διάνυσμα με $x_{\text{MIT}} = 1$ και $x_j = 0$ για όλα τα υπόλοιπα. Πρέπει να γειώσουμε, όχι μόνο το Harvard, αλλά και μία ομάδα σε κάθε κομμάτι. (Δεν αδικούμε κανέναν αποδίδοντάς του δυναμικό μηδέν· αν όλα τα υπόλοιπα δυναμικά είναι μικρότερα του μηδενός, τότε η γειωμένη ομάδα κατατάσσεται πρώτη.) Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι το *πλήθος των κομματιών* του γραφήματος —δεν υπάρχει τρόπος να κατατάξουμε μεταξύ τους τις ομάδες των ασύνδετων κομματιών, αφού οι ομάδες από τις οποίες αποτελούνται δεν αγωνίζονται μεταξύ τους.

Ο χώρος στηλών περιγράφεται πιο δύσκολα. Ποια αποτελέσματα αγώνων συμφωνούν απόλυτα με ένα σύνολο δυναμικών; Είναι βέβαιο ότι το $Ax = b$ δεν έχει λύση αν το Harvard νικήσει το Yale, το Yale νικήσει το Princeton και το Princeton νικήσει το Harvard. Επιπλέον, οι διαφορές αποτελεσμάτων σε αυτό τον βρόχο αγώνων ***πρέπει να έχουν άθροισμα μηδέν***:

$$\textbf{Κανόνας του Kirchhoff για διαφορές αποτελεσμάτων} \qquad b_{\text{HY}} + b_{\text{YP}} + b_{\text{PH}} = 0.$$

Αυτό είναι και νόμος της γραμμικής άλγεβρας. Το $Ax = b$ έχει λύση όταν το b ικανοποιεί τις ίδιες γραμμικές εξαρτήσεις με τις γραμμές του A. Σε αυτή την περίπτωση, η απαλοιφή οδηγεί στην $0 = 0$.

Στην πραγματικότητα, είναι σχεδόν βέβαιο ότι το b δεν ανήκει στον χώρο στηλών. Τα αποτελέσματα των αγώνων ποδοσφαίρου δεν είναι τόσο προβλέψιμα. Για να βρούμε μια κατάταξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ***ελαχίστων τετραγώνων***: Φέρνουμε το Ax όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο b. Με αυτό θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 3, αλλά θα αναφέρουμε μια μόνο τροποποίηση. Ο νικητής παίρνει μπόνους 50 ή ακόμα και 100 βαθμών επιπλέον της διαφοράς με την οποία νίκησε. Διαφορετικά, η νίκη με 1 είναι πολύ κοντά στην ήττα με 1. Αυτό φέρνει τις μαθηματικά υπολογιζόμενες κατατάξεις πολύ κοντά στις κατατάξεις των πρακτορείων. Ο Dr. Leake (Notre Dame) παρουσίασε μια πλήρη ανάλυση στο *Management Science in Sports* (1976).

Αφού είχα γράψει αυτή την παράγραφο, βρήκα στους *New York Times* το εξής:

> Στην τελική κατάταξη που υπολόγισε για το 1985, ο υπολογιστής κατέταξε το Miami (10-2) στην έβδομη θέση πάνω από το Tennessee (9-1-2). Λίγες μέρες μετά τη δημοσίευση, άρχισαν να καταφθάνουν πακέτα που περιείχαν πορτοκάλια και οργισμένες επιστολές από απογοητευμένους οπαδούς του Tennessee στο αθλητικό τμήμα των *Times*. Η εκνευρισμός οφείλεται στο γεγονός ότι το Tennessee συνέτριψε το Miami 35-7 στο Sugar Bowl. Στις τελικές τους κατατάξεις, τα AP και UPI κατέταξαν το Tennessee τέταρτο και το Miami σημαντικά χαμηλότερα.
>
> Χθες το πρωί έφτασαν στον χώρο φορτοεκφόρτωσης εννέα χαρτοκιβώτια με πορτοκάλια. Είχαν σταλεί στο Bellevue Hospital με την προειδοποίηση ότι η ποιότητα και το περιεχόμενο των πορτοκαλιών ήταν αβέβαιο.

Αυτά για αυτή την εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας.

Δίκτυα και εφαρμοσμένα διακριτά μαθηματικά

Ένα γράφημα γίνεται ***δίκτυο***, αν στις ακμές αντιστοιχιστούν κάποιοι αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$. Ο αριθμός c_i μπορεί να είναι το *μήκος* της ακμής i, η *χωρητικότητά της*, η *δυσκαμψία* της (αν περιέχει ελατήριο) ή η *αγωγιμότητά* της (αν περιέχει κάποια αντίσταση). Αυτοί οι αριθμοί μπαίνουν σε έναν διαγώνιο πίνακα C, ο οποίος είναι m επί m. Ο C αποτυπώνει τις «ιδιότητες του υλικού», σε αντίθεση με τον πίνακα πρόσπτωσης A —ο οποίος παρέχει πληροφορίες για τις συνδέσεις.

Η περιγραφή μας αφορά την περίπτωση του ηλεκτρισμού. Η αγωγιμότητα που αντιστοιχεί στην ακμή i είναι c_i, ενώ η αντίσταση είναι $1/c_i$. Ο νόμος του Ohm λέει ότι το ρεύμα y_i που διέρχεται από την αντίσταση είναι ανάλογο της πτώσης τάσης e_i:

$$\textbf{Νόμος του Ohm} \qquad \boldsymbol{y_i = c_i e_i} \qquad (\text{ρεύμα}) = (\text{αγωγιμότητα})(\text{πτώση τάσης}).$$

Αυτό γράφεται και ως $E = IR$, όπου η πτώση τάσης ισούται με το ρεύμα επί την αντίσταση. Σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης για όλες τις ακμές ταυτόχρονα, ο ***νόμος του Ohm είναι*** $\boldsymbol{y = Ce}$.

Για να ολοκληρώσουμε την περιγραφή, χρειαζόμαστε τον κανόνα τάσεων και τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff:

ΚΤΚ: Οι πτώσεις τάσης κατά μήκος κάθε βρόχου έχουν άθροισμα μηδέν.
ΚΡΚ: Τα ρεύματα y_i (και f_i) που εισρέουν σε κάθε κόμβο έχουν άθροισμα μηδέν.

Ο νόμος τάσεων μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε δυναμικά $x_1, \ldots, x_n$ στους κόμβους. Οι διαφορές κατά μήκος ενός βρόχου δίνουν αθροίσματα σαν το $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) = 0$, όπου όλα απαλείφονται. Ο κανόνας ρευμάτων μάς υπαγορεύει να προσθέσουμε τα ρεύματα που εισρέουν σε κάθε κόμβο μέσω του πολλαπλασιασμού $A^{\mathrm{T}}y$. Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές πηγές ρευμάτων, ο *κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff είναι* $A^{\mathrm{T}}y = 0$.

Η άλλη εξίσωση είναι ο νόμος του Ohm, αλλά πρέπει να βρούμε την πτώση τάσης e κατά μήκος της αντίστασης. Ο πολλαπλασιασμός Ax έδωσε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των κόμβων. Αν αντιστρέψουμε το πρόσημο, το $-Ax$ δίνει την *πτώση* δυναμικού. Μέρος της πτώσης αυτής μπορεί να οφείλεται σε μια ***μπαταρία*** ισχύος b_i που υπάρχει στην ακμή. Το υπόλοιπο της πτώσης είναι $e = b - Ax$ κατά μήκος της αντίστασης:

$$\textbf{Νόμος του Ohm} \qquad y = C(b - Ax) \quad \text{ή} \quad C^{-1}y + Ax = b. \tag{4}$$

Οι ***θεμελιώδεις εξισώσεις ισορροπίας*** συνδυάζουν τον νόμο του Ohm και τους κανόνες του Kirchhoff σε ένα κεντρικό πρόβλημα των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Οι εξισώσεις αυτές εμφανίζονται παντού:

$$\textbf{Εξισώσεις ισορροπίας} \qquad \begin{array}{rcl} C^{-1}y + Ax & = & b \\ A^{\mathrm{T}}y & = & f. \end{array} \tag{5}$$

Πρόκειται για ένα γραμμικό συμμετρικό σύστημα, από το οποίο έχει εξαφανιστεί το e. Οι άγνωστοι είναι τα ρεύματα y και τα δυναμικά x. Βλέπουμε ότι ο πίνακας είναι ένας συμμετρικός μπλοκ πίνακας:

$$\textbf{Μορφή μπλοκ} \qquad \begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Σε αυτόν τον μπλοκ πίνακα μπορούμε να εφαρμόσουμε απαλοιφή κατά μπλοκ. Οδηγός είναι ο C^{-1}, πολλαπλασιαστής ο $A^{\mathrm{T}}C$, και η αφαίρεση εξουδετερώνει τον A^{T} που υπάρχει κάτω από τον οδηγό. Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ 0 & -A^{\mathrm{T}}CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f - A^{\mathrm{T}}Cb \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση που περιέχει μόνο το x βρίσκεται στην τελευταία γραμμή, με τον συμμετρικό πίνακα $A^{\mathrm{T}}CA$:

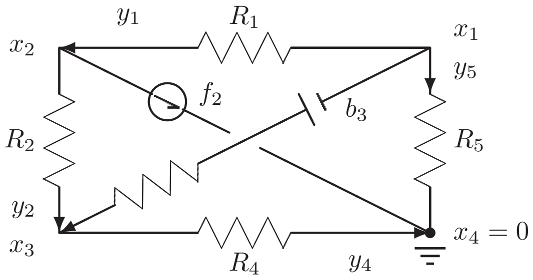
$$\textbf{Θεμελιώδης εξίσωση} \qquad A^{\mathrm{T}}CAx = A^{\mathrm{T}}Cb - f. \tag{7}$$

Το y προκύπτει με ανάδρομη αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση. Τίποτα το περίεργο: αντικαθιστούμε $y = C(b - Ax)$ στην $A^{\mathrm{T}}y = f$ και καταλήγουμε στην (7).

Σημαντική παρατήρηση Ένα δυναμικό πρέπει να καθοριστεί εκ των προτέρων: $x_n = 0$. Ο n-οστός κόμβος είναι ***γειωμένος***, και η n-οστή στήλη του αρχικού πίνακα πρόσπτωσης απομακρύνεται. Ο A για τον οποίο μιλάμε είναι ο πίνακας που απομένει· οι $n - 1$ στήλες του είναι ανεξάρτητες. Ο τετραγωνικός πίνακας $A^{\mathrm{T}}CA$, ο οποίος είναι το κλειδί για τη επίλυση της εξίσωσης (7) ως προς x, είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τάξης $n - 1$:

$$\underset{n-1 \text{ επί } m}{\begin{bmatrix} \quad A^{\mathrm{T}} \quad \end{bmatrix}} \underset{m \text{ επί } m}{\begin{bmatrix} \quad C \quad \end{bmatrix}} \underset{m \text{ επί } n-1}{\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}} = \underset{n-1 \text{ επί } n-1}{\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}CA \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα 1 Έστω ότι μια μπαταρία b_3 και μια πηγή ρεύματος f_2 (και πέντε αντιστάσεις) συνδέουν τέσσερις κόμβους. Ο κόμβος 4 είναι γειωμένος και το δυναμικό $x_4 = 0$ έχει καθοριστεί εκ των προτέρων.



Εφαρμόζουμε πρώτα τον κανόνα ρευμάτων $A^{\mathrm{T}}y = f$ στους κόμβους 1, 2, 3:

$$\text{Για το}\quad \begin{aligned} -y_1 - y_3 - y_5 &= 0 \\ y_1 - y_2 &= f_2 \\ y_2 + y_3 - y_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{έχουμε}\quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δεν γράφουμε κάποια εξίσωση για τον κόμβο 4, για τον οποίο ο κανόνας ρευμάτων είναι $y_4 + y_5 + f_2 = 0$, ο οποίος προκύπτει με πρόσθεση των υπόλοιπων τριών εξισώσεων.

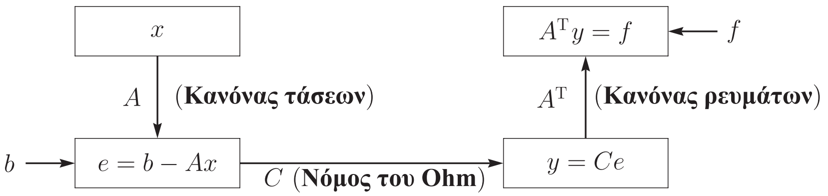
Η άλλη εξίσωση είναι η $C^{-1}y + Ax = b$. Τα δυναμικά x συνδέονται με τα ρεύματα y μέσω του νόμου του Ohm. Ο διαγώνιος πίνακας C περιέχει τις πέντε αγωγιμότητες $c_i = 1/R_i$. Το δεξί μέλος καταγράφει την ισχύ της μπαταρίας b_3 που υπάρχει στην ακμή 3. Στη μορφή μπλοκ, πάνω από το $A^{\mathrm{T}}y = f$ υπάρχει το $C^{-1}y + Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & -1 & 1 & 0 \\ & R_2 & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & R_3 & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & R_4 & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & R_5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι 8 επί 8, με πέντε ρεύματα και τρία δυναμικά. Με απαλοιφή των y, το σύστημα ανάγεται στο 3 επί 3 σύστημα $A^{\mathrm{T}}CAx = A^{\mathrm{T}}Cb - f$. Ο πίνακας $A^{\mathrm{T}}CA$ περιέχει τις αντίστροφες ποσότητες $c_i = 1/R_i$ (διότι στην απαλοιφή διαιρούμε με τους οδηγούς). Παρουσιάζουμε και την τέταρτη γραμμή και στήλη, που αντιστοιχούν στον γειωμένο κόμβο, έξω από τον 3 επί 3 πίνακα:

$$\begin{array}{rl} A^{\mathrm{T}}CA = \begin{bmatrix} c_1 + c_3 + c_5 & -c_1 & -c_3 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_3 & -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -c_5 & (\text{κόμβος } 1) \\ 0 & (\text{κόμβος } 2) \\ -c_4 & (\text{κόμβος } 3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad -c_5 & \qquad 0 & \qquad -c_4 \end{matrix} & \begin{matrix} c_4 + c_5 & (\text{κόμβος } 4) \end{matrix} \end{array}$$

Το πρώτο στοιχείο είναι $1 + 1 + 1$, ή $c_1 + c_3 + c_5$ αν συμπεριληφθεί ο C, διότι οι ακμές 1, 3, 5 ακουμπούν τον κόμβο 1. Το επόμενο στοιχείο της διαγωνίου είναι $1 + 1$ ή $c_1 + c_2$, λόγω των ακμών που ακουμπούν τον κόμβο 2. Εκτός της διαγωνίου, τα c εμφανίζονται με αρνητικά πρόσημα. *Οι ακμές προς τον γειωμένο κόμβο* 4 ανήκουν στην *τέταρτη* γραμμή και στήλη, οι οποίες διαγράφονται όταν η στήλη 4 απομακρύνεται από τον A (καθιστώντας τον $A^{\mathrm{T}}CA$ αντιστρέψιμο). Όλες οι γραμμές και στήλες του 4 επί 4 πίνακα θα είχαν άθροισμα μηδέν και το $(1, 1, 1, 1)$ θα ανήκε στον μηδενόχωρό του.



Σχήμα 2.8 Το πλαίσιο εργασίας για την ισορροπία: πηγές b και f, τρία βήματα ώς τον $A^{\mathrm{T}}CA$.

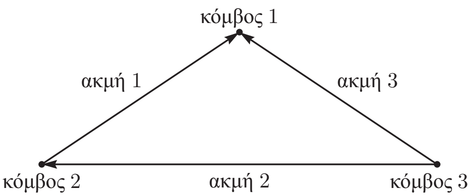
Προσέξτε ότι ο $A^{\mathrm{T}}CA$ είναι συμμετρικός. Έχει θετικούς οδηγούς και προκύπτει από το **βασικό πλαίσιο εργασίας των εφαρμοσμένων μαθηματικών** που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8.

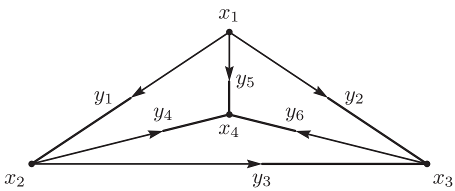
Στη μηχανική, τα x και y είναι μετατοπίσεις και τάσεις. Στα υγρά, οι άγνωστοι είναι η πίεση και ο ρυθμός ροής. Στη στατιστική, το e είναι το σφάλμα και το x η καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Οι συγκεκριμένες εξισώσεις πινάκων και οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις περιλαμβάνονται στο βιβλίο μου *Introduction to Applied Mathematics* και στο νέο βιβλίο *Applied Mathematics and Scientific Computing*. (Βλ. `www.wellesleycambridge.com`.)

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο έχοντας φτάσει στο αποκορύφωμά του —τη ***διατύπωση*** ενός θεμελιώδους προβλήματος των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Συχνά, για αυτό απαιτείται βαθύτερη διαισθητική αντίληψη από ό,τι για την ***επίλυση*** του προβλήματος. Στο Κεφάλαιο 1 κάναμε το πρώτο βήμα στη γραμμική άλγεβρα, λύνοντας γραμμικές εξισώσεις. Για να βρούμε τις εξισώσεις, χρειάστηκε η βαθύτερη γνώση του Κεφαλαίου 2. Η συμβολή των μαθηματικών, και των ανθρώπων, δεν είναι οι υπολογισμοί αλλά η ευφυΐα.

Προβλήματα 2.5

1. Γράψτε τον 3 επί 3 πίνακα πρόσπτωσης A που αντιστοιχεί στο τριγωνικό γράφημα τριών κόμβων του παρακάτω σχήματος. Βρείτε μια λύση του $Ax = 0$ και περιγράψτε όλα τα υπόλοιπα διανύσματα του μηδενόχωρου του A. Βρείτε μια λύση του $A^{\mathrm{T}}y = 0$ και περιγράψτε όλα τα υπόλοιπα διανύσματα του αριστερού μηδενόχωρου του A.





2. Για τον ίδιο 3 επί 3 πίνακα, δείξτε απευθείας από τις στήλες ότι κάθε διάνυσμα b του χώρου στηλών θα ικανοποιεί την $b_1 + b_2 - b_3 = 0$. Συναγάγετε το ίδιο από τις τρεις γραμμές —τις εξισώσεις του συστήματος $Ax = b$. Τι σημαίνει αυτό για τις διαφορές δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου;

3. Δείξτε απευθείας από τις γραμμές ότι κάθε διάνυσμα f του χώρου γραμμών θα ικανοποιεί την $f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Συναγάγετε το ίδιο από τις τρεις εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}y = f$. Τι σημαίνει αυτό όταν τα f είναι ρεύματα που εισρέουν στους κόμβους;

4. Υπολογίστε τον 3 επί 3 πίνακα $A^{\mathrm{T}}A$ και δείξτε ότι είναι συμμετρικός αλλά ιδιόμορφος —ποια διανύσματα ανήκουν στον μηδενόχωρό του; Αν απομακρύνουμε την τελευταία στήλη του A (και την τελευταία γραμμή του A^{T}) απομένει ο 2 επί 2 πίνακας στην άνω αριστερή γωνία· δείξτε ότι *δεν* είναι ιδιόμορφος.

5. Τοποθετήστε τον διαγώνιο πίνακα C με στοιχεία c_1, c_2, c_3 στη μέση και υπολογίστε τον $A^{\mathrm{T}}CA$. Δείξτε ξανά ότι ο 2 επί 2 πίνακας στην άνω αριστερή γωνία είναι αντιστρέψιμος.

6. Γράψτε τον 6 επί 4 πίνακα πρόσπτωσης A που αντιστοιχεί στο δεύτερο γράφημα του σχήματος. Το διάνυσμα $(1,1,1,1)$ ανήκει στον μηδενόχωρο του A, αλλά σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχουν $m-n+1=3$ ανεξάρτητα διανύσματα που ικανοποιούν το $A^{\mathrm{T}}y=0$. Βρείτε τρία διανύσματα y και *συνδέστε τα με τους βρόχους του γραφήματος*.

7. Αν το δεύτερο γράφημα αναπαριστά έξι αγώνες μεταξύ τεσσάρων ομάδων και οι διαφορές αποτελεσμάτων είναι $b_1,\ldots,b_6$, πότε είναι δυνατό να αντιστοιχίσουμε δυναμικά $x_1,\ldots,x_4$ με τρόπο ώστε οι διαφορές δυναμικού να συμφωνούν με τα b; Αυτό που καλείστε να βρείτε (με χρήση των κανόνων του Kirchhoff ή της απαλοιφής) είναι τις συνθήκες που καθιστούν το $Ax=b$ επιλύσιμο.

8. Γράψτε τις διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων αυτού του 6 επί 4 πίνακα πρόσπτωσης και μια βάση κάθε υποχώρου.

9. Υπολογίστε τους $A^{\mathrm{T}}A$ και $A^{\mathrm{T}}CA$, όπου ο 6 επί 6 διαγώνιος πίνακας C έχει στοιχεία $c_1,\ldots,c_6$. Πώς μπορείτε να συμπεράνετε από το γράφημα πού θα εμφανιστούν τα c στην κύρια διαγώνιο του $A^{\mathrm{T}}CA$;

10. Σχεδιάστε ένα γράφημα με αριθμημένες και προσανατολισμένες ακμές (και αριθμημένους κόμβους) του οποίου ο πίνακας πρόσπτωσης να είναι ο εξής:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Είναι το γράφημα δέντρο; (Είναι οι γραμμές του A ανεξάρτητες;) Δείξτε ότι αν απομακρύνουμε την τελευταία ακμή προκύπτει ένα ζευγνύον δέντρο. Οι γραμμές που απομένουν είναι μια βάση του ______.

11. Έχοντας απομακρύνει την τελευταία στήλη από τον προηγούμενο A και θεωρώντας ότι η διαγώνιος του C περιέχει τους αριθμούς 1, 2, 2, 1, γράψτε το 7 επί 7 σύστημα

$$\begin{aligned} C^{-1}y + Ax &= 0\\ A^{\mathrm{T}}y &= f. \end{aligned}$$

Αν απαλείψουμε τα y_1, y_2, y_3, y_4, απομένουν τρεις εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}CAx=-f$ με αγνώστους τα x_1, x_2, x_3. Λύστε τις εξισώσεις αν $f=(1,1,6)$. Με αυτά τα ρεύματα να εισρέουν στους κόμβους 1, 2, 3 του δικτύου, βρείτε τα δυναμικά στους κόμβους και τα ρεύματα στις ακμές.

12. Αν ο A είναι ένας 12 επί 7 πίνακας πρόσπτωσης ενός συνεκτικού γραφήματος, ποια είναι η τάξη του; Πόσες ελεύθερες μεταβλητές περιέχει η λύση του $Ax=b$; Πόσες ελεύθερες μεταβλητές περιέχει η λύση του $A^{\mathrm{T}}y=f$; Πόσες ακμές πρέπει να απομακρύνουμε ώστε να απομείνει ένα ζευγνύον δέντρο;

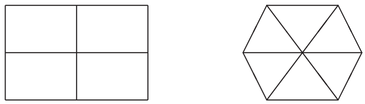
13. Βρείτε και τα 16 ζευγνύοντα δέντρα του παραπάνω γραφήματος με τους 4 κόμβους και τις 6 ακμές.

14. Αν το MIT νικήσει το Harvard με 35-0, το Yale φέρει ισοπαλία με το Harvard και το Princeton νικήσει το Yale με 7-6, ποιες διαφορές αποτελεσμάτων στους υπόλοιπους τρεις αγώνες (H-P, MIT-P, MIT-Y) θα επιτρέψουν στις διαφορές δυναμικού να συμφωνήσουν με τις διαφορές αποτελεσμάτων; Αν γνωρίζουμε τις διαφορές αποτελεσμάτων για τους αγώνες ενός ζευγνύοντος δέντρου, τότε τις γνωρίζουμε για όλους τους αγώνες.

15. Στη μέθοδο κατάταξης των ποδοσφαιρικών ομάδων που παρουσιάσαμε, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη δυναμικότητα του αντιπάλου —ή έχει ήδη ληφθεί υπόψη;

16. Αν όλοι οι κόμβοι συνδέονται με μία ακμή (πλήρες γράφημα), πόσες ακμές υπάρχουν; Το γράφημα έχει n κόμβους και δεν επιτρέπονται ακμές από έναν κόμβο προς τον εαυτό του.

17. Επαληθεύστε τον *τύπο του Euler* για τα παρακάτω δύο γραφήματα:
(# **κόμβων**) $-$ (# **ακμών**) $+$ (# **βρόχων**) $= 1$.



18. Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες, βρείτε τον $A^{\mathrm{T}}A$ και μαντέψτε πώς προκύπτουν τα στοιχεία του από το γράφημα:

(α) Η διαγώνιος του $A^{\mathrm{T}}A$ μας λέει πόσ__ ______ σε κάθε κόμβο.
(β) Τα εκτός διαγωνίου -1 ή 0 μας λένε ποια ζεύγη κόμβων είναι ______.

19. Γιατί περιέχει το $(1, 1, 1, 1)$ ο μηδενόχωρος του $A^{\mathrm{T}}A$; Ποια είναι η τάξη του;

20. Γιατί ένα πλήρες γράφημα με $n = 6$ κόμβους έχει $m = 15$ ακμές; Ένα ζευγνύον δέντρο που συνδέει και τους έξι κόμβους έχει ______ ακμές. Υπάρχουν $n^{n-2} = 6^4$ ζευγνύοντα δέντρα!

21. Ο *πίνακας γειτνίασης* ενός γραφήματος έχει $M_{ij} = 1$ αν οι κόμβοι i και j συνδέονται με μια ακμή (διαφορετικά $M_{ij} = 0$). Γράψτε τον M και τον M^2 για το γράφημα του Προβλήματος 6 με τους 6 κόμβους και τις 4 ακμές. Γιατί ο $(M^2)_{ij}$ μετράει το πλήθος των *διαδρομών δύο βημάτων* από τον κόμβο i στον κόμβο j;

2.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Γνωρίζουμε πώς επηρεάζει ένας πίνακας A τους διάφορους υποχώρους όταν πολλαπλασιάζουμε με αυτόν. Ο μηδενόχωρος απεικονίζεται στο μηδενικό διάνυσμα. Όλα τα διανύσματα απεικονίζονται στον χώρο στηλών, αφού το Ax είναι πάντα ένας συνδυασμός των στηλών. Σύντομα θα δούμε κάτι όμορφο —ότι ο A απεικονίζει τον χώρο γραμμών του στον χώρο στηλών του, και ότι σε αυτούς τους χώρους διάστασης r είναι 100% αντιστρέψιμος. Αυτή είναι η πραγματική επίδραση του A. Κρύβεται μερικώς από τους μηδενόχωρους και τους αριστερούς μηδενόχωρους, οι οποίοι σχηματίζουν ορθές γωνίες και πηγαίνουν με τον δικό τους τρόπο (προς το μηδέν).

Αυτό που ενδιαφέρει σε αυτό το σημείο είναι τι συμβαίνει *στο εσωτερικό* του χώρου — δηλαδή στο εσωτερικού του n-διάστατου χώρου, αν ο A είναι n επί n. Για να απαντήσουμε, πρέπει να μελετήσουμε προσεκτικότερα το πρόβλημα.

Ας υποθέσουμε ότι x είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα. Όταν ο A πολλαπλασιάζει το x, το ***μετασχηματίζει*** σε ένα νέο διάνυσμα Ax. Αυτό συμβαίνει για κάθε σημείο x του n-διάστατου χώρου $\mathbf{R}^n$. Ο πίνακας A μετασχηματίζει, ή «απεικονίζει στον εαυτό του», ολόκληρο τον χώρο. Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζονται τέσσερις μετασχηματισμοί που πραγματοποιούνται με πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

1. Ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, $A = cI$, ***εκτείνει*** κάθε διάνυσμα κατά τον ίδιο παράγοντα c. Διαστέλλεται ή συστέλλεται (ή με κάποιον τρόπο περνάει μέσω της αρχής των αξόνων στην αντίθετη πλευρά, όταν το c είναι αρνητικό) ολόκληρος ο χώρος.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Ένας πίνακας ***στροφής*** στρέφει ολόκληρο τον χώρο γύρω από την αρχή των αξόνων. Το συγκεκριμένο παράδειγμα στρέφει όλα τα διανύσματα κατά $90°$, μετασχηματίζοντας κάθε σημείο (x, y) στο $(-y, x)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

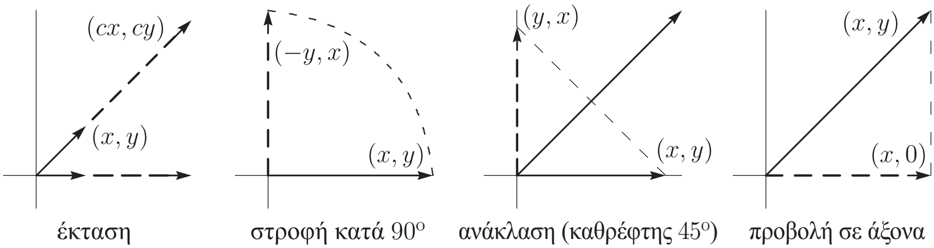
3. Ένας πίνακας ***ανάκλασης*** μετασχηματίζει κάθε διάνυσμα στην εικόνα του, στην άλλη πλευρά ενός καθρέφτη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο καθρέφτης είναι η ευθεία $y = x$ γωνίας $45°$, και σημεία σαν το $(2, 2)$ παραμένουν αμετάβλητα. Ένα σημείο σαν το $(2, -2)$ αναστρέφεται στο $(-2, 2)$. Στην περίπτωση συνδυασμών όπως ο $v = (2, 2) + (2, -2) = (4, 0)$, ο πίνακας αφήνει αμετάβλητο το ένα μέρος και αντιστρέφει το άλλο. Η έξοδος είναι $Av = (2, 2) + (-2, 2) = (0, 4)$.

   Ο συγκεκριμένος πίνακας ανάκλασης είναι και πίνακας μετάθεσης! Είναι αλγεβρικά τόσο απλός, στέλνοντας το (x, y) στο (y, x), με αποτέλεσμα η γεωμετρική εικόνα να μην γίνεται αμέσως αντιληπτή.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Ένας πίνακας ***προβολής*** απεικονίζει ολόκληρο τον χώρο σε έναν υπόχωρο μικρότερης διάστασης (μη αντιστρέψιμος). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, κάθε διάνυσμα (x, y) του επίπεδου μετασχηματίζεται στο πλησιέστερο σημείο $(x, 0)$ του οριζόντιου άξονα. Ο άξονας αυτός είναι ο χώρος στηλών του A. Ο άξονας y, που προβάλλεται στο $(0, 0)$, είναι ο μηδενόχωρος.

Θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω παραδείγματα στις τρεις διαστάσεις. Υπάρχουν πίνακες που εκτείνουν τη Γη ή που τη στρέφουν ή την ανακλούν ως προς το επί-



Σχήμα 2.9 Μετασχηματισμοί του επιπέδου από τέσσερις πίνακες.

πεδο του ισημερινού (μετασχηματίζοντας τον βόρειο πόλο στον νότιο πόλο). Υπάρχει ένας πίνακας που προβάλλει τα πάντα πάνω σε αυτό το επίπεδο (και τους δύο πόλους στο κέντρο). Είναι επίσης σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι οι πίνακες δεν μπορούν να κάνουν τα πάντα· μερικοί μετασχηματισμοί $T(x)$ είναι *αδύνατο να γίνουν* μέσω του πολλαπλασιασμού Ax:

(i) Είναι αδύνατο να μετακινήσουμε την αρχή των αξόνων, αφού $A0 = 0$ για οποιονδήποτε πίνακα.
(ii) Αν το διάνυσμα x μετασχηματίζεται στο x', τότε το $2x$ πρέπει να μετασχηματίζεται στο $2x'$. Εν γένει, το cx πρέπει να μετασχηματίζεται στο cx', αφού $A(cx) = c(Ax)$.
(iii) Αν τα διανύσματα x και y μετασχηματίζονται στα x' και y', τότε το άθροισμά τους $x+y$ πρέπει να μετασχηματίζεται στο $x' + y'$ —αφού $A(x + y) = Ax + Ay$.

Οι κανόνες αυτοί επιβάλλονται στον μετασχηματισμό από τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Ο δεύτερος κανόνας περιέχει τον πρώτο (θέτοντας $c = 0$ παίρνουμε $A0 = 0$). Είδαμε τον κανόνα (iii) εν δράσει όταν το $(4, 0)$ ανακλάστηκε ως προς την ευθεία των $45°$. Διασπάστηκε στα $(2, 2)+(2, -2)$, και καθένα από τα δύο τμήματα ανακλάστηκε ξεχωριστά. Το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε με τις προβολές: να διασπάσουμε σε τμήματα, να προβάλουμε ξεχωριστά κάθε τμήμα και να προσθέσουμε τις προβολές. Οι κανόνες αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν σε ***κάθε μετασχηματισμό που προκύπτει από πίνακα***.

Λόγω της σημασίας τους, οι μετασχηματισμοί αυτοί έχουν αποκτήσει και όνομα: Οι μετασχηματισμοί που ικανοποιούν τους κανόνες (i)–(iii) καλούνται ***γραμμικοί μετασχηματισμοί***. Οι κανόνες μπορούν να συνδυαστούν σε έναν:

2Κ Για οποιουσδήποτε αριθμούς c και d, και οποιαδήποτε διανύσματα x και y, ο πολλαπλασιασμός πινάκων ικανοποιεί τον κανόνα της γραμμικότητας:

$$A(cx + dy) = c(Ax) + d(Ay). \tag{1}$$

Κάθε μετασχηματισμός $T(x)$ που ικανοποιεί αυτή τη σχέση είναι ***γραμμικός μετασχηματισμός***.

Κάθε πίνακας οδηγεί αμέσως σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό. Το πιο ενδιαφέρον ερώτημα είναι το αντίστροφο: *Οδηγεί κάθε γραμμικός μετασχηματισμός σε έναν πίνακα*; Το αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι η εύρεση της απάντησης, η οποία είναι *ναι*. Η προσέγγιση αυτή είναι ένας τρόπος θεμελίωσης της γραμμικής άλγεβρας —εκκίνηση από την ιδιότητα (1) και ανάπτυξη των συνεπειών της— η οποία είναι πολύ πιο αφηρημένη από τη βασική προσέγγιση που ακολουθούμε σε αυτό βιβλίο. Προτιμήσαμε να ξεκινήσουμε κατευθείαν με τους πίνακες, και τώρα θα δούμε πώς αναπαριστούν γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Ένας μετασχηματισμός δεν χρειάζεται να απεικονίζει τον $\mathbf{R}^n$ στον ίδιο χώρο $\mathbf{R}^n$. Είναι απολύτως επιτρεπτό να μετασχηματίζει διανύσματα του $\mathbf{R}^n$ σε διανύσματα ενός διαφορετικού χώρου $\mathbf{R}^m$. Αυτό ακριβώς κάνει ένας m επί n πίνακας! Το αρχικό διάνυσμα x έχει n συνιστώσες, ενώ το μετασχηματισμένο διάνυσμα Ax έχει m συνιστώσες. Οι παραλληλόγραμμοι πίνακες ικανοποιούν εξ ίσου καλά τον κανόνα της γραμμικότητας, άρα δίνουν και αυτοί γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Έχοντας φτάσει ώς εδώ, δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε. Η συνθήκη γραμμικότητας (1) αφορά τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, αλλά τα x και y δεν χρειάζεται να είναι διανύσματα στήλες του $\mathbf{R}^n$. Δεν είναι αυτοί οι μόνοι χώροι. Εξ ορισμού, *κάθε διανυσματικός χώρος επιτρέπει τους συνδυασμούς* $cx+dy$ —τα x και y είναι τα «διανύσματα», αλλά στην πραγματικότητα μπορεί να είναι πολυώνυμα, πίνακες ή συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$. Εφόσον ο μετασχηματισμός ικανοποιεί την εξίσωση (1), είναι γραμμικός.

Θα πάρουμε σαν παράδειγμα τους χώρους $\mathbf{P}_n$, όπου τα διανύσματα είναι πολυώνυμα $p(t)$ βαθμού n. Έχουν τη μορφή $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, και η διάσταση του διανυσματικού χώρου είναι $n+1$ (διότι, μαζί με τον σταθερό όρο, υπάρχουν $n+1$ συντελεστές).

Παράδειγμα 1 Η πράξη της ***παραγώγισης***, $A = d/dt$, είναι γραμμική:

$$Ap(t) = \frac{d}{dt}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_1 + \cdots + n a_n t^{n-1}. \tag{2}$$

Ο μηδενόχωρος αυτού του A είναι ο μονοδιάστατος χώρος των σταθερών: $da_0/dt = 0$. Ο χώρος στηλών είναι ο n-διάστατος χώρος $\mathbf{P}_{n-1}$· το δεξί μέλος της εξίσωσης (2) ανήκει πάντα σε αυτόν τον χώρο. Το άθροισμα της μηδενικότητας $(= 1)$ και της τάξης $(= n)$ είναι η διάσταση του αρχικού χώρου $\mathbf{P}_n$.

Παράδειγμα 2 Η ***ολοκλήρωση*** από το 0 ώς το t είναι επίσης γραμμική (*απεικονίζει τον* $\mathbf{P}_n$ *στον* $\mathbf{P}_{n+1}$):

$$Ap(t) = \int_0^t (a_0 + \cdots + a_n t^n)\, dt = a_0 t + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}. \tag{3}$$

Αυτή τη φορά δεν υπάρχει μηδενόχωρος (εκτός από το μηδενικό διάνυσμα, όπως πάντα!), αλλά η ολοκλήρωση δεν παράγει όλα τα πολυώνυμα του $\mathbf{P}_{n+1}$. Το δεξί μέλος της εξίσωσης (3) δεν περιέχει σταθερό όρο. Τα σταθερά πολυώνυμα ίσως αποτελέσουν τον αριστερό μηδενόχωρο.

Παράδειγμα 3 Ο ***πολλαπλασιασμός*** με ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο, όπως το $2 + 3t$, είναι γραμμικός:

$$Ap(t) = (2 + 3t)(a_0 + \cdots + a_n t^n) = 2a_0 + \cdots + 3a_n t^{n+1}.$$

Και πάλι, αυτό μετασχηματίζει τον $\mathbf{P}_n$ στον $\mathbf{P}_{n+1}$, χωρίς μηδενόχωρο εκτός του $p = 0$.

Στα παραδείγματα αυτά (και σχεδόν σε όλα τα παραδείγματα), δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε τη γραμμικότητα. Δεν φαίνεται καν ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Αν υπάρχει, είναι πρακτικά αδύνατο να μην τη δούμε. Παρόλα αυτά, είναι η σημαντικότερη ιδιότητα που μπορεί να έχει ένας μετασχηματισμός.* Ασφαλώς, οι περισσότεροι μετασχηματισμοί δεν είναι γραμμικοί —για παράδειγμα, ο υπολογισμός του τετραγώνου ενός πολυωνύμου $(Ap = p^2)$, η πρόσθεση του 1 $(Ap = p + 1)$ και η διατήρηση των θετικών συντελεστών $(A(t - t^2) = t)$. Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, και *μόνο αυτοί*, θα μας οδηγήσουν ξανά στους πίνακες.

Μετασχηματισμοί που αναπαριστώνται με πίνακες

Η γραμμικότητα έχει μια κρίσιμη συνέπεια: ***Αν γνωρίζουμε το Ax για κάθε διάνυσμα μιας βάσης, τότε γνωρίζουμε το Ax για κάθε διάνυσμα ολόκληρου του χώρου***. Ας υποθέσουμε

* Η αντιστρεψιμότητα είναι ίσως η δεύτερη σημαντικότερη ιδιότητα.

ότι η βάση αποτελείται από τα n διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Κάθε άλλο διάνυσμα x είναι ένας συνδυασμός των συγκεκριμένων αυτών διανυσμάτων (παράγουν τον χώρο), και το Ax καθορίζεται από τη γραμμικότητα:

$$\textbf{Γραμμικότητα} \qquad \begin{array}{ll} \text{Αν} & x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{τότε} & Ax = c_1(Ax_1) + \cdots + c_n(Ax_n). \end{array} \tag{4}$$

Άπαξ και καθοριστεί τι θα κάνει με τα διανύσματα βάσης ο μετασχηματισμός $T(x) = Ax$, δεν του απομένει καμία ελευθερία. Τα υπόλοιπα καθορίζονται από τη γραμμικότητα. Η απαίτηση (1) για δύο διανύσματα x και y οδηγεί στη συνθήκη (4) για n διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Ο μετασχηματισμός μπορεί να χειριστεί ελεύθερα τα διανύσματα της βάσης (είναι ανεξάρτητα). Μόλις καθοριστεί τι θα κάνει με αυτά, έχει καθοριστεί και ο μετασχηματισμός κάθε διανύσματος.

Παράδειγμα 4 Ποιος γραμμικός μετασχηματισμός μετασχηματίζει τα x_1 και x_2 στα Ax_1 και Ax_2;

$$\text{Το} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{απεικονίζεται στο} \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$\text{το} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{απεικονίζεται στο} \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Πρέπει να έχουμε τον πολλαπλασιασμό $T(x) = Ax$ με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Αν ξεκινήσουμε με μια διαφορετική βάση $(1, 1)$ και $(2, -1)$, ο ίδιος A είναι επίσης ο μόνος γραμμικός μετασχηματισμός για τον οποίο

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε πίνακες που αναπαριστούν την παραγώγιση και την ολοκλήρωση. ***Αρχικά πρέπει να αποφασίσουμε ποια θα είναι η βάση***. Για τα πολυώνυμα βαθμού 3, η φυσική επιλογή για τα τέσσερα διανύσματα βάσης είναι η εξής:

$$\textbf{Βάση του } \mathbf{P_3} \qquad p_1 = 1, \;\; p_2 = t, \;\; p_3 = t^2, \;\; p_4 = t^3.$$

Η βάση αυτή δεν είναι μοναδική (ποτέ δεν είναι), αλλά πρέπει να κάνουμε κάποια επιλογή και αυτή είναι η πιο βολική. Οι παράγωγοι των τεσσάρων αυτών διανυσμάτων βάσης είναι 0, 1, $2t$, $3t^2$:

$$\textbf{Δράση του } \boldsymbol{d/dt} \qquad Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = p_1, \quad Ap_3 = 2p_2, \quad Ap_4 = 3p_3. \tag{5}$$

Το «d/dt» δρα ακριβώς όπως ένας πίνακας, αλλά ποιος πίνακας; Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον συνήθη τετραδιάστατο χώρο με τη συνήθη βάση —τα διανύσματα συντεταγμένων $p_1 = (1,0,0,0)$, $p_2 = (0,1,0,0)$, $p_3 = (0,0,1,0)$ και $p_4 = (0,0,0,1)$. Ο πίνακας καθορίζεται από την εξίσωση (5):

$$\textbf{Πίνακας παραγώγισης} \qquad A_{\text{diff}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το Ap_1 είναι η πρώτη του στήλη, η οποία είναι μηδέν. Το Ap_2 είναι η δεύτερη στήλη, η οποία είναι το p_1. Το Ap_3 είναι το $2p_2$ και το Ap_4 είναι το $3p_3$. Ο μηδενόχωρος περιέχει το p_1 (η παράγωγος μιας σταθεράς είναι μηδέν). Ο χώρος στηλών περιέχει τα p_1, p_2, p_3 (η παράγωγος ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού). Η παράγωγος ενός συνδυασμού, όπως του $p = 2 + t - t^2 - t^3$, καθορίζεται από τη γραμμικότητα. Αυτό δεν είναι κάτι καινούργιο —είναι ο τρόπος με τον οποίο παραγωγίζουμε όλοι. Θα ήταν παράλογο να απομνημονεύαμε την παράγωγο κάθε πολυωνύμου.

Ο πίνακας μπορεί να παραγωγίσει το $p(t)$, διότι οι πίνακες στηρίζονται στη γραμμικότητα!

$$\frac{dp}{dt} = Ap \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \to 1 - 2t - 3t^2.$$

Εν συντομία, *ο πίνακας περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία*. Αν γνωρίζουμε τη βάση και τον πίνακα, γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό κάθε διανύσματος.

Η πληροφορία κωδικοποιείται απλά. Για να μετασχηματίσουμε έναν χώρο στον εαυτό του, αρκεί μία βάση. Για να μετασχηματίσουμε έναν χώρο σε κάποιον άλλο χρειαζόμαστε μία βάση για κάθε χώρο.

2ΚΑ Έστω ότι τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbf{V}$ και ότι τα διανύσματα $y_1, \ldots, y_m$ είναι μια βάση του $\mathbf{W}$. Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbf{V}$ στον $\mathbf{W}$ αναπαριστάται από έναν πίνακα A. Βρίσκουμε την j-οστή στήλη εφαρμόζοντας τον T στο j-οστό διάνυσμα βάσης x_j και γράφοντας το $T(x_j)$ σαν συνδυασμό των y:

$$\textbf{Στήλη } \boldsymbol{j} \textbf{ του } \boldsymbol{A} \qquad T(x_j) = Ax_j = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m. \tag{6}$$

Για τον πίνακα παραγώγισης, η στήλη 1 προήλθε από το πρώτο διάνυσμα βάσης $p_1 = 1$. Η παράγωγός του είναι μηδέν, οπότε η στήλη 1 ήταν μηδέν. Η τελευταία στήλη προήλθε από το $(d/dt)t^3 = 3t^2$. Αφού $3t^2 = 0p_1 + 0p_2 + 3p_3 + 0p_4$, η τελευταία στήλη περιείχε $0, 0, 3, 0$. Σύμφωνα με τον κανόνα (6), ο πίνακας κατασκευάζεται στήλη προς στήλη.

Το ίδιο κάνουμε για την ολοκλήρωση. Η ολοκλήρωση μας μεταφέρει από την τρίτη στην τέταρτη δύναμη, μετασχηματίζοντας τον $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ στον $\mathbf{W} = \mathbf{P}_4$. Άρα χρειαζόμαστε μια βάση για τον $\mathbf{W}$. Η φυσική επιλογή είναι τα $y_1 = 1$, $y_2 = t$, $y_3 = t^2$, $y_4 = t^3$, $y_5 = t^4$, που παράγουν τα πολυώνυμα βαθμού 4. Ο πίνακας A θα είναι m επί n, ή 5 επί 4. Προκύπτει με εφαρμογή της ολοκλήρωσης σε κάθε διάνυσμα βάσης του $\mathbf{V}$:

$$\int_0^t 1\,dt = t \quad \text{ή} \quad Ax_1 = y_2, \quad \ldots, \quad \int_0^t t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 \quad \text{ή} \quad Ax_4 = \frac{1}{4}y_5.$$

$$\textbf{Πίνακας ολοκλήρωσης} \qquad A_{\text{ολοκ}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι *αντίστροφες πράξεις*. Ή τουλάχιστον, η ολοκλήρωση *ακολουθούμενη* από την παραγώγιση μας επαναφέρει στην αρχική συνάρτηση. Για να επιτύχουμε το ίδιο με τους πίνακες, χρειαζόμαστε τον πίνακα παραγώγισης που μας μεταφέρει από την τέταρτη στην τρίτη δύναμη, ο οποίος είναι 4 επί 5:

$$A_{\text{παραγ}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A_{\text{παραγ}}A_{\text{ολοκ}} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Η παραγώγιση είναι ένας ***αριστερός αντίστροφος*** της ολοκλήρωσης. Οι παραλληλόγραμμοι πίνακες δεν μπορούν να έχουν αμφίπλευρους αντιστρόφους! Με την αντίστροφη σειρά, δεν μπορεί να ισχύει $A_{\text{ολοκ}}A_{\text{παραγ}} = I$. Το 5 επί 5 γινόμενο έχει μηδενικά στη στήλη 1. Η παράγωγος μια σταθεράς είναι το μηδέν. Οι υπόλοιπες στήλες του $A_{\text{ολοκ}}A_{\text{παραγ}}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας και το ολοκλήρωμα της παραγώγου του t^n είναι το t^n.

Στροφές Q, προβολές P και ανακλάσεις H

Ξεκινήσαμε αυτή την ενότητα μιλώντας για στροφές κατά 90°, προβολές επί του άξονα x και ανακλάσεις ως προς την ευθεία των 45°. Οι αντίστοιχοι πίνακες είναι εξαιρετικά απλοί:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(στροφή) (προβολή) (ανάκλαση)

Οι αντίστοιχοι γραμμικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου x-y είναι και αυτοί απλοί. Οι στροφές κατά άλλες γωνίες, οι προβολές επί άλλων ευθειών και οι ανακλάσεις ως προς άλλους καθρέφτες μπορούν να οπτικοποιηθούν σχεδόν εξίσου εύκολα. Είναι και αυτοί γραμμικοί μετασχηματισμοί, υπό τον όρο η αρχή των αξόνων να παραμένει σταθερή: $A0 = 0$. *Πρέπει* να μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες. Χρησιμοποιώντας τη φυσική βάση $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$, θέλουμε να ανακαλύψουμε αυτούς τους πίνακες.

1. Στροφή Στο Σχήμα 2.10 παρουσιάζεται μια στροφή κατά γωνία θ. Παρουσιάζεται επίσης η επίδρασή της στα δύο διανύσματα βάσης. Το πρώτο απεικονίζεται στο $(\cos\theta, \sin\theta)$, το οποίο έχει και αυτό μήκος 1· περιέχεται στην «θ-ευθεία». Το δεύτερο διάνυσμα βάσης $(0, 1)$ στρέφεται στο $(-\sin\theta, \cos\theta)$. Σύμφωνα με τον κανόνα (6), οι αριθμοί αυτοί τοποθετούνται στις στήλες του πίνακα (χρησιμοποιούμε τα c και s αντί των $\cos\theta$ και $\sin\theta$). Η οικογένεια στροφών Q_θ είναι μια ιδανική ευκαιρία να ελέγξουμε την αντιστοιχία μεταξύ μετασχηματισμών και πινάκων:

Ισούται ο ***αντίστροφος*** *του* Q_θ *με* $Q_{-\theta}$ (στροφή κατά την αντίθετη κατεύθυνση κατά θ); *Ναι.*

$$Q_\theta Q_{-\theta} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ισούται το ***τετράγωνο*** *του* Q_θ *με* $Q_{2\theta}$ (στροφή κατά τη διπλάσια γωνία); *Ναι.*

$$Q_\theta^2 = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 - s^2 & -2cs \\ 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

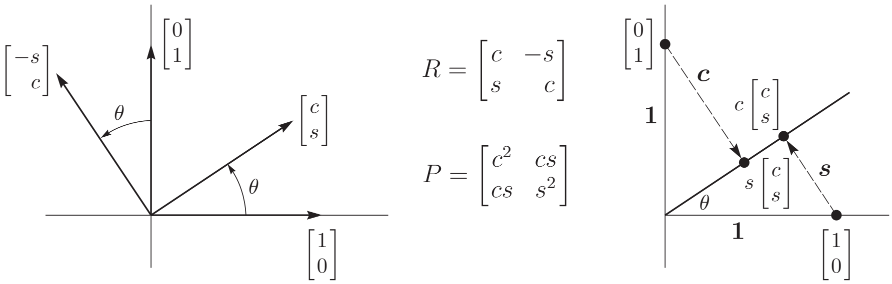
Ισούται το ***γινόμενο*** *των* Q_θ *και* Q_φ *με* $Q_{\theta+\varphi}$ (στροφή κατά θ και κατόπιν κατά φ); *Ναι.*

$$Q_\theta Q_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & \cdots \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \cdots \\ \sin(\theta+\varphi) & \cdots \end{bmatrix}.$$

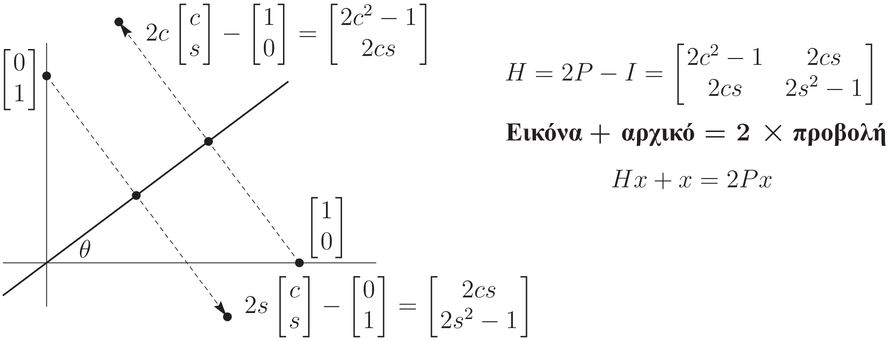
Η τελευταία περίπτωση περιλαμβάνει τις δύο πρώτες. Ο αντίστροφος εμφανίζεται όταν η φ είναι $-\theta$, και το τετράγωνο εμφανίζεται όταν η φ είναι $+\theta$. Οι απαντήσεις και στα τρία ερωτήματα προκύπτουν μέσω των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων (και μας προσφέρουν έναν νέο τρόπο να θυμόμαστε αυτές τις ταυτότητες). Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα ερωτήματα είχαν καταφατική απάντηση. Ο *πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται ακριβώς έτσι ώστε* ***το γινόμενο των πινάκων να αντιστοιχεί στο γινόμενο των μετασχηματισμών***.

2ΚΒ Έστω A και B γραμμικοί μετασχηματισμοί από τον $\mathbf{V}$ στον $\mathbf{W}$ και από τον $\mathbf{U}$ στον $\mathbf{V}$. Το γινόμενό τους AB ξεκινάει από ένα διάνυσμα u του $\mathbf{U}$, πηγαίνει στο Bu του $\mathbf{V}$ και ολοκληρώνεται με το ABu του $\mathbf{W}$. Η «σύνθεση» AB είναι και αυτή ένας γραμμικός μετασχηματισμός (από τον $\mathbf{U}$ στον $\mathbf{W}$). Ο πίνακάς της είναι το γινόμενο των επιμέρους πινάκων που αναπαριστούν τους A και B.

Για τον $A_{\text{παραγ}}A_{\text{ολοκ}}$, ο σύνθετος μετασχηματισμός ήταν ο ταυτοτικός (και ο $A_{\text{ολοκ}}A_{\text{παραγ}}$ εξαφάνισε όλες τις σταθερές). Για τις στροφές, η σειρά του πολλαπλασιασμού δεν παίζει ρόλο. Σε αυτή την περίπτωση, ο $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{W}$ είναι το επίπεδο x-y και ο $Q_\theta Q_\varphi$ είναι ίδιος με τον



Σχήμα 2.10 Στροφή κατά θ (αριστερά). Προβολή επί της θ-ευθείας (δεξιά).



Σχήμα 2.11 Ανάκλαση ως προς την θ-ευθεία: η γεωμετρία και ο πίνακας.

$Q_\varphi Q_\theta$. Στην περίπτωση μιας στροφής που ακολουθείται από ανάκλαση, η σειρά παίζει ρόλο.

Τεχνική σημείωση: Για να κατασκευάσουμε τους πίνακες, χρειαζόμαστε βάσεις για τους **V** και **W**, και κατόπιν για τους **U** και **V**. Αν κρατήσουμε την ίδια βάση για τον **V**, ο πίνακας γινομένου μεταβαίνει σωστά από τη βάση του **U** στη βάση του **W**. Αν διακρίνουμε τον μετασχηματισμό A από τον πίνακά του (και τον συμβολίσουμε με $[A]$), τότε ο κανόνας γινόμενου 2ΚΒ γίνεται εξαιρετικά σύντομος: $[AB] = [A][B]$. Ο κανόνας πολλαπλασιασμού πινάκων του Κεφαλαίου 1 καθορίστηκε πλήρως από αυτή την απαίτηση—πρέπει να συμφωνεί με το γινόμενο των γραμμικών μετασχηματισμών.

2. Προβολή Στο Σχήμα 2.10 παρουσιάζεται επίσης η προβολή του $(1, 0)$ επί της θ-ευθείας. Το μήκος της προβολής είναι $c = \cos\theta$. Προσέξτε ότι το *σημείο* της προβολής δεν είναι το (c, s), όπως εσφαλμένα μπορεί να νομίσει κανείς· το διάνυσμα αυτό έχει μήκος 1 (είναι η στροφή), άρα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με c. Με αντίστοιχο τρόπο, η προβολή του $(0, 1)$ έχει μήκος s και πέφτει στο $s(c, s) = (cs, s^2)$. Αυτό μας δίνει τη δεύτερη στήλη του πίνακα προβολής P:

$$\textbf{Προβολή επί της } \boldsymbol{\theta}\textbf{-ευθείας} \qquad P = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός δεν έχει αντίστροφο, διότι ο μετασχηματισμός δεν έχει αντίστροφο. Τα σημεία της κατακόρυφης ευθείας προβάλλονται στην αρχή των αξόνων· η ευθεία αυτή είναι ο μηδενόχωρος του P. Τα σημεία της θ-ευθείας προβάλλονται στον εαυτό τους! Είτε προβάλλουμε μία είτε δύο φορές, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, άρα $P^2 = P$:

$$P^2 = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c^2(c^2+s^2) & cs(c^2+s^2) \\ cs(c^2+s^2) & s^2(c^2+s^2) \end{bmatrix} = P.$$

Ασφαλώς, $c^2 + s^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. ***Ένας πίνακας προβολής ισούται με το τετράγωνό του.***

3. Ανάκλαση Στο Σχήμα 2.11 παρουσιάζεται η ανάκλαση του $(1, 0)$ ως προς την θ-ευθεία. Το μήκος της ανάκλασης ισούται με το αρχικό μήκος, όπως και στην περίπτωση της στροφής—σε αυτή την περίπτωση όμως η θ-ευθεία παραμένει εκεί όπου βρίσκεται. Η κάθετη ευθεία αντιστρέφει την κατεύθυνση· όλα τα σημεία διέρχονται μέσα από τον καθρέφτη. Τα υπόλοιπα καθορίζονται από τη γραμμικότητα.

$$\textbf{Πίνακας ανάκλασης} \qquad H = \begin{bmatrix} 2c^2-1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2-1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας H έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα ότι $H^2 = I$. ***Δύο ανακλάσεις μάς επαναφέρουν στο σημείο από όπου ξεκινήσαμε***. Κάθε ανάκλαση είναι ο αντίστροφος του εαυτού της, $H = H^{-1}$, το οποίο είναι προφανές από τη γεωμετρία αλλά λιγότερο προφανές από τον πίνακα. Ένας τρόπος να το αποδείξουμε είναι μέσω της σχέσης μεταξύ ανάκλασης και προβολής: $H = 2P - I$. Αυτό σημαίνει ότι $Hx + x = 2Px$ —η εικόνα συν το αρχικό διάνυσμα ισούται με το διπλάσιο της προβολής. Επιβεβαιώνεται επίσης ότι $H^2 = I$:

$$H^2 = (2P-I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I, \qquad \text{αφού } P^2 = P.$$

Άλλοι μετασχηματισμοί Ax μπορούν να αυξήσουν το μήκος του x· με την έκταση και τη στρέβλωση θα ασχοληθούμε στις ασκήσεις. Για κάθε παράδειγμα, υπάρχει ένας πίνακας που το αναπαριστά —αυτό είναι το βασικό συμπέρασμα αυτής της ενότητας. Υπάρχει όμως και το ζήτημα της επιλογής μιας βάσης· τονίζουμε ότι *ο πίνακας εξαρτάται από την επιλογή βάσης*. Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο διάνυσμα βάσης ανήκει ***στην θ-ευθεία*** και ότι το δεύτερο διάνυσμα βάσης είναι ***κάθετο*** σε αυτό:

(i) Ο πίνακας προβολής είναι πάλι ο $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός κατασκευάζεται όπως πάντα: η πρώτη στήλη του προκύπτει από το πρώτο διάνυσμα βάσης (προβεβλημένο στον εαυτό του). Η δεύτερη στήλη προκύπτει από το διάνυσμα βάσης που προβάλλεται στο μηδέν.

(ii) Για τις ανακλάσεις, η ίδια βάση δίνει $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Το δεύτερο διάνυσμα βάσης ανακλάται στο αρνητικό του, και έτσι προκύπτει η δεύτερη στήλη. Όταν χρησιμοποιούμε την ίδια βάση για τους H και P, ο πίνακας H παραμένει ίσος με $2P - I$.

(iii) Για τις στροφές, ο πίνακας δεν αλλάζει. Οι ευθείες αυτές στρέφονται και πάλι κατά θ, και $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ όπως προηγουμένως.

Το ζήτημα της επιλογής της καλύτερης βάσης είναι πολύ σημαντικό· θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα στο Κεφάλαιο 5. Στόχος είναι να κάνουμε τον πίνακα διαγώνιο, όπως το πετύχαμε για τους P και H. Για να κάνουμε τον Q διαγώνιο χρειαζόμαστε μιγαδικά διανύσματα, αφού όλα τα πραγματικά διανύσματα στρέφονται.

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε την επίδραση που έχει στον πίνακα μια *αλλαγή βάσης* όταν ο γραμμικός μετασχηματισμός παραμένει ο ίδιος. ***Ο πίνακας A*** (ή Q ή P ή H) ***μετατρέπεται στον $S^{-1}AS$***. Επομένως, ο ίδιος μετασχηματισμός αναπαριστάται από διαφορετικούς πίνακες (μέσω διαφορετικών βάσεων, τις οποίες λαμβάνει υπόψη ο S). Στον τύπο $S^{-1}AS$, και στην καλύτερη βάση, θα μας οδηγήσει η θεωρία ιδιοδιανυσμάτων.

Προβλήματα 2.6

1. Ποιος πίνακας στρέφει κάθε διάνυσμα κατά 90° και κατόπιν προβάλλει το αποτέλεσμα στον άξονα x; Ποιος πίνακας αναπαριστά την προβολή επί του άξονα x ακολουθούμενη από την προβολή επί του άξονα y;

2. Το γινόμενο 5 ανακλάσεων και 8 στροφών του επιπέδου x-y είναι στροφή ή ανάκλαση;

3. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ προκαλεί ***έκταση*** κατά τη διεύθυνση x. Σχεδιάστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, και κατόπιν τα σημεία $(2x, y)$ που προκύπτουν ως αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον A. Τι σχήμα έχει αυτή η καμπύλη;

4. Κάθε ευθεία παραμένει ευθεία μετά την εφαρμογή ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Αν το z βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των x και y, δείξτε ότι το Az βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των Ax και Ay.

5. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ δίνει έναν μετασχηματισμό ***στρέβλωσης***, ο οποίος αφήνει τον άξονα y αμετάβλητο. Σχεδιάστε την επίδρασή του στον άξονα x, δείχνοντας τι συμβαίνει στα $(1, 0)$ και $(2, 0)$ και $(-1, 0)$ —και πώς μετασχηματίζεται ολόκληρος ο άξονας.

6. Ποιοι 3 επί 3 πίνακες αναπαριστούν τους μετασχηματισμούς που

(α) προβάλλουν κάθε διάνυσμα επί του επιπέδου x-y;
(β) ανακλούν κάθε διάνυσμα ως προς το επίπεδο x-y;
(γ) στρέφουν το επίπεδο x-y κατά $90°$, αφήνοντας σταθερό τον άξονα z;
(δ) στρέφουν το επίπεδο x-y, κατόπιν το x-z και κατόπιν το y-z, κατά $90°$;
(ε) εκτελούν τις παραπάνω τρεις στροφές, αλλά καθεμία κατά $180°$;

7. Ποιος πίνακας αναπαριστά την d^2/dt^2 στον χώρο $\mathbf{P}_3$ των πολυωνύμων τρίτου βαθμού; Κατασκευάστε τον 4 επί 4 πίνακα χρησιμοποιώντας τη συνήθη βάση 1, t, t^2, t^3. Βρείτε τον μηδενόχωρο και τον χώρο στηλών του. Ποια πολυώνυμα ανήκουν σε αυτούς τους χώρους;

8. Ποιος πίνακας αναπαριστά τον πολλαπλασιασμό με $2+3t$, που απεικονίζει τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού $\mathbf{P}_3$ στα πολυώνυμα τετάρτου βαθμού $\mathbf{P}_4$; Οι στήλες του 5 επί 4 πίνακα A προκύπτουν με εφαρμογή του μετασχηματισμού στα 1, t, t^2, t^3.

9. Οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $d^2u/dt^2 = u$ σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο (αφού οι συνδυασμοί των λύσεων είναι και αυτοί λύσεις). Βρείτε δύο ανεξάρτητες λύσεις, βρίσκοντας έτσι μια βάση του συγκεκριμένου χώρου λύσεων.

10. Ποιος συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του Προβλήματος 9 αποτελεί λύση της $u'' = u$, με αρχικές τιμές $u = x$ και $du/dt = y$ για $t = 0$; Αυτός ο μετασχηματισμός από τις αρχικές τιμές στις λύσεις είναι γραμμικός. Ποιος είναι ο αντίστοιχος 2 επί 2 πίνακας (χρησιμοποιήστε τα $x = 1, y = 0$ και $x = 0, y = 1$ σαν βάση του $\mathbf{V}$, και τη βάση του $\mathbf{W}$ που βρήκατε);

11. Επαληθεύστε απευθείας από την $c^2 + s^2 = 1$ ότι οι πίνακες ανάκλασης ικανοποιούν την $H^2 = I$.

12. Υποθέστε ότι A είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το επίπεδο x-y στον εαυτό του. Γιατί ισχύει η σχέση $A^{-1}(x+y) = A^{-1}x + A^{-1}y$; Αν ο A αναπαριστάται από τον πίνακα M, εξηγήστε γιατί ο A^{-1} αναπαριστάται από τον M^{-1}.

13. Το γινόμενο γραμμικών μετασχηματισμών $(AB)C$ ξεκινάει με ένα διάνυσμα x και παράγει το $u = Cx$. Κατόπιν, ο κανόνας 2ΚΒ εφαρμόζει τον AB στον u δίνοντας το $(AB)Cx$.

(α) Προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμοστούν ξεχωριστά ο C, κατόπιν ο B και κατόπιν ο A;

(β) Προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμοστεί ο BC και κατόπιν ο A; Οι παρενθέσεις δεν είναι απαραίτητες, διότι η προσεταιριστική ιδιότητα $(AB)C = A(BC)$ ισχύει για τους γραμμικούς μετασχηματισμούς. Αυτή είναι η καλύτερη απόδειξη του ίδιου κανόνα για τους πίνακες.

14. Αποδείξτε ότι αν ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός (από τον $\mathbf{R}^3$ στον $\mathbf{R}^3$), ο T^2 είναι επίσης γραμμικός.

15. Ο χώρος όλων των 2 επί 2 πινάκων έχει τα εξής τέσσερα «διανύσματα» βάσης:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα A του γραμμικού μετασχηματισμού *αναστροφής* ως προς αυτή τη βάση. Γιατί ισχύει $A^2 = I$;

16. Βρείτε τον 4 επί 4 κυκλικό πίνακα μετάθεσης: Το (x_1, x_2, x_3, x_4) μετασχηματίζεται στο $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. Ποια είναι η επίδραση του A^2; Δείξτε ότι $A^3 = A^{-1}$.

17. Βρείτε τον 4 επί 3 πίνακα A που αναπαριστά μια *δεξιά ολίσθηση*: Το (x_1, x_2, x_3) μετασχηματίζεται στο $(0, x_1, x_2, x_3)$. Βρείτε επίσης τον πίνακα *αριστερής ολίσθησης* B, από τον $\mathbf{R}^4$ ξανά στον $\mathbf{R}^3$, που μετασχηματίζει το (x_1, x_2, x_3, x_4) στο (x_2, x_3, x_4). Ποια είναι τα γινόμενα AB και BA;

18. Στον διανυσματικό χώρο P_3 όλων των $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, έστω $\mathbf{S}$ το υποσύνολο των πολυωνύμων με $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$. Επαληθεύστε ότι ο $\mathbf{S}$ είναι υπόχωρος και βρείτε μια βάση.

19. Ένας *μη γραμμικός* μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος αν το $T(x) = b$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε b. Το παράδειγμα $T(x) = x^2$ δεν είναι αντιστρέψιμο, διότι η $x^2 = b$ έχει δύο λύσεις για θετικό b και καμία λύση για αρνητικό b. Ποιος από τους παρακάτω μετασχηματισμούς (από τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbf{R}^1$ στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbf{R}^1$) είναι αντιστρέψιμος; Κανένας δεν είναι γραμμικός, ούτε ο (γ).

(α) $T(x) = x^3$. (β) $T(x) = e^x$.
(γ) $T(x) = x + 11$. (δ) $T(x) = \cos x$.

20. Ποιος είναι ο άξονας και η γωνία στροφής του μετασχηματισμού που απεικονίζει το (x_1, x_2, x_3) στο (x_2, x_3, x_1);

21. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός πρέπει να αφήνει το μηδενικό διάνυσμα σταθερό: $T(0) = 0$. Αποδείξτε το από την $T(v + w) = T(v) + T(w)$, επιλέγοντας $w =$ ______. Αποδείξτε το επίσης από την απαίτηση $T(cv) = cT(v)$, επιλέγοντας $c =$ ______.

22. Ποιος από τους παρακάτω μετασχηματισμούς δεν είναι γραμμικός; Η είσοδος είναι $v = (v_1, v_2)$.

(α) $T(v) = (v_2, v_1)$. (β) $T(v) = (v_1, v_1)$.
(γ) $T(v) = (0, v_1)$. (δ) $T(v) = (0, 1)$.

23. Αν οι S και T είναι γραμμικοί με $S(v) = T(v) = v$, τότε $S(T(v)) = v$ ή v^2;

24. Υποθέστε ότι $T(v) = v$, με τη διαφορά ότι $T(0, v_2) = (0, 0)$. Δείξτε ότι ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ικανοποιεί την $T(cv) = cT(v)$ αλλά όχι την $T(v+w) = T(v)+T(w)$.

25. Ποιοι από τους παρακάτω μετασχηματισμούς ικανοποιούν την $T(v+w) = T(v)+T(w)$ και ποιοι ικανοποιούν την $T(cv) = cT(v)$;

(α) $T(v) = v/\|v\|$. (β) $T(v) = v_1 + v_2 + v_3$.
(γ) $T(v) = (v_1, 2v_2, 3v_3)$. (δ) $T(v) =$ η μεγαλύτερη συνιστώσα του v.

26. Βρείτε τον $T(T(v))$ για τους παρακάτω μετασχηματισμούς του $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ στον $\mathbf{W} = \mathbf{R}^2$.

(α) $T(v) = -v$.
(β) $T(v) = v + (1, 1)$.
(γ) $T(v) =$ στροφή $90^\circ = (-v_2, v_1)$.
(δ) $T(v) =$ προβολή $= \left(\dfrac{v_1 + v_2}{2}, \dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)$.

27. Ο «κυκλικός» μετασχηματισμός T ορίζεται από την $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1)$. Ποιος είναι ο $T(T(T(v)))$; Ποιος είναι ο $T^{100}(v)$;

28. Βρείτε το *πεδίο τιμών* και τον *πυρήνα* (πρόκειται για νέες ονομασίες του χώρου στηλών και του μηδενόχωρου) του T.

(α) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. (β) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2)$.
(γ) $T(v_1, v_2) = (0, 0)$. (δ) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_1)$.

29. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός από τον $\boldsymbol{V}$ στον $\boldsymbol{W}$ έχει *αντίστροφο* από τον $\boldsymbol{W}$ στον $\boldsymbol{V}$ όταν το πεδίο τιμών είναι ολόκληρος ο $\boldsymbol{W}$ και ο πυρήνας περιέχει μόνο το $v = 0$. Γιατί δεν είναι αντιστρέψιμοι οι παρακάτω μετασχηματισμοί;

(α) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_2)$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^2$.
(β) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_2, v_1 + v_2)$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^3$.
(γ) $T(v_1, v_2) = v_1$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^1$.

30. Υποθέστε ότι ένας γραμμικός T μετασχηματίζει το $(1, 1)$ στο $(2, 2)$ και το $(2, 0)$ στο $(0, 0)$. Βρείτε το $T(v)$ για

(α) $v = (2, 2)$. (β) $v = (3, 1)$. (γ) $v = (-1, 1)$. (δ) $v = (a, b)$.

Τα Προβλήματα 31–35 ενδέχεται να είναι δυσκολότερα. Ο χώρος εισόδου $\boldsymbol{V}$ περιέχει όλους τους 2 επί 2 πίνακες $\boldsymbol{M}$.

31. Ο M είναι ένας 2 επί 2 πίνακας και $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ο γραμμικός μετασχηματισμός T ορίζεται από την $T(M) = AM$. Από ποιους κανόνες πολλαπλασιασμού πινάκων προκύπτει ότι ο T είναι γραμμικός;

32. Υποθέστε ότι $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι ο ταυτοτικός πίνακας I δεν είναι ανήκει στο πεδίο τιμών του T. Βρείτε έναν μη μηδενικό πίνακα M για τον οποίο το $T(M) = AM$ να είναι μηδέν.

33. Υποθέστε ότι ο T αναστρέφει κάθε πίνακα M. Προσπαθήσετε να βρείτε έναν πίνακα A που να δίνει $AM = M^{\mathrm{T}}$ για κάθε M. Δείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας A. *Προς τους καθηγητές:* Πρόκειται για γραμμικό μετασχηματισμό που δεν προκύπτει από πίνακα;

34. Ο μετασχηματισμός T που αναστρέφει κάθε πίνακα είναι σίγουρα γραμμικός. Ποιες από τις παρακάτω επιπλέον ιδιότητες ισχύουν;

(α) $T^2 =$ ταυτοτικός μετασχηματισμός.
(β) Ο πυρήνας του T είναι ο μηδενικός πίνακας.
(γ) Κάθε πίνακας ανήκει στο πεδίο τιμών του T.
(δ) Η $T(M) = -M$ είναι αδύνατη.

35. Υποθέστε ότι $T(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε έναν πίνακα για τον οποίο να ισχύει $T(M) \neq 0$. Περιγράψτε όλους τους πίνακες για τους οποίους $T(M) = 0$ (τον πυρήνα του T) και όλους τους πίνακες εξόδου $T(M)$ (το πεδίο τιμών του T).

Τα Προβλήματα 36–40 αφορούν την αλλαγή βάσης.

36. (α) Ποιος πίνακας μετασχηματίζει το $(1,0)$ στο $(2,5)$ και το $(0,1)$ στο $(1,3)$;
(β) Ποιος πίνακας μετασχηματίζει το $(2,5)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$;
(γ) Γιατί δεν υπάρχει πίνακας που να μετασχηματίζει το $(2,6)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$;

37. (α) Ποιος πίνακας M μετασχηματίζει τα $(1,0)$ και $(0,1)$ στα (r,t) και (s,u);
(β) Ποιος πίνακας N μετασχηματίζει τα (a,c) και (b,d) στα $(1,0)$ και $(0,1)$;
(γ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα a,b,c,d ώστε το (β) να είναι αδύνατο;

38. (α) Πώς προκύπτει από τους M και N του Προβλήματος 37 ο πίνακας που μετασχηματίζει το (a,c) στο (r,t) και το (b,d) στο (s,u);
(β) Ποιος πίνακας μετασχηματίζει το $(2,5)$ στο $(1,1)$ και το $(1,3)$ στο $(0,2)$;

39. Αν κρατήσουμε τα ίδια διανύσματα βάσης αλλά τα τοποθετήσουμε με διαφορετική σειρά, ο πίνακας αλλαγής βάσης M είναι ______ πίνακας. Αν κρατήσουμε τη σειρά των διανυσμάτων βάσης αλλά αλλάξουμε τα μήκη τους, ο M είναι ______ πίνακας.

40. Ο πίνακας που μετασχηματίζει τα $(1,0)$ και $(0,1)$ στα $(1,4)$ και $(1,5)$ είναι ο $M =$ ______. Ο συνδυασμός $a(1,4) + b(1,5)$ που ισούται με $(1,0)$ έχει $(a,b) = (\ \ ,\ \ )$. Πώς σχετίζονται οι νέες αυτές συντεταγμένες του $(1,0)$ με τον M ή τον M^{-1};

41. Ποιες είναι οι τρεις εξισώσεις για τα A,B,C, αν η παραβολή $Y = A + Bx + Cx^2$ ισούται με 4 στο $x = a$, με 5 στο $x = b$ και με 6 στο $x = c$; Βρείτε την ορίζουσα του 3 επί 3 πίνακα. Για ποιους αριθμούς a,b,c θα είναι αδύνατο να βρούμε τη συγκεκριμένη παραβολή Y;

42. Έστω ότι τα v_1, v_2, v_3 είναι ιδιοδιανύσματα του T. Αυτό σημαίνει ότι $T(v_i) = \lambda_i v_i$ για $i = 1,2,3$. Ποιος είναι ο πίνακας του T όταν η βάση εισόδου και εξόδου είναι τα v;

43. Κάθε αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να έχει ως πίνακά του τον I. Ως βάση εξόδου επιλέγουμε απλώς τα $w_i = T(v_i)$. Γιατί πρέπει να είναι αντιστρέψιμος ο T;

44. Υποθέστε ότι T είναι μια ανάκλαση ως προς τον άξονα x και S μια ανάκλαση ως προς τον άξονα y. Το πεδίο ορισμού $\mathbf{V}$ είναι το επίπεδο x-y. Αν $v = (x,y)$, ποιο είναι το $S(T(v))$; Βρείτε μια απλούστερη περιγραφή του γινομένου ST.

45. Υποθέστε ότι T είναι μια ανάκλαση ως προς την ευθεία των x-y και S μια ανάκλαση ως προς τον άξονα y. Αν $v = (2, 1)$, τότε $T(v) = (1, 2)$. Βρείτε τα $S(T(v))$ και $T(S(v))$. Αυτό δείχνει ότι εν γένει $ST \neq TS$.

46. Δείξτε ότι το γινόμενο ST δύο ανακλάσεων είναι μια στροφή. Βρείτε τη γωνία στροφής πολλαπλασιάζοντας τους παρακάτω πίνακες ανάκλασης:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

47. Ο 4 επί 4 *πίνακας Hadamard* αποτελείται αποκλειστικά από $+1$ και -1:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον H^{-1} και γράψτε το $v = (7, 5, 3, 1)$ σαν συνδυασμό των στηλών του H.

48. Υποθέστε ότι έχουμε δύο βάσεις $v_1, \ldots, v_n$ και $w_1, \ldots, w_n$ του $\mathbf{R}^n$. Αν ένα διάνυσμα έχει συντελεστές b_i στη μία βάση και c_i στην άλλη βάση, ποιος είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης στην $b = Mc$; Ξεκινήστε από την

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = Vb = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n = Wc.$$

Η απάντησή σας αναπαριστά την $T(v) = v$ χρησιμοποιώντας ως βάση εισόδου τα v και ως βάση εξόδου τα w. Λόγω των διαφορετικών βάσεων, ο πίνακας δεν είναι ο I.

49. Σωστό ή λάθος: Αν γνωρίζουμε το $T(v)$ για n διαφορετικά μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbf{R}^n$, τότε γνωρίζουμε το $T(v)$ για κάθε διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$.

50. (Προτεινόμενο) Υποθέστε ότι όλα τα διανύσματα x που περιέχονται στο μοναδιαίο τετράγωνο $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ μετασχηματίζονται στα Ax (ο A είναι 2 επί 2).

(α) Ποιο είναι το σχήμα του μετασχηματισμένου χωρίου (όλα τα Ax);
(β) Για ποιους πίνακες A είναι το χωρίο αυτό τετράγωνο;
(γ) Για ποιον A είναι ευθεία;
(δ) Για ποιον A παραμένει το νέο εμβαδόν ίσο με 1;

Επαναληπτικές ασκήσεις

2.1 Βρείτε μια βάση των παρακάτω υποχώρων του $\mathbf{R}^4$:

(α) Των διανυσμάτων για τα οποία $x_1 = 2x_4$.
(β) Των διανυσμάτων για τα οποία $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $x_3 + x_4 = 0$.
(γ) Του υποχώρου που παράγεται από τα $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$ και $(2, 3, 4, 5)$.

2.2 Δίνοντας μια βάση, περιγράψτε έναν διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbf{R}^3$ που δεν περιέχει κανένα από τα διανύσματα συντεταγμένων $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

2.3 Σωστό ή λάθος, με αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος:

(α) Αν τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ παράγουν έναν υπόχωρο S, τότε διάσταση$S = m$.
(β) Η τομή δύο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου δεν μπορεί να είναι κενή.
(γ) Αν $Ax = Ay$, τότε $x = y$.
(δ) Ο χώρος γραμμών του A έχει μια μοναδική βάση που μπορεί να υπολογιστεί με αναγωγή του A σε κλιμακωτή μορφή.
(ε) Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει ανεξάρτητες στήλες, το ίδιο ισχύει για τον A^2.

2.4 Ποια είναι η κλιμακωτή μορφή U του A;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ποιες είναι οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του;

2.5 Βρείτε την τάξη και τον μηδενόχωρο των

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6 Βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων που σχετίζονται με τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.7 Ποια είναι η πλέον γενική λύση του $u + v + w = 1$, $u - w = 2$;

2.8 (α) Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να περιέχει το διάνυσμα $x = (1, 1, 2)$.
(β) Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο αριστερός μηδενόχωρος να περιέχει το $y = (1, 5)$.
(γ) Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να παράγεται από το $(1, 1, 2)$ και του οποίου ο χώρος γραμμών να παράγεται από το $(1, 5)$.
(δ) Αν σας δίνονται οποιαδήποτε τρία διανύσματα του $\mathbf{R}^6$ και οποιαδήποτε τρία διανύσματα του $\mathbf{R}^5$, υπάρχει 6 επί 5 πίνακας του οποίου ο χώρος στηλών να παράγεται από τα τρία πρώτα και του οποίου ο χώρος γραμμών να παράγεται από τρία δεύτερα;

2.9 Στον διανυσματικό χώρο των 2 επί 2 πινάκων,

(α) είναι υπόχωρος το σύνολο των πινάκων τάξης 1;
(β) ποιος υπόχωρος παράγεται από τους πίνακες μετάθεσης;
(γ) ποιος υπόχωρος παράγεται από τους θετικούς πίνακες ($a_{ij} > 0$ για όλα τα στοιχεία);
(δ) ποιος υπόχωρος παράγεται από τους αντιστρέψιμος πίνακες;

2.10 Επινοήστε έναν διανυσματικό χώρο που να περιέχει όλους τους γραμμικούς μετασχηματισμούς από τον $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^n$. Πρέπει να ορίσετε έναν κανόνα για την πρόσθεση. Ποια είναι η διάσταση του;

2.11 (α) Βρείτε την τάξη του A και γράψτε μια βάση του μηδενόχωρού του.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Οι τρεις πρώτες γραμμές του U είναι βάση του χώρου γραμμών του A —σωστό ή λάθος;
Οι στήλες 1, 3, 6 του U είναι βάση του χώρου στηλών του A —σωστό ή λάθος;
Οι τέσσερις γραμμές του A είναι βάση του χώρου γραμμών του A —σωστό ή λάθος;

(γ) Βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα b για τα οποία το $Ax = b$ να έχει λύση.

(δ) Κατά την εφαρμογή της απαλοιφής στον A, ποιο πολλαπλάσιο της τρίτης γραμμής αφαιρείται ώστε να μηδενιστεί η τέταρτη γραμμή;

2.12 Αν A είναι ένας n επί $n-1$ πίνακας και η τάξη του είναι $n-2$, ποια είναι η διάσταση του μηδενόχωρού του;

2.13 Χρησιμοποιώντας απαλοιφή, βρείτε τους τριγωνικούς παράγοντες $A = LU$, αν

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί a, b, c, d ώστε οι στήλες να είναι γραμμικά ανεξάρτητες;

2.14 Αποτελούν τα διανύσματα $(1, 1, 3)$, $(2, 3, 6)$ και $(1, 4, 3)$ βάση του $\mathbf{R}^3$;

2.15 Τι γνωρίζουμε για τον $\boldsymbol{C}(A)$ όταν το πλήθος των λύσεων του $Ax = b$ είναι

(α) 0 ή 1, ανάλογα με το b.
(β) ∞, ανεξάρτητα από το b.
(γ) 0 ή ∞, ανάλογα με το b.
(δ) 1, ανεξάρτητα από το b.

2.16 Στην προηγούμενη άσκηση, πώς σχετίζεται το r με τα m και n σε κάθε παράδειγμα;

2.17 Αν x είναι ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$ και $x^{\mathrm{T}}y = 0$ για κάθε y, δείξτε ότι $x = 0$.

2.18 Αν A είναι ένας n επί n πίνακας για τον οποίο $A^2 = A$ και τάξη$(A) = n$, δείξτε ότι $A = I$.

2.19 Ποιος υπόχωρος των 3 επί 3 πινάκων παράγεται από τους στοιχειώδεις πίνακες E_{ij} με μονάδες στη διαγώνιο και το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο από κάτω;

2.20 Πόσοι 5 επί 5 πίνακες μετάθεσης υπάρχουν; Είναι γραμμικά ανεξάρτητοι; Παράγουν τον χώρο όλων των 5 επί 5 πινάκων; Δεν χρειάζεται να τους γράψετε όλους.

2.21 Ποια είναι η τάξη του n επί n πίνακα όλα τα στοιχεία του οποίου ισούνται με 1; Ποια είναι η τάξη του «πίνακα σκακιέρα», για τον οποίο $a_{ij} = 0$ όταν το $i + j$ είναι άρτιο και $a_{ij} = 1$ όταν το $i + j$ είναι περιττό;

2.22 (α) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση για τα παρακάτω A και b;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(β) Βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου του A.
(γ) Βρείτε τη γενική λύση του $Ax = b$, όταν υπάρχει λύση.
(δ) Βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του A.
(ε) Ποια είναι η τάξη του A^{T};

2.23 Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα που να μετασχηματίζει τα διανύσματα συντεταγμένων e_1, e_2, e_3 σε τρία δεδομένα διανύσματα v_1, v_2, v_3; Πότε θα είναι ο πίνακας αυτός αντιστρέψιμος;

2.24 Αν τα e_1, e_2, e_3 ανήκουν στον χώρο στηλών ενός 3 επί 5 πίνακα, έχει αριστερό αντίστροφο; Έχει δεξιό αντίστροφο;

2.25 Υποθέστε ότι T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός επί του $\mathbf{R}^3$ που απεικονίζει κάθε σημείο (u, v, w) στο $(u + v + w, u + v, u)$. Περιγράψτε την επίδραση του T^{-1} στο σημείο (x, y, z).

2.26 *Σωστό ή λάθος*;

(α) Κάθε υπόχωρος του $\mathbf{R}^4$ είναι ο μηδενόχωρος κάποιου πίνακα.
(β) Αν ο A έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον A^{T}, ο πίνακας πρέπει να είναι τετραγωνικός.
(γ) Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το x στο $mx + b$ είναι γραμμικός (από τον $\mathbf{R}^1$ στον $\mathbf{R}^1$).

2.27 Βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.28 (α) Αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες (ο A είναι m επί n) τότε η τάξη είναι ______, ο χώρος στηλών είναι ______ και ο αριστερός μηδενόχωρος είναι ______.
(β) Αν ο A είναι 8 επί 10 με διδιάστατο μηδενόχωρο, δείξτε ότι το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b.

2.29 Περιγράψτε τους γραμμικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου x-y που αναπαριστώνται με τη συνήθη βάση $(1, 0)$ και $(0, 1)$ από τους πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.30 (α) Αν ο A είναι τετραγωνικός, δείξτε ότι ο μηδενόχωρος του A^2 περιέχει τον μηδενόχωρο του A.
(β) Δείξτε επίσης ότι ο χώρος στηλών του A^2 περιέχεται στον χώρο στηλών του A.

2.31 Πότε ισχύει $A^2 = 0$ για τον πίνακα τάξης 1 $A = uv^{\mathrm{T}}$;

2.32 (α) Βρείτε μια βάση του χώρου όλων των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^6$ με $x_1+x_2 = x_3+x_4 = x_5 + x_6$.
(β) Βρείτε έναν πίνακα με μηδενόχωρο τον συγκεκριμένο υπόχωρο.
(γ) Βρείτε έναν πίνακα με χώρο στηλών τον συγκεκριμένο υπόχωρο.

2.33 Υποθέστε ότι οι πίνακες της $PA = LU$ είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(α) Ποια είναι η τάξη του A;
(β) Ποια είναι μια βάση του χώρου γραμμών του A;
(γ) *Σωστό ή λάθος*: Οι γραμμές 1, 2, 3 του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
(δ) Ποια είναι μια βάση του χώρου στηλών του A;
(ε) Ποια είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου του A;
(στ) Ποια είναι η γενική λύση του $Ax = 0$;