Κεφάλαιο 2

Διανυσματικοί χώροι

2.1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Η απαλοιφή απλοποιεί, στοιχείο προς στοιχείο, το γραμμικό σύστημα $Ax = b$. Ευτυχώς, απλοποιεί και τη θεωρία. Μετά την απαλοιφή, μπορούμε να απαντήσουμε πολύ ευκολότερα τα βασικά ερωτήματα της *ύπαρξης* και της *μοναδικότητας* —υπάρχει μία λύση, καμία λύση ή άπειρες λύσεις; Θα χρειαστεί να αφιερώσουμε μια ακόμη ενότητα σε αυτά τα ερωτήματα, ώστε να βρούμε όλες τις λύσεις ενός m επί n συστήματος. Με αυτόν τον τρόπο, θα έχουμε καλύψει πλήρως το θέμα.

Η απαλοιφή μάς προσφέρει έναν μόνο τρόπο κατανόησης του $Ax = b$. Κύριος στόχος μας είναι να επιτύχουμε μια διαφορετική και βαθύτερη κατανόηση. Αυτό το κεφάλαιο ίσως είναι δυσκολότερο από το πρώτο. Φτάνει ώς την καρδιά της γραμμικής άλγεβρας.

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της έννοιας του ***διανυσματικού χώρου*** αναφέροντας εξ αρχής τους σημαντικότερους χώρους, οι οποίοι συμβολίζονται με $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, … Ο χώρος $\mathbf{R}^n$ αποτελείται από *όλα τα διανύσματα στήλες με n συνιστώσες*. (Γράφουμε $\mathbf{R}$ διότι οι συνιστώσες είναι πραγματικοί αριθμοί.) Ο $\mathbf{R}^2$ αναπαριστάται με το σύνηθες επίπεδο x-y· οι δύο συνιστώσες του διανύσματος είναι οι συντεταγμένες x και y του αντίστοιχου σημείου. Οι τρεις συνιστώσες ενός διανύσματος του $\mathbf{R}^3$ δίνουν ένα σημείο του τριδιάστατου χώρου. Ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbf{R}^1$ είναι μια ευθεία.

Αυτό που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τη γραμμική άλγεβρα είναι ότι η επέκταση στις n διαστάσεις είναι πολύ εύκολη. Για ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^7$ χρειαζόμαστε μόνο τις επτά συνιστώσες, ακόμα και αν είναι δύσκολο να φανταστούμε τη γεωμετρία. Σε κάθε διανυσματικό χώρο, είναι δυνατές δύο πράξεις:

> ***Μπορούμε να προσθέτουμε δύο διανύσματα και μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε διανύσματα με αριθμούς.***
>
> **Με άλλα λόγια, μπορούμε να σχηματίζουμε γραμμικούς συνδυασμούς.**

Η πρόσθεση ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα $x + y = y + x$, υπάρχει ένα «μηδενικό διάνυσμα» που ικανοποιεί την $0 + x = x$ και υπάρχει ένα διάνυσμα «$-x$» που ικανοποιεί την $-x + x = 0$. Οι θεμελιώδεις ιδιότητες είναι οκτώ (στις οποίες περιλαμβάνονται αυτές οι τρεις)· ο πλήρης κατάλογος δίνεται στο Πρόβλημα 5 στο τέλος αυτής της ενότητας. ***Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος είναι ένα σύνολο*** *διανυσμάτων* ***μαζί με κανόνες για την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό τους με πραγματικούς αριθμούς***. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός πρέπει να παράγουν διανύσματα του ίδιου χώρου και πρέπει να ικανοποιούν τις οκτώ ιδιότητες.

Συνήθως, τα διανύσματά μας ανήκουν σε έναν από τους χώρους $\mathbf{R}^n$· είναι συνηθισμένα διανύσματα στήλες. Αν $x = (1, 0, 0, 3)$, τότε οι συνιστώσες του $2x$ (και του $x + x$) είναι $2, 0, 0, 6$. Ο τυπικός ορισμός επιτρέπει και σε άλλα πράγματα να είναι «διανύσματα» —υπό τον όρο να είναι δυνατή η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Ακολουθούν τρία παραδείγματα:

1. *Ο απειροδιάστατος χώρος* $\mathbf{R}^\infty$. Τα διανύσματά του έχουν άπειρες το πλήθος συνιστώσες, όπως το $x = (1, 2, 1, 2, \ldots)$. Οι κανόνες για τις $x + y$ και cx παραμένουν οι ίδιοι.

2. *Ο χώρος των 3 επί 2 πινάκων*. Σε αυτήν την περίπτωση τα «διανύσματα» είναι πίνακες! Μπορούμε να προσθέτουμε δύο πίνακες, $A + B = B + A$, υπάρχει μηδενικός πίνακας κ.ο.κ. Ο χώρος αυτός είναι σχεδόν ίδιος με τον $\mathbf{R}^6$. (Οι έξι συνιστώσες διατάσσονται σε ένα παραλληλόγραμμο αντί σε μια στήλη.) Οποιαδήποτε επιλογή m και n θα έδινε, με αντίστοιχο τρόπο, τον διανυσματικό χώρο όλων των m επί n πινάκων.

3. *Ο χώρος των συναρτήσεων* $f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση δεχόμαστε όλες τις συναρτήσεις f που ορίζονται επί ενός σταθερού διαστήματος, φερ' ειπείν επί του $0 \le x \le 1$. Ο χώρος αυτός περιλαμβάνει τις $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, το άθροισμά τους $(f + g)(x) = x^2 + \sin x$ και όλα τα πολλαπλάσιά τους, όπως τις $3x^2$ και $-\sin x$. Τα διανύσματα είναι συναρτήσεις και η διάσταση είναι κατά κάποιο τρόπο ένα μεγαλύτερο άπειρο από αυτό του $\mathbf{R}^\infty$.

Επιπλέον παραδείγματα δίνονται στις ασκήσεις, αλλά οι διανυσματικοί χώροι που χρειαζόμαστε περισσότερο βρίσκονται κάπου αλλού —***βρίσκονται εντός των συνήθων χώρων*** $\mathbf{R}^n$. Θέλουμε να τους περιγράψουμε και να εξηγήσουμε γιατί είναι σημαντικοί. Γεωμετρικά, σκεφτείτε τον συνήθη τριδιάστατο χώρο $\mathbf{R}^3$ και επιλέξτε ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. ***Το επίπεδο αυτό αποτελεί από μόνο του έναν διανυσματικό χώρο***. Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα του επιπέδου με το 3, ή με το -3, ή με οποιονδήποτε άλλο αριθμό, παίρνουμε ένα διάνυσμα του ίδιου επιπέδου. Αν προσθέσουμε δύο διανύσματα του επιπέδου, το άθροισμά τους παραμένει στο επίπεδο. Το συγκεκριμένο επίπεδο που διέρχεται από το $(0, 0, 0)$ καταδεικνύει μια από τις πιο θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής άλγεβρας· είναι ένας ***υπόχωρος*** του αρχικού χώρου $\mathbf{R}^3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ Ένας ***υπόχωρος*** ενός διανυσματικού χώρου είναι ένα μη κενό υποσύνολο που ικανοποιεί τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένας διανυσματικός χώρος: ***Οι γραμμικοί συνδυασμοί παραμένουν εντός του υποχώρου***.

(i) Αν προσθέσουμε δύο διανύσματα x και y του υποχώρου,
το $x + y$ ανήκει *στον υπόχωρο*.

(ii) Αν πολλαπλασιάσουμε ένα διάνυσμα x του υποχώρου με έναν αριθμό c,
το cx ανήκει *στον υπόχωρο*.

Προσέξτε την έμφαση στη λέξη ***χώρος***. Ένας υπο*χώρος* είναι ένα υποσύνολο που είναι «κλειστό» ως προς την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Οι πράξεις αυτές ακολουθούν τους κανόνες του φιλοξενούντος χώρου, κρατώντας μας ***εντός του υποχώρου***. Οι οκτώ απαιτούμενες ιδιότητες ικανοποιούνται στον μεγαλύτερο χώρο και θα ικανοποιούνται αυτομάτως σε κάθε υπόχωρο. Προσέξτε ειδικότερα ότι ***το μηδενικό διάνυσμα θα ανήκει σε κάθε υπόχωρο***. Αυτό προκύπτει από τον κανόνα (ii): Επιλέγουμε ως αριθμό το $c = 0$.

Ο μικρότερος υπόχωρος $\mathbf{Z}$ περιέχει μόνο ένα διάνυσμα, το μηδενικό διάνυσμα. Είναι ένας «μηδενοδιάστατος χώρος», ο οποίος περιέχει μόνο το σημείο της αρχής των αξόνων.

Οι κανόνες (i) και (ii) ικανοποιούνται, αφού το άθροισμα $0 + 0$ ανήκει σε αυτόν τον μονοσημειακό χώρο, και το ίδιο ισχύει για όλα τα πολλαπλάσια $c0$. *Είναι ο μικρότερος δυνατός διανυσματικός χώρος*: το σύνολο δεν επιτρέπεται να είναι κενό. Στο άλλο άκρο, ο μεγαλύτερος υπόχωρος είναι ολόκληρος ο αρχικός χώρος. Αν ο αρχικός χώρος είναι ο $\mathbf{R}^3$, μπορούμε εύκολα να περιγράψουμε τους δυνατούς υποχώρους: ο ίδιος ο $\mathbf{R}^3$, κάθε επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ή μόνη της η αρχή των αξόνων (το μηδενικό διάνυσμα).

Μερικά παραδείγματα θα μας βοηθήσουν να ξεκαθαρίσουμε τη διαφορά μεταξύ υποσυνόλου και υποχώρου. Το ερώτημα είναι αν μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα και να τα πολλαπλασιάζουμε με αριθμούς χωρίς να βρεθούμε εκτός του χώρου.

Παράδειγμα 1 Ας θεωρήσουμε όλα τα διανύσματα του $\mathbf{R}^2$ των οποίων οι συνιστώσες είναι θετικές ή μηδέν. Το συγκεκριμένο υποσύνολο είναι το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου x-y· οι συντεταγμένες ικανοποιούν τις $x \geq 0$ και $y \geq 0$. *Δεν είναι υπόχωρος*, μολονότι περιέχει το μηδέν και η πρόσθεση μας κρατά εντός του υποσυνόλου. Ο κανόνας (ii) παραβιάζεται, αφού αν ο αριθμός είναι το -1 και το διάνυσμα το $[1 \quad 1]$, το πολλαπλάσιο $cx = [-1 \quad -1]$ ανήκει στο τρίτο και όχι στο πρώτο τεταρτημόριο.

Αν μαζί με το πρώτο συμπεριλάβουμε και το τρίτο τεταρτημόριο, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν παρουσιάζει πρόβλημα. Κάθε πολλαπλάσιο cx παραμένει εντός του υποσυνόλου. Ωστόσο, σε αυτή την περίπτωση παραβιάζεται ο κανόνας (i), αφού η πρόσθεση $[1 \quad 2] + [-2 \quad -1]$ δίνει $[-1 \quad 1]$, το οποίο δεν ανήκει σε κανένα από τα δύο τεταρτημόρια. Ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει το πρώτο τεταρτημόριο είναι ολόκληρος ο χώρος $\mathbf{R}^2$.

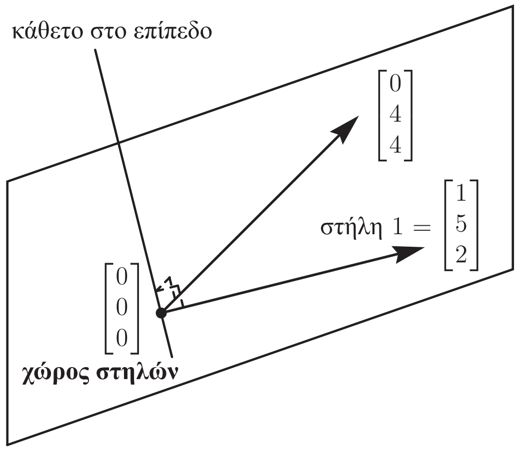
Παράδειγμα 2 Αν πάρουμε ως αφετηρία τον διανυσματικό χώρο των 3 επί 3 πινάκων, ένας δυνατός υπόχωρος είναι το σύνολο των *κάτω τριγωνικών πινάκων*. Ένας άλλος είναι το σύνολο των *συμμετρικών πινάκων*. Οι $A + B$ και cA είναι κάτω τριγωνικοί αν οι A και B είναι κάτω τριγωνικοί, και είναι συμμετρικοί αν οι A και B είναι συμμετρικοί. Ασφαλώς, ο μηδενικός πίνακας ανήκει και στους δύο υποχώρους.

Ο χώρος στηλών του A

Ερχόμαστε τώρα στα κομβικά παραδείγματα, τον **χώρο στηλών** και τον **μηδενόχωρο** ενός πίνακα A. ***Ο χώρος στηλών περιέχει όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των στηλών του A***. Είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$. Θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα ένα σύστημα $m = 3$ εξισώσεων με $n = 2$ αγνώστους:

$$\textbf{Ο συνδυασμός των στηλών ισούται με } \boldsymbol{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Αν $m > n$, έχουμε περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους —και *συνήθως δεν θα υπάρχει καμία λύση*. Το σύστημα θα έχει λύση μόνο για ένα πολύ «λεπτό» υποσύνολο των δυνατών b. Το λεπτό αυτό υποσύνολο μπορεί να περιγραφεί με έναν τόσο απλό τρόπο, που είναι εύκολο να μας διαφύγει.



Σχήμα 2.1 Ο χώρος στηλών $\boldsymbol{C}(A)$, ένα επίπεδο του τριδιάστατου χώρου.

> **2A** Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα b μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυασμός των στηλών του A. Σε αυτή την περίπτωση το b ανήκει στον χώρο στηλών.

Η παραπάνω περιγραφή παραπέμπει απλώς σε έναν διαφορετικό τρόπο γραφής του $Ax = b$, *κατά στήλες*:

$$\textbf{Συνδυασμός στηλών} \qquad u\begin{bmatrix}1\\5\\2\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}0\\4\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Πρόκειται για τις ίδιες τρεις εξισώσεις με δύο αγνώστους. Το πρόβλημα είναι πλέον το εξής: Να βρεθούν αριθμοί u και v με τους οποίους αν πολλαπλασιαστεί η πρώτη και η δεύτερη στήλη προκύπτει το b. Το σύστημα έχει λύση μόνο αν υπάρχουν τέτοιοι συντελεστές, και το διάνυσμα (u, v) είναι η λύση x.

Αυτό που προσπαθούμε να πούμε είναι ότι τα εφικτά δεξιά μέλη b είναι *όλοι οι συνδυασμοί των στηλών του* A. Ένα δυνατό δεξί μέλος είναι η πρώτη στήλη από μόνη της· τα βάρη είναι $u = 1$ και $v = 0$. Μια άλλη δυνατότητα είναι η δεύτερη στήλη: $u = 0$ και $v = 1$. Μια τρίτη είναι το δεξί μέλος $b = 0$. Για $u = 0$ και $v = 0$, το διάνυσμα $b = 0$ είναι πάντα εφικτό.

Μπορούμε να περιγράψουμε *όλους τους συνδυασμούς* των δύο στηλών γεωμετρικά: Το $Ax = b$ *λύνεται αν και μόνο αν το* b *περιέχεται στο* ***επίπεδο*** *που παράγουν τα δύο διανύσματα στήλες* (Σχήμα 2.1). Αυτό είναι το λεπτό σύνολο των εφικτών b. Αν το b δεν περιέχεται στο επίπεδο, δεν είναι συνδυασμός των δύο στηλών. Σε αυτή την περίπτωση το $Ax = b$ δεν έχει λύση.

Αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι το συγκεκριμένο επίπεδο δεν είναι απλώς ένα υποσύνολο του $\mathbf{R}^3$· είναι ένας υπόχωρος. Είναι ο ***χώρος στηλών*** του A, που αποτελείται από ***όλους τους συνδυασμούς των στηλών***. Συμβολίζεται με $\boldsymbol{C}(A)$. Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι, για έναν υπόχωρο του $\mathbf{R}^m$, οι συνθήκες (i) και (ii) ικανοποιούνται:

(i) Υποθέτουμε ότι τα b και b' περιέχονται στον χώρο στηλών, οπότε $Ax = b$ για κάποιο x και $Ax' = b'$ για κάποιο x'. Επομένως, $A(x + x') = b + b'$, οπότε το $b + b'$ είναι επίσης ένας συνδυασμός των στηλών. Ο χώρος στηλών όλων των εφικτών διανυσμάτων b είναι κλειστός ως προς την πρόσθεση.

(ii) Αν το b ανήκει στον χώρο στηλών $\boldsymbol{C}(A)$, το ίδιο ισχύει για κάθε πολλαπλάσιό του cb. Αν κάποιος συνδυασμός στηλών παράγει το b (φερ' ειπείν $Ax = b$), τότε πολλαπλασιάζοντας αυτόν τον συνδυασμό με το c παράγεται το cb. Με άλλα λόγια, $A(cx) = cb$.

Για άλλους πίνακες A, οι διαστάσεις του Σχήματος 2.1 μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές. Ο μικρότερος δυνατός χώρος στηλών (που περιέχει μόνο ένα διάνυσμα) προκύπτει από τον μηδενικό πίνακα $A = 0$. Ο μόνος συνδυασμός των στηλών είναι το $b = 0$. Στο άλλο άκρο, αν υποθέσουμε ότι ο A είναι ο 5 επί 5 ταυτοτικός πίνακας, τότε ο $\boldsymbol{C}(I)$ είναι ολόκληρος ο $\mathbf{R}^5$· οι πέντε στήλες του I μπορούν να συνδυαστούν ώστε να προκύψει οποιοδήποτε πενταδιάστατο διάνυσμα b. Αυτό δεν ισχύει μόνο για τον ταυτοτικό πίνακα. *Κάθε μη ιδιόμορφος 5 επί 5 πίνακας έχει ολόκληρο τον $\mathbf{R}^5$ ως χώρο στηλών του.* Για έναν τέτοιο πίνακα μπορούμε να λύσουμε το $Ax = b$ με απαλοιφή Gauss· υπάρχουν πέντε οδηγοί. Συνεπώς, για έναν μη ιδιόμορφο πίνακα, κάθε b ανήκει στο $\boldsymbol{C}(A)$.

Όπως βλέπετε, το Κεφάλαιο 1 περιέχεται σε αυτό το κεφάλαιο. Σε εκείνο μελετήσαμε τους n επί n πίνακες των οποίων ο χώρος στηλών είναι ο $\mathbf{R}^n$. Σε αυτό επιτρέπουμε ιδιόμορφους πίνακες και παραλληλόγραμμους πίνακες οποιουδήποτε σχήματος, οπότε ο $\boldsymbol{C}(A)$ μπορεί να βρίσκεται κάπου μεταξύ του μηδενικού χώρου και ολόκληρου του χώρου $\mathbf{R}^m$. Μαζί με τον ορθογώνιο του χώρο, μας δίνει τον έναν από τους δύο τρόπους με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε και να κατανοήσουμε το $Ax = b$.

Ο μηδενόχωρος του A

Ο δεύτερος τρόπος προσέγγισης του $Ax = b$ είναι «δυϊκός» του πρώτου. Μας ενδιαφέρουν όχι μόνο τα εφικτά δεξιά μέλη b, αλλά και οι λύσεις x μέσω των οποίων τα επιτυγχάνουμε. Αν το δεξί μέλος είναι το $b = 0$ έχουμε πάντα τη λύση $x = 0$, αλλά μπορεί να υπάρχουν άπειρες το πλήθος άλλες λύσεις. (Υπάρχουν πάντα, αν υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από εξισώσεις, $n > m$.) ***Οι λύσεις του $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο —τον μηδενόχωρο του $\boldsymbol{A}$***.

Ο ***μηδενόχωρος*** ενός πίνακα αποτελείται από όλα τα διανύσματα x για τα οποία $Ax = 0$. Συμβολίζεται με $\boldsymbol{N}(A)$. Είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$, ακριβώς όπως ο χώρος στηλών ήταν υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$.

Η συνθήκη (i) ισχύει: Αν $Ax = 0$ και $Ax' = 0$, τότε $A(x + x') = 0$. Η συνθήκη (ii) ισχύει και αυτή: Αν $Ax = 0$, τότε $A(cx) = 0$. Καμία από τις δύο συνθήκες δεν ισχύει αν το δεξί μέλος δεν είναι μηδέν! Μόνο οι λύσεις μιας *ομογενούς* εξίσωσης ($b = 0$) σχηματίζουν υπόχωρο. Μπορούμε εύκολα να βρούμε τον μηδενόχωρο του παραπάνω παραδείγματος· είναι ο μικρότερος δυνατός:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η πρώτη εξίσωση δίνει $u = 0$, ενώ η δεύτερη εξίσωση επιβάλλει να έχουμε $v = 0$. Ο μηδενόχωρος περιέχει μόνο το διάνυσμα $(0,0)$. Ο πίνακας αυτός έχει «ανεξάρτητες στήλες» —μια κομβική έννοια την οποία θα δούμε σύντομα.

Η κατάσταση αλλάζει αν μια τρίτη στήλη είναι συνδυασμός των δύο πρώτων:

$$\textbf{Μεγαλύτερος μηδενόχωρος} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο B έχει τον ίδιο χώρο στηλών με τον A. Η νέα στήλη περιέχεται στο επίπεδο του Σχήματος 2.1· είναι το άθροισμα των δύο διανυσμάτων στηλών με τις οποίες ξεκινήσαμε. Αλλά ο μηδενόχωρος του B περιέχει το διάνυσμα $(1,1,-1)$ και περιέχει αυτομάτως και κάθε πολλαπλάσιο $(c,c,-c)$:

$$\textbf{Ο μηδενόχωρος είναι μια ευθεία} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ο μηδενόχωρος του B είναι η ευθεία όλων των σημείων $x=c$, $y=c$, $z=-c$. (Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η οποία πρέπει να ανήκει σε κάθε υπόχωρο.) Θέλουμε να είμαστε σε θέση, για οποιοδήποτε σύστημα $Ax=b$, να βρίσκουμε τους $\boldsymbol{C}(A)$ και $\boldsymbol{N}(A)$: όλα τα εφικτά δεξιά μέλη b και όλες τις λύσεις του $Ax=0$.

Τα διανύσματα b ανήκουν στον χώρο στηλών ενώ τα διανύσματα x ανήκουν στον μηδενόχωρο. Θα υπολογίσουμε τη διάσταση καθενός από αυτούς τους υποχώρους και ένα βολικό σύνολο διανυσμάτων για να τους παραγάγουμε. Ελπίζουμε ότι τελικά θα καταφέρουμε να κατανοήσουμε και τους *τέσσερις* υποχώρους που σχετίζονται στενά μεταξύ τους και με τον A —τον χώρο στηλών του A, τον μηδενόχωρο του A και τους δύο ορθογώνιους χώρους τους.

Προβλήματα 2.1

1. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο του επίπεδου x-y (του $\mathbf{R}^2$) που να είναι

(α) κλειστό ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση διανυσμάτων, αλλά όχι ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

(β) κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό αλλά όχι ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων.

Υπόδειξη: Ξεκινώντας με κάποια u και v, προσθέστε και αφαιρέστε για το (α). Δοκιμάστε τα cu και cv για το (β).

2. Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbf{R}^3$ είναι υπόχωροι;

(α) Το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1,b_2,b_3) με πρώτη συνιστώσα $b_1=0$.

(β) Το επίπεδο των διανυσμάτων b με $b_1=1$.

(γ) Τα διανύσματα b με $b_2b_3=0$ (η ένωση δύο υποχώρων, του επιπέδου $b_2=0$ και του επιπέδου $b_3=0$).

(δ) Όλοι οι συνδυασμοί δύο δεδομένων διανυσμάτων $(1,1,0)$ και $(2,0,1)$.

(ε) Το επίπεδο των διανυσμάτων (b_1,b_2,b_3) που ικανοποιούν την $b_3-b_2+3b_1=0$.

3. Περιγράψτε τον χώρο στηλών και τον μηδενόχωρο των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Ποιος είναι ο μικρότερος υπόχωρος των 3 επί 3 πινάκων που περιέχει όλους τους συμμετρικούς πίνακες *και* όλους τους κάτω τριγωνικούς πίνακες; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος που περιέχεται και στους δύο αυτούς υποχώρους;

5. Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός πρέπει να ικανοποιούν τις εξής οκτώ ιδιότητες:

1. $x + y = y + x$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. Υπάρχει ένα μοναδικό «μηδενικό διάνυσμα» τέτοιο ώστε $x + 0 = x$ για κάθε x.
4. Για κάθε x υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα $-x$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = 0$.
5. $1x = x$.
6. $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$.
7. $c(x + y) = cx + cy$.
8. $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$.

(α) Υποθέστε ότι η πρόσθεση στον $\mathbf{R}^2$ προσθέτει ένα επιπλέον 1 σε κάθε συνιστώσα, έτσι ώστε το $(3, 1) + (5, 0)$ να ισούται με $(9, 2)$ αντί για $(8, 1)$. Αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν αλλάξει, ποιες ιδιότητες δεν ισχύουν;

(β) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών, αν ορίσουμε τους $x + y$ και cx να ισούται με τους συνήθεις xy και x^c αντίστοιχα, είναι διανυσματικός χώρος. Ποιο είναι το «μηδενικό διάνυσμα»;

(γ) Υποθέστε ότι το $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ ορίζεται ως το διάνυσμα $(x_1 + y_2, x_2 + y_1)$. Αν ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι ο συνήθης $cx = (cx_1, cx_2)$, ποιες από τις οκτώ ιδιότητες δεν ικανοποιούνται;

6. Έστω $\mathbf{P}$ το επίπεδο του τριδιάστατου χώρου με εξίσωση $x + 2y + z = 6$. Ποια είναι η εξίσωση του επιπέδου $\mathbf{P}_0$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο $\mathbf{P}$; Είναι οι $\mathbf{P}$ και $\mathbf{P}_0$ υπόχωροι του $\mathbf{R}^3$;

7. Ποια από τα παρακάτω είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^\infty$;

(α) Όλες οι ακολουθίες σαν την $(1, 0, 1, 0, \dots)$ που περιλαμβάνουν άπειρα το πλήθος μηδενικά.

(β) Όλες οι ακολουθίες $(x_1, x_2, \dots)$ με $x_j = 0$ από κάποιο σημείο και έπειτα.

(γ) Όλες οι φθίνουσες ακολουθίες: $x_{j+1} \le x_j$ για κάθε j.

(δ) Όλες οι συγκλίνουσες ακολουθίες: τα x_j έχουν κάποιο όριο καθώς $j \to \infty$.

(ε) Όλες οι αριθμητικές πρόοδοι: το $x_{j+1} - x_j$ είναι ίδιο για κάθε j.

(στ) Όλες οι γεωμετρικές πρόοδοι $(x_1, kx_1, k^2x_1, \dots)$ για οποιαδήποτε k και x_1.

8. Ποιες από τις παρακάτω περιγραφές είναι σωστές; Οι λύσεις x του

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν

(α) ένα επίπεδο.
(β) μια ευθεία.
(γ) ένα σημείο.
(δ) έναν υπόχωρο.
(ε) τον μηδενόχωρο του A.
(στ) τον χώρο στηλών του A.

9. Δείξτε ότι το σύνολο των μη ιδιόμορφων 2 επί 2 πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των *ιδιόμορφων* 2 επί 2 πινάκων δεν είναι διανυσματικός χώρος.

10. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ είναι ένα «διάνυσμα» του χώρου $\mathbf{M}$ όλων των 2 επί 2 πινάκων. Γράψτε το μηδενικό διάνυσμα αυτού του χώρου, το διάνυσμα $\frac{1}{2}A$ και το διάνυσμα $-A$. Ποιοι πίνακες ανήκουν στον μικρότερο υπόχωρο που περιέχει τον A;

11. (α) Περιγράψτε έναν υπόχωρο του $\mathbf{M}$ που να περιέχει τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ αλλά όχι τον $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
(β) Αν ένας υπόχωρος του $\mathbf{M}$ περιέχει τους A και B, πρέπει να περιέχει τον I;
(γ) Περιγράψτε έναν υπόχωρο του $\mathbf{M}$ που να μην περιέχει κανέναν μη μηδενικό διαγώνιο πίνακα.

12. Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 5x$ είναι «διανύσματα» του διανυσματικού χώρου $\mathbf{F}$ όλων των πραγματικών συναρτήσεων. Ο συνδυασμός $3f(x) - 4g(x)$ είναι η συνάρτηση $h(x) =$ ______. Ποια ιδιότητα παραβιάζεται αν ο πολλαπλασιασμός της $f(x)$ με το c δίνει τη συνάρτηση $f(cx)$;

13. Αν το άθροισμα των «διανυσμάτων» $f(x)$ και $g(x)$ του $\mathbf{F}$ ορίζεται να είναι το $f(g(x))$, τότε το «μηδενικό διάνυσμα» είναι το $g(x) = x$. Κρατώντας τον συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό $cf(x)$, βρείτε δύο ιδιότητες που παραβιάζονται.

14. Περιγράψτε τον μικρότερο υπόχωρο του χώρου των 2 επί 2 πινάκων $\mathbf{M}$ που περιέχει

(α) τους $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (β) τους $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(γ) τον $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. (δ) τους $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. Έστω $\mathbf{P}$ το επίπεδο του $\mathbf{R}^3$ με εξίσωση $x + y - 2z = 4$. Η αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο $\mathbf{P}$! Βρείτε δύο διανύσματα του $\mathbf{P}$ και επιβεβαιώστε ότι το άθροισμά τους δεν ανήκει στο $\mathbf{P}$.

16. Το $\mathbf{P}_0$ είναι το επίπεδο που διέρχεται από το $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλο στο επίπεδο $\mathbf{P}$ του Προβλήματος 15. Ποια είναι η εξίσωση του $\mathbf{P}_0$; Βρείτε δύο διανύσματα του $\mathbf{P}_0$ και επιβεβαιώστε ότι το άθροισμά τους ανήκει στο $\mathbf{P}_0$.

17. Οι τέσσερις τύποι υποχώρων του $\mathbf{R}^3$ είναι τα επίπεδα, οι ευθείες, ο ίδιος ο $\mathbf{R}^3$ και ο $\mathbf{Z}$ που περιέχει μόνο το $(0, 0, 0)$.

(α) Περιγράψτε τους τρεις τύπους υποχώρων του $\mathbf{R}^2$.
(β) Περιγράψτε τους πέντε τύπους υποχώρων του $\mathbf{R}^4$.

18. (α) Η τομή δύο επιπέδων που διέρχονται από το $(0,0,0)$ ενδέχεται να είναι ______ αλλά μπορεί να είναι ______. Δεν μπορεί να είναι το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{Z}$!
(β) Η τομή ενός επιπέδου που διέρχεται από το $(0,0,0)$ με μια ευθεία που διέρχεται από το $(0,0,0)$ ενδέχεται να είναι ______ αλλά μπορεί να είναι ______.
(γ) Αν $\mathbf{S}$ και $\mathbf{T}$ είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$, η τομή τους $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ (τα διανύσματα που ανήκουν και στους δύο υποχώρους) είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^5$. *Ελέγξτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $x+y$ και cx.*

19. Έστω $\mathbf{P}$ ένα επίπεδο που διέρχεται από το $(0,0,0)$ και $\mathbf{L}$ μια ευθεία που διέρχεται από το $(0,0,0)$. Ο μικρότερος διανυσματικός χώρος που περιέχει και το $\mathbf{P}$ και την $\mathbf{L}$ είναι είτε ______ είτε ______.

20. Σωστό ή λάθος, αν $\mathbf{M}$ είναι το σύνολο όλων των 3 επί 3 πινάκων (ελέγξτε την πρόσθεση με ένα παράδειγμα);
(α) Οι αντισυμμετρικοί πίνακες του $\mathbf{M}$ (με $A^{\mathrm{T}} = -A$) σχηματίζουν έναν υπόχωρο.
(β) Οι μη συμμετρικοί πίνακες του $\mathbf{M}$ (με $A^{\mathrm{T}} \neq A$) σχηματίζουν έναν υπόχωρο.
(γ) Οι πίνακες που έχουν το $(1,1,1)$ στους μηδενόχωρούς τους σχηματίζουν έναν υπόχωρο.

Τα Προβλήματα 21–30 αφορούν τους χώρους στηλών $C(A)$ και την εξίσωση $Ax = b$.

21. Περιγράψτε τους χώρους στηλών (ευθείες ή επίπεδα) των εξής πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

22. Για ποια δεξιά μέλη έχουν λύση τα παρακάτω συστήματα (βρείτε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3);

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. (β) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

23. Αν προσθέσουμε τη γραμμή 1 του A στη γραμμή 2 προκύπτει ο B. Αν προσθέσουμε τη στήλη 1 στη στήλη 2 προκύπτει ο C. Ένας συνδυασμός των στηλών του ______ είναι επίσης ένας συνδυασμός των στηλών του A. Ποιοι δύο πίνακες έχουν την ίδια στήλη ______;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

24. Για ποια διανύσματα (b_1, b_2, b_3) έχουν λύση τα παρακάτω συστήματα;

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

25. (Προτεινόμενο) Αν προσθέτουμε μια επιπλέον στήλη b σε έναν πίνακα A, τότε ο χώρος στηλών μεγαλώνει εκτός αν ______. Δώστε ένα παράδειγμα όπου ο χώρος στηλών μεγαλώνει και ένα παράδειγμα όπου δεν μεγαλώνει. Γιατί το $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν ο χώρος στηλών *δεν* μεγαλώνει με τη συμπερίληψη του b;

26. Οι στήλες του AB είναι συνδυασμοί των στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι *ο χώρος στηλών του AB περιέχεται στον* (πιθανώς ισούται με τον) *χώρο στηλών του A*. Δώστε ένα παράδειγμα όπου οι χώροι στηλών των A και AB δεν είναι ίσοι.

27. Αν A είναι ένας 8 επί 8 αντιστρέψιμος πίνακας, τότε ο χώρος στηλών του είναι ______. Γιατί;

28. Σωστό ή λάθος (με αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος);

(α) Τα διανύσματα b που δεν ανήκουν στον χώρο στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ σχηματίζουν έναν υπόχωρο.
(β) Αν ο $\boldsymbol{C}(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε ο A είναι ο μηδενικός πίνακας.
(γ) Ο χώρος στηλών του $2A$ ισούται με τον χώρο στηλών του A.
(δ) Ο χώρος στηλών του $A - I$ ισούται με τον χώρο στηλών του A.

29. Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(1, 0, 1)$ αλλά όχι το $(1, 1, 1)$. Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να είναι μόνο μια ευθεία.

30. Αν το 9 επί 12 σύστημα $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b, τότε $\boldsymbol{C}(A) =$ ______.

31. Γιατί δεν είναι ο $\mathbf{R}^2$ υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$;

2.2 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ $Ax = 0$ ΚΑΙ $Ax = b$

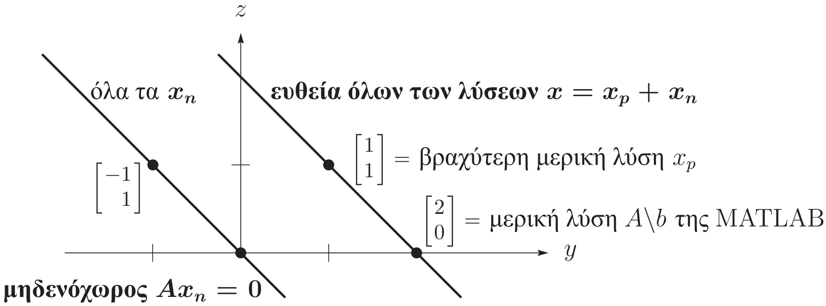
Στο Κεφάλαιο 1 επικεντρωθήκαμε στους τετραγωνικούς αντιστρέψιμους πίνακες. Το $Ax = b$ είχε μία λύση, η οποία ήταν η $x = A^{-1}b$ και την οποία βρήκαμε με τη μέθοδο της απαλοιφής (όχι υπολογίζοντας τον A^{-1}). Στην περίπτωση των παραλληλόγραμμων πινάκων υπάρχουν νέα ενδεχόμενα —ο U μπορεί να μην διαθέτει πλήρες σύνολο οδηγών. Σε αυτή ενότητα θα προχωρήσουμε από τον U προς μια ανηγμένη μορφή R —**τον απλούστερο πίνακα που μπορεί να προκύψει από την απαλοιφή**. Ο R αποκαλύπτει αμέσως όλες τις λύσεις.

Ο μηδενόχωρος ενός αντιστρέψιμου πίνακα περιέχει μόνο το $x = 0$ (πολλαπλασιάζουμε το $Ax = 0$ με τον A^{-1}). Ο χώρος στηλών είναι ολόκληρος ο χώρος (το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b). Τα νέα ερωτήματα προκύπτουν όταν ο μηδενόχωρος *δεν περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα* και/ή ο χώρος στηλών *δεν περιέχει όλα τα διανύσματα*:

1. Κάθε διάνυσμα x_n του μηδενόχωρου μπορεί να προστεθεί σε μια μερική λύση x_p. Οι λύσεις όλων των γραμμικών εξισώσεων έχουν τη μορφή $x = x_p + x_n$:

Πλήρης λύση **Τα $\boldsymbol{Ax_p = b}$ και $\boldsymbol{Ax_n = 0}$ παράγουν το $\boldsymbol{A(x_p + x_n) = b}$.**

2. Όταν ο χώρος στηλών δεν περιέχει κάθε b του $\mathbf{R}^m$, χρειαζόμαστε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση.



Σχήμα 2.2 Οι παράλληλες ευθείες των λύσεων των $Ax_n = 0$ και $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$.

Ένα 3 επί 4 παράδειγμα έχει καλό μέγεθος. Θα γράψουμε όλες τις λύσεις του $Ax = 0$ και θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε να ανήκει στον χώρο στηλών (ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση). Για το 1 επί 1 σύστημα $0x = b$, μια εξίσωση με έναν άγνωστο, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα:

Το $0x = b$ *δεν έχει λύση* εκτός αν $b = 0$. Ο χώρος στηλών του 1 επί 1 μηδενικού πίνακα περιέχει μόνο το $b = 0$.

Το $0x = 0$ έχει *άπειρες λύσεις*. Ο μηδενόχωρος περιέχει *όλα* τα x. Μια μερική λύση είναι το $x_p = 0$, ενώ η πλήρης λύση είναι το $x = x_p + x_n = 0 + (\text{οποιοδήποτε } x)$.

Απλό, ομολογουμένως. Αν προχωρήσουμε στα 2 επί 2 συστήματα, τα πράγματα γίνονται πιο ενδιαφέροντα. Ο πίνακας $\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{2}\end{bmatrix}$ δεν είναι αντιστρέψιμος: οι $y + z = b_1$ και $2y + 2z = b_2$ συνήθως δεν έχουν λύση.

Δεν υπάρχει λύση εκτός αν $b_2 = 2b_1$. Ο χώρος στηλών του A περιέχει μόνο αυτά τα b, τα πολλαπλάσια του $(1, 2)$.

Αν $b_2 = 2b_1$, υπάρχουν ***άπειρες λύσεις***. Μια μερική λύση των $y + z = 2$ και $2y + 2z = 4$ είναι το $x_p = (1, 1)$. Ο μηδενόχωρος του A στο Σχήμα 2.2 περιέχει το $(-1, 1)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του $x_n = (-c, c)$:

Πλήρης λύση Η λύση του $\begin{aligned} y + z &= 2\\ 2y + 2z &= 4\end{aligned}$ είναι η $x_p + x_n = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-c\\1+c\end{bmatrix}$.

Κλιμακωτή μορφή U και ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R

Θα ξεκινήσουμε απλοποιώντας τον παρακάτω 3 επί 4 πίνακα, πρώτα στη μορφή U και κατόπιν στη μορφή R:

$$\textbf{Βασικό παράδειγμα} \qquad A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 9 & 7\\ -1 & -3 & 3 & 4\end{bmatrix}.$$

$$U = \begin{bmatrix} \bullet & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \bullet & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{1} & * & \mathbf{0} & * & * & * & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & * & * & * & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 2.3 Τα στοιχεία ενός 5 επί 8 κλιμακωτού πίνακα U και η ανηγμένη μορφή του, R.

Ο οδηγός $a_{11} = 1$ είναι μη μηδενικός. Με τις συνήθεις στοιχειώδεις πράξεις θα προκύψουν μηδενικά στην πρώτη στήλη κάτω από αυτόν τον οδηγό. Τα άσχημα νέα εμφανίζονται στη στήλη 2:

$$\textbf{Η στήλη 2 δεν έχει οδηγό} \qquad A \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ο υποψήφιος δεύτερος οδηγός έγινε μηδέν: αυτό *δεν είναι αποδεκτό*. Κοιτάμε κάτω από αυτό το μηδέν για κάποιο μη μηδενικό στοιχείο —σκοπεύοντας να πραγματοποιήσουμε αντιμετάθεση γραμμών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση *το από κάτω στοιχείο είναι και αυτό μηδέν*. Αν ο A ήταν τετραγωνικός, αυτό θα σήμαινε ότι ο πίνακας είναι ιδιόμορφος. Στην περίπτωση των παραλληλόγραμμων πινάκων πρέπει να αναμένουμε ούτως ή άλλως προβλήματα, οπότε δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να *προχωρήσουμε στην επόμενη στήλη*, όπου το στοιχείο οδηγός είναι το 3. Αφαιρώντας δύο επί τη δεύτερη γραμμή από την τρίτη, καταλήγουμε στον U:

$$\textbf{Κλιμακωτός πίνακας } U \qquad U = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν θέλουμε να είμαστε ακριβείς, προχωράμε στην τέταρτη στήλη. Στην τρίτη θέση οδηγού υπάρχει μηδέν, οπότε δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτα. Ο U είναι άνω τριγωνικός, αλλά οι οδηγοί του δεν βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο. Τα μη μηδενικά στοιχεία του U «σχηματίζουν σκάλα», έχουν δηλαδή ***κλιμακωτή μορφή***. Για την 5 επί 8 περίπτωση του Σχήματος 2.3, τα στοιχεία που σημειώνονται με αστερίσκο μπορεί να είναι ή να μην είναι μηδέν.

Μπορούμε να φτάσουμε πάντα σε αυτή την κλιμακωτή μορφή U, όπου κάτω από τους οδηγούς υπάρχουν μηδενικά:

1. Οι οδηγοί είναι τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία των αντίστοιχων γραμμών.
2. Κάτω από κάθε οδηγό υπάρχει μια στήλη μηδενικών, που προκύπτει με απαλοιφή.
3. Κάθε οδηγός βρίσκεται δεξιότερα από τον οδηγό της από πάνω γραμμής. Αυτό δίνει στο σχήμα σκάλας. Οι μηδενικές γραμμές εμφανίζονται τελευταίες.

Αφού ξεκινήσαμε από τον A και καταλήξαμε στον U, είναι βέβαιο ότι ο αναγνώστης θα αναρωτηθεί: Ισχύει ότι $A = LU$ όπως προηγουμένως; Δεν υπάρχει λόγος να μην ισχύει, αφού τα βήματα της απαλοιφής δεν άλλαξαν. Και σε αυτή την περίπτωση, κάθε βήμα αφαιρεί ένα πολλαπλάσιο μιας γραμμής από μια γραμμή που βρίσκεται από κάτω της. Το αντίστροφο κάθε βήματος προσθέτει ξανά το πολλαπλάσιο που αφαιρέθηκε. Τα αντίστροφα βήματα εκτελούνται με τη σωστή σειρά, ώστε οι πολλαπλασιαστές να τοποθετηθούν απευθείας στον L:

$$\textbf{Κάτω τριγωνικός πίνακας} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \quad A = LU.$$

Προσέξτε ότι ο L είναι τετραγωνικός. Έχει το ίδιο πλήθος γραμμών με τους A και U.

Η μόνη πράξη που δεν χρειαστήκαμε στο παράδειγμά μας, αλλά που εν γένει χρειάζεται, είναι η αντιμετάθεση γραμμών μέσω ενός πίνακα μετάθεσης P. Αφού προχωράμε στην επόμενη στήλη όταν δεν υπάρχουν διαθέσιμοι οδηγοί, δεν υπάρχει ανάγκη να θεωρήσουμε ότι ο A είναι μη ιδιόμορφος. Ακολουθεί η περιγραφή της $PA = LU$ για όλους τους πίνακες:

2B Για οποιονδήποτε m επί n πίνακα A, υπάρχει ένας πίνακας μετάθεσης P, ένας κάτω τριγωνικός πίνακας L με μοναδιαία διαγώνιο και ένας m επί n κλιμακωτός πίνακας U, τέτοιοι ώστε $PA = LU$.

Ακολουθεί ο R. Μπορούμε να προχωρήσουμε πέρα από τον U, ώστε να κάνουμε τον πίνακα ακόμα απλούστερο. Διαιρούμε τη δεύτερη γραμμή με τον οδηγό της, το 3, έτσι ώστε ***όλοι οι οδηγοί να είναι* 1**. Κατόπιν χρησιμοποιούμε τη γραμμή οδηγό για να παραγάγουμε ένα ***μηδενικό πάνω από τον οδηγό***. Αυτή τη φορά αφαιρούμε μια γραμμή από μια *γραμμή που βρίσκεται πιο πάνω*. Το τελικό αποτέλεσμα (η καλύτερη μορφή στην οποία μπορούμε να καταλήξουμε) είναι η ***ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R***:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = R.$$

Ο πίνακας R είναι το τελικό αποτέλεσμα της εφαρμογής της απαλοιφής στον A. Στη MATLAB θα χρησιμοποιούσαμε την εντολή R = rref(A). Ασφαλώς, η rref(R) θα μας έδινε ξανά τον R!

Ποια είναι η ανηγμένη κλιμακωτή γραμμή ενός τετραγωνικού αντιστρέψιμου πίνακα; Σε αυτή την περίπτωση ο R είναι ο *ταυτοτικός πίνακας*. Υπάρχει πλήρες σύνολο οδηγών, όλοι ισούνται με 1, και από πάνω και από κάτω υπάρχουν μηδενικά. Άρα, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος, rref(A) = I.

Στο Σχήμα 2.3 παρουσιάζεται η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R ενός 5 επί 8 πίνακα με τέσσερις οδηγούς. **Περιέχει και αυτός έναν ταυτοτικό πίνακα, στις τέσσερις γραμμές οδηγούς και τις τέσσερις στήλες οδηγούς**. Από τον R θα βρούμε γρήγορα τον μηδενόχωρο του A. Το $Rx = 0$ έχει τις ίδιες λύσεις με τα $Ux = 0$ και $Ax = 0$.

Οδηγικές μεταβλητές και ελεύθερες μεταβλητές

Στόχος μας είναι να βρούμε κατευθείαν όλες τις λύσεις του $Rx = 0$. Οι οδηγοί παίζουν κομβικό ρόλο:

Μηδενόχωρος του $\boldsymbol{R}$
(οι στήλες οδηγοί γράφονται με έντονα στοιχεία)

$$Rx = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ v \\ \boldsymbol{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Οι άγνωστοι u, v, w, y χωρίζονται σε δύο ομάδες. Η μία ομάδα περιέχει τις ***οδηγικές μεταβλητές***, αυτές που αντιστοιχούν στις ***στήλες με οδηγούς***. Οι οδηγοί περιέχονται στην πρώτη και την τρίτη στήλη, άρα οι οδηγικές μεταβλητές είναι οι $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{w}$. Η άλλη ομάδα αποτελείται από τις ***ελεύθερες μεταβλητές***, οι οποίες αντιστοιχούν στις ***στήλες χωρίς οδηγούς***. Αυτές είναι η δεύτερη και η τέταρτη στήλη, άρα οι v και y είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Για να βρούμε την πλέον γενική λύση του $Rx = 0$ (ή, ισοδύναμα, του $Ax = 0$) δίνουμε αυθαίρετες τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι καλούμε αυτές τις τιμές απλά v και y. Οι οδηγικές μεταβλητές καθορίζονται πλήρως μέσω των v και y:

$$\boldsymbol{Rx = 0} \quad \begin{array}{lrcr} \text{η} & \boldsymbol{u} + 3v - y = 0 & \text{δίνει} & \boldsymbol{u} = -3v + y \\ \text{η} & \boldsymbol{w} + y = 0 & \text{δίνει} & \boldsymbol{w} = \quad\; - y \end{array} \tag{1}$$

Υπάρχει μια «διπλή απειρία» λύσεων· οι v και y είναι ελεύθερες και ανεξάρτητες. Η πλήρης λύση είναι ένας συνδυασμός δύο **ειδικών λύσεων**:

Ο μηδενόχωρος περιέχει όλους τους συνδυασμούς των ειδικών λύσεων

$$x = \begin{bmatrix} -3v + y \\ v \\ -y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Κοιτάξτε ξανά αυτή την πλήρη λύση των $Rx = 0$ και $Ax = 0$. Η ειδική λύση $(-3, 1, 0, 0)$ έχει ελεύθερες μεταβλητές $v = 1$, $y = 0$. Η άλλη ειδική λύση $(1, 0, -1, 1)$ έχει $v = 0$ και $y = 1$. *Όλες οι λύσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των δύο.* Ο καλύτερος τρόπος να βρούμε όλες τις λύσεις του $Ax = 0$ είναι από τις ειδικές λύσεις:

1. Μόλις φτάσουμε στο $Rx = 0$, αναγνωρίζουμε τις οδηγικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές.
2. Δίνουμε σε μία ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 1, εξισώνουμε τις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές με το 0 και λύνουμε το $Rx = 0$ ως προς τις οδηγικές μεταβλητές. Το x που προκύπτει είναι μια ειδική λύση.
3. Κάθε ελεύθερη μεταβλητή παράγει τη δική της «ειδική λύση» σύμφωνα με το βήμα 2. Οι συνδυασμοί των ειδικών λύσεων σχηματίζουν τον μηδενόχωρο —όλες τις λύσεις του $Ax = 0$.

Εντός του τετραδιάστατου χώρου όλων των δυνατών διανυσμάτων x, οι λύσεις του $Ax = 0$ σχηματίζουν έναν ***διδιάστατο υπόχωρο*** —τον μηδενόχωρο του A. Στο παράδειγμα, ο $\boldsymbol{N}(A)$ παράγεται από τα ειδικά διανύσματα $(-3, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, -1, 1)$. Οι συνδυασμοί αυτών των δύο διανυσμάτων παράγουν ολόκληρο τον μηδενόχωρο.

Ακολουθεί ένα μικρό τέχνασμα. Οι ειδικές λύσεις προκύπτουν εξαιρετικά εύκολα από τον R. Οι αριθμοί $3, 0, -1$ και 1 βρίσκονται στις «στήλες μη οδηγούς» του R. **Αντιστρέφοντας τα πρόσημά τους, βρίσκουμε τις τιμές των οδηγικών μεταβλητών** (των μη ελεύθερων) **στις ειδικές λύσεις**. Αν τοποθετήσουμε τις δύο ειδικές λύσεις της εξίσωσης (2) σε έναν πίνακα μηδενόχωρου N, προκύπτει η εξής κομψή δομή:

Πίνακας μηδενόχωρου (οι στήλες είναι ειδικές λύσεις)

$$N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{μη ελεύθερη} \\ \text{ελεύθερη} \\ \text{μη ελεύθερη} \\ \text{ελεύθερη} \end{array}$$

Οι ελεύθερες μεταβλητές έχουν τιμές 1 και 0. Όταν οι ελεύθερες στήλες μετακινήθηκαν στο δεξί μέλος της εξίσωσης (2), οι συντελεστές τους, 3, 0, -1 και 1, άλλαξαν πρόσημο. Έτσι προέκυψαν οι τιμές των οδηγικών μεταβλητών στις ειδικές λύσεις (τις στήλες του N).

Αυτό είναι το κατάλληλο σημείο να αναφέρουμε ένα εξαιρετικά σημαντικό θεώρημα.

Ας υποθέσουμε ότι ένας πίνακας έχει περισσότερες στήλες από γραμμές, $n > m$. Αφού m γραμμές μπορούν να περιέχουν το πολύ m οδηγούς, ***πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον*** $\boldsymbol{n - m}$ ***ελεύθερες μεταβλητές***. Θα υπάρχουν ακόμη *περισσότερες* ελεύθερες μεταβλητές αν κάποιες γραμμές του R μηδενιστούν· σε κάθε περίπτωση όμως, τουλάχιστον μια μεταβλητή πρέπει να είναι ελεύθερη. Σε αυτή την ελεύθερη μεταβλητή μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή, με αποτέλεσμα το εξής συμπέρασμα:

2Γ Αν το $Ax = 0$ έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις ($n > m$), έχει τουλάχιστον μία ειδική λύση: Υπάρχουν περισσότερες λύσεις από την τετριμμένη $x = 0$.

Πρέπει να υπάρχουν άπειρες λύσεις, αφού κάθε πολλαπλάσιο cx θα ικανοποιεί επίσης την $A(cx) = 0$. Ο μηδενόχωρος περιέχει την ευθεία που διέρχεται από το x. Και αν υπάρχουν επιπλέον ελεύθερες μεταβλητές, ο μηδενόχωρος γίνεται κάτι περισσότερο από μια ευθεία του n-διάστατου χώρου. *Ο μηδενόχωρος έχει την ίδια «διάσταση» με το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών και ειδικών λύσεων.*

Θα ορίσουμε ακριβέστερα την κομβική αυτή έννοια —τη ***διάσταση*** ενός υποχώρου— στην επόμενη ενότητα. Για τον μηδενόχωρο μετράμε τις ελεύθερες μεταβλητές. Για τον χώρο στηλών μετράμε τις οδηγικές μεταβλητές!

Επίλυση των $Ax = b$, $Ux = c$ και $Rx = d$

Η περίπτωση $b \neq 0$ είναι αρκετά διαφορετική από την $b = 0$. Οι γραμμοπράξεις που εφαρμόζονται στον A πρέπει να εφαρμοστούν και στο δεξί μέλος (το b). Θα ξεκινήσουμε την προσπάθεια εύρεσης της συνθήκης επιλυσιμότητας —πότε ανήκει το b στον χώρο στηλών— χρησιμοποιώντας γράμματα (b_1, b_2, b_3). Κατόπιν, θα επιλέξουμε $b = (1, 5, 5)$ και θα βρούμε όλες τις λύσεις x.

Για το αρχικό παράδειγμα $Ax = b = (b_1, b_2, b_3)$, εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη τις πράξεις που οδήγησαν από τον A στον U. Το αποτέλεσμα είναι ένα άνω τριγωνικό σύστημα $Ux = c$:

$$\boldsymbol{Ux = c} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Το διάνυσμα c του δεξιού μέλους, το οποίο εμφανίστηκε μετά την εφαρμογή των βημάτων της ορθόδρομης απαλοιφής, είναι απλώς το $L^{-1}b$, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ξεκινάμε τώρα με το $Ux = c$.

Δεν είναι σίγουρο ότι αυτές οι εξισώσεις έχουν λύση. Η ικανοποίηση της τρίτης εξίσωσης είναι πολύ αμφίβολη, διότι το αριστερό της μέλος είναι μηδέν. ***Οι εξισώσεις είναι ασυμβίβαστες, εκτός αν*** $\boldsymbol{b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0}$. Μολονότι υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι από εξισώσεις, μπορεί να μην υπάρχει λύση. Γνωρίζουμε έναν άλλο τρόπο να απαντήσουμε στο ίδιο ερώτημα: το $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το b ανήκει στον χώρο στηλών του A. Ο υπόχωρος αυτός προκύπτει από τις τέσσερις στήλες του A (όχι του U!):

$$\textbf{Οι στήλες του } \boldsymbol{A} \textbf{ «παράγουν» τον χώρο στηλών} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Μολονότι υπάρχουν τέσσερα διανύσματα, οι συνδυασμοί τους καλύπτουν μόνο ένα επίπεδο του τριδιάστατου χώρου. Η στήλη 2 ισούται με τρία επί τη στήλη 1. Η τέταρτη στήλη ισούται με την τρίτη μείον την πρώτη. *Οι εξαρτημένες αυτές στήλες, η δεύτερη και η τέταρτη, είναι αυτές που δεν έχουν οδηγούς.*

Ο χώρος στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ μπορεί να περιγραφεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Από τη μία, είναι *το επίπεδο που παράγεται από τις στήλες 1 και 3*. Οι υπόλοιπες στήλες ανήκουν σε αυτό το επίπεδο και δεν συνεισφέρουν τίποτα νέο. Ισοδύναμα, είναι το επίπεδο όλων των διανυσμάτων b που ικανοποιούν την $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$· αυτός είναι ο περιορισμός που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το σύστημα να έχει λύση. ***Αφού όλες οι στήλες ικανοποιούν αυτό τον περιορισμό, πρέπει να τον ικανοποιεί και το b!*** Γεωμετρικά, θα δούμε ότι το διάνυσμα $(5, -2, 1)$ είναι ορθογώνιο σε κάθε στήλη.

Αν το b ανήκει στον χώρο στηλών, μπορούμε εύκολα να βρούμε τις λύσεις του $Ax = b$. Η τελευταία εξίσωση του $Ux = c$ είναι η $0 = 0$. Στις ελεύθερες μεταβλητές v και y μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή, όπως προηγουμένως. Οι οδηγικές μεταβλητές u και w προκύπτουν πάλι με ανάδρομη αντικατάσταση. Για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα με $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, επιλέγουμε $b = (1, 5, 5)$:

$$\boldsymbol{Ax = b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Η ορθόδρομη απαλοιφή παράγει τον U στα αριστερά και το c στα δεξιά:

$$\boldsymbol{Ux = c} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η $0 = 0$, όπως ήταν αναμενόμενο. Η ανάδρομη αντικατάσταση δίνει

$$\begin{aligned} 3w + 3y &= 3 \qquad \text{ή} \qquad w = 1 - y \\ u + 3v + 3w + 2y &= 1 \qquad \text{ή} \qquad u = -2 - 3v + y. \end{aligned}$$

Υπάρχει πάλι μια διπλή απειρία λύσεων: οι v και y είναι ελεύθερες, ενώ οι u και w δεν είναι:

Πλήρης λύση
$\boldsymbol{x = x_p + x_n}$

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Αυτές είναι όλες οι λύσεις του $Ax = 0$ συν το νέο διάνυσμα $x_p = (-2, 0, 1, 0)$. Το συγκεκριμένο x_p είναι ***μια μερική λύση*** του $Ax = b$. Οι δύο τελευταίοι όροι με τα v και y δίνουν επιπλέον λύσεις (διότι ικανοποιούν το $Ax = 0$). ***Κάθε λύση του $\boldsymbol{Ax = b}$ είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης και μιας λύσης του $\boldsymbol{Ax = 0}$***:

$$x_{\textbf{πλήρης}} = x_{\textbf{μερική}} + x_{\textbf{μηδενόχωρου}}$$

Η μερική λύση της εξίσωσης (4) προκύπτει με επίλυση της εξίσωσης *αφού όλες οι ελεύθερες μεταβλητές εξισωθούν με το μηδέν*. Αυτό είναι το μόνο καινούργιο κομμάτι, αφού έχουμε υπολογίσει ήδη τον μηδενόχωρο. Αν πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω εξίσωση με τον A, παίρνουμε $Ax_{\textbf{πλήρης}} = b + 0$.

Γεωμετρικά, οι λύσεις γεμίζουν πάλι μια διδιάστατη επιφάνεια —η οποία όμως δεν είναι υπόχωρος. Δεν περιέχει το $x = 0$. Είναι *παράλληλη* στον μηδενόχωρο που είχαμε προηγουμένως, μετατοπισμένη κατά τη μερική λύση x_p, όπως στο Σχήμα 2.2. Η εξίσωση (4) είναι ένας καλός τρόπος να γράψουμε την απάντηση:

1. Ανάγουμε το $Ax = b$ στο $Ux = c$.
2. Εξισώνοντας τις ελεύθερες μεταβλητές με το μηδέν, βρίσκουμε μια μερική λύση των $Ax_p = b$ και $Ux_p = c$.
3. Βρίσκουμε τις ειδικές λύσεις του $Ax = 0$ (ή του $Ux = 0$ ή του $Rx = 0$). Δίνουμε σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή, με τη σειρά, την τιμή 1. Επομένως, $x = x_p +$ (οποιοσδήποτε συνδυασμός x_n ειδικών λύσεων).

Όταν η εξίσωση ήταν η $Ax = 0$, η μερική λύση ήταν το μηδενικό διάνυσμα! Αυτό συμφωνεί με τον παραπάνω τύπο, με τη διαφορά ότι στην εξίσωση (2) δεν είχαμε γράψει την $x_{\textbf{μερική}} = 0$. Τώρα προσθέτουμε την x_p στις λύσεις μηδενόχωρου, όπως στην εξίσωση (4).

Ερώτημα: Πώς καθιστά η ανηγμένη μορφή R ακόμη πιο ξεκάθαρη αυτή τη λύση; Μπορούμε να το δούμε στο παράδειγμά μας. Αφαιρούμε την εξίσωση 2 από την εξίσωση 1 και κατόπιν διαιρούμε την εξίσωση 2 με τον οδηγό της. Με αυτόν τον τρόπο, στο αριστερό μέλος παράγεται ο R, όπως προηγουμένως. Στο δεξί μέλος, αυτές οι πράξεις μετατρέπουν το $c = (1, 3, 0)$ σε ένα νέο διάνυσμα $d = (-2, 1, 0)$:

Ανηγμένη εξίσωση
$\boldsymbol{Rx = d}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Η μερική μας λύση x_p (μία από τις πολλές επιλογές) έχει ελεύθερες μεταβλητές $v = y = 0$. Μπορούμε να αγνοήσουμε τις στήλες 2 και 4, οπότε έχουμε αμέσως $u = -2$ και $w = 1$, ακριβώς όπως στην εξίσωση (4). **Τα στοιχεία του $\boldsymbol{d}$ μεταφέρονται κατευθείαν στην $\boldsymbol{x_p}$.** Αυτό συμβαίνει διότι οι στήλες οδηγοί του R σχηματίζουν τον ταυτοτικό πίνακα!

Θα συνοψίσουμε το περιεχόμενο αυτής της ενότητας, πριν παρουσιάσουμε ένα ακόμη αναλυτικό παράδειγμα. Η απαλοιφή αποκαλύπτει τις οδηγικές μεταβλητές και τις ελεύθερες μεταβλητές. ***Αν υπάρχουν r οδηγοί, υπάρχουν r οδηγικές μεταβλητές και $n - r$ ελεύθερες μεταβλητές***. Ο σημαντικός αυτός αριθμός r έχει όνομα —είναι η ***τάξη του πίνακα***.

2Δ Έστω ότι η απαλοιφή ανάγει το $Ax = b$ στα $Ux = c$ και $Rx = d$, με r γραμμές οδηγούς και r στήλες οδηγούς. **Η τάξη αυτών των πινάκων είναι $\boldsymbol{r}$.** Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές των U και R είναι μηδέν, άρα λύση υπάρχει μόνο αν τα τελευταία $m - r$ στοιχεία των c και d είναι επίσης μηδέν.

Η πλήρης λύση είναι η $x = x_p + x_n$. Μια μερική λύση x_p έχει όλες τις ελεύθερες μεταβλητές ίσες με μηδέν. Οι οδηγικές μεταβλητές της είναι τα πρώτα r στοιχεία του d, άρα $Rx_p = d$.

Οι λύσεις μηδενόχωρου x_n είναι συνδυασμοί των $n - r$ ειδικών λύσεων, με μία ελεύθερη μεταβλητή ίση με 1. Οι οδηγικές μεταβλητές αυτής της ειδικής λύσης βρίσκονται στις αντίστοιχες στήλες του R (με αντίθετο πρόσημο).

Βλέπουμε την κομβική σημασία της τάξης r. Μετράει τις γραμμές οδηγούς του «χώρου γραμμών» και τις στήλες οδηγούς του χώρου στηλών. Ο μηδενόχωρος περιέχει $n-r$ ειδικές λύσεις. Υπάρχουν $m-r$ συνθήκες επιλυσιμότητας για τα b, c ή d.

Ένα ακόμη αναλυτικό παράδειγμα

Η πλήρης διαδικασία περιλαμβάνει τη χρήση της απαλοιφής και των στηλών οδηγών για την εύρεση του χώρου στηλών, του μηδενόχωρου και της τάξης. Ο 3 επί 4 πίνακας A έχει τάξη 2:

$$\text{Το} \quad Ax = b \quad \text{είναι το} \quad \begin{aligned} \mathbf{1}x_1 + \mathbf{2}x_2 + \mathbf{3}x_3 + \ \ \mathbf{5}x_4 &= b_1 \\ \mathbf{2}x_1 + \mathbf{4}x_2 + \mathbf{8}x_3 + \mathbf{12}x_4 &= b_2 \\ \mathbf{3}x_1 + \mathbf{6}x_2 + \mathbf{7}x_3 + \mathbf{13}x_4 &= b_3 \end{aligned} \tag{6}$$

1. Ανάγουμε τον $[A \quad b]$ στον $[U \quad c]$ για να φτάσουμε σε ένα τριγωνικό σύστημα $Ux = c$.
2. Βρίσκουμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε να υπάρχει λύση.
3. Περιγράφουμε τον χώρο στηλών του A: Ποιο επίπεδο του $\mathbf{R}^3$;
4. Περιγράφουμε τον μηδενόχωρο του A: Ποιες ειδικές λύσεις του $\mathbf{R}^4$;
5. Βρίσκουμε μια μερική λύση του $Ax = (0, 6, -6)$ και την πλήρη λύση $x_p + x_n$.
6. Ανάγουμε τον $[U \quad c]$ στον $[R \quad d]$: Οι ειδικές λύσεις προκύπτουν από τον R και το x_p από το d.

Λύση (Επισημαίνουμε ότι το δεξί μέλος περιλαμβάνεται σαν μια επιπλέον στήλη!)

1. Οι πολλαπλασιαστές της απαλοιφής είναι το 2, το 3 και το -1, οι οποίοι μετατρέπουν τον $[A \quad b]$ στον $[U \quad c]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & \boldsymbol{b_1} \\ 2 & 4 & 8 & 12 & \boldsymbol{b_2} \\ 3 & 6 & 7 & 13 & \boldsymbol{b_3} \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & 5 & \boldsymbol{b_1} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \boldsymbol{b_2 - 2b_1} \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \boldsymbol{b_3 - 3b_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & 3 & 5 & \boldsymbol{b_1} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \boldsymbol{b_2 - 2b_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{b_3 + b_2 - 5b_1} \end{array}\right].$$

2. Η τελευταία εξίσωση δίνει τη συνθήκη επιλυσιμότητας $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Αν ισχύει, έχουμε $0 = 0$.
3. Ο χώρος στηλών του A είναι το επίπεδο που περιέχει όλους τους συνδυασμούς των στηλών οδηγών $(1, 2, 3)$ και $(3, 8, 7)$. **Δεύτερη περιγραφή**: Ο χώρος στηλών περιέχει όλα τα διανύσματα με $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Αυτό καθιστά το $Ax = b$ επιλύσιμο, άρα το b ανήκει στον χώρο στηλών. *Όλες οι στήλες του A ικανοποιούν το κριτήριο $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Αυτή είναι η εξίσωση του επιπέδου* (*της πρώτης περιγραφής του χώρου στηλών*).
4. Οι ειδικές λύσεις του N έχουν ελεύθερες μεταβλητές $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ και $x_2 = 0$, $x_4 = 1$:

$$\begin{array}{l} \textbf{Πίνακας μηδενόχωρου} \\ \textbf{Ειδικές λύσεις του } \boldsymbol{Ax = 0} \\ \textbf{Ανάδρομη αντικατάσταση στο } \boldsymbol{Ux = 0} \\ \textbf{Αλλαγή προσήμων στο } \boldsymbol{Rx = 0} \end{array} \qquad N = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Επιλέγουμε $b = (0, 6, -6)$, για το οποίο ισχύει $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$. Η απαλοιφή μετατρέπει το $Ax = b$ στο $Ux = c = (0, 6, 0)$. Εκτελούμε ανάδρομη αντικατάσταση εξισώνοντας τις ελεύθερες μεταβλητές με το 0:

$$\textbf{Μερική λύση του } \boldsymbol{Ax_p} = \boldsymbol{(0, 6, -6)} \qquad x_p = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{ελεύθερη} \\ \\ \text{ελεύθερη} \end{matrix}$$

Η πλήρης λύση του $Ax = (0, 6, -6)$ είναι (αυτό το x_p) + (όλα τα x_n).

6. Στον ανηγμένο πίνακα R, η τρίτη στήλη αλλάζει από $(3, 2, 0)$ σε $(0, 1, 0)$. Το δεξί μέλος $c = (0, 6, 0)$ γίνεται $d = (-9, 3, 0)$. Τα -9 και 3 μπαίνουν στο x_p:

$$[U \quad c] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow [R \quad d] = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & \mathbf{-9} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ο τελικός πίνακας $[\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{d}]$ **είναι ο** $\mathrm{rref}([\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b}]) = \mathrm{rref}([\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{c}])$. Οι αριθμοί 2, 0, 2 και 1 στις ελεύθερες στήλες του R έχουν αντίθετα πρόσημα στις ειδικές λύσεις (τον πίνακα μηδενόχωρου N). Το $Rx = d$ αποκαλύπτει τα πάντα.

Προβλήματα 2.2

1. Κατασκευάστε ένα σύστημα που να έχει περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις αλλά να μην έχει λύση. Κάντε το δεξί μέλος μηδέν και βρείτε όλες τις λύσεις x_n.

2. Βρείτε την τάξη των A και B ανάγοντάς τους σε κλιμακωτή μορφή. Ποιες μεταβλητές είναι ελεύθερες;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τις ειδικές λύσεις των $Ax = 0$ και $Bx = 0$. Βρείτε όλες τις λύσεις.

3. Βρείτε την κλιμακωτή μορφή U, τις ελεύθερες μεταβλητές και τις ειδικές λύσεις, αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Το $Ax = b$ είναι συμβιβαστό (έχει λύση) όταν το b ικανοποιεί την $b_2 =$ _______. Βρείτε την πλήρη λύση στην ίδια μορφή με την εξίσωση (4).

4. Εκτελώντας τα βήματα του προηγούμενου προβλήματος, βρείτε την πλήρη λύση του $Mx = b$:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

5. Γράψτε τις πλήρεις λύσεις $x = x_p + x_n$ των παρακάτω συστημάτων, όπως στην εξίσωση (4):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

6. Περιγράψτε το σύνολο των εφικτών δεξιών μελών b (στον χώρο στηλών) του

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

βρίσκοντας τους περιορισμούς που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε η τρίτη εξίσωση να γίνει $0 = 0$ (μετά την απαλοιφή). Βρείτε την τάξη και μια μερική λύση.

7. Βρείτε την τιμή του c που καθιστά δυνατή την επίλυση του $Ax = b$ και λύστε το:

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 2 \\ 2u + 3v - w &= 5 \\ 3u + 4v + w &= c. \end{aligned}$$

8. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1 και b_2 (αν υπάρχουν) ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε δύο διανύσματα του μηδενόχωρου του A και την πλήρη λύση του $Ax = b$.

9. (α) Βρείτε τις ειδικές λύσεις του $Ux = 0$. Αναγάγετε τον U στον R και επαναλάβετε:

$$Ux = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Βρείτε όλες τις λύσεις αν το δεξί μέλος αλλάξει από $(0, 0, 0)$ σε $(a, b, 0)$;

10. Βρείτε ένα 2 επί 3 σύστημα $Ax = b$ που να έχει πλήρη λύση το

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε ένα 3 επί 3 σύστημα που να έχει αυτές τις λύσεις αν και μόνο αν $b_1 + b_2 = b_3$.

11. Γράψτε ένα 2 επί 2 σύστημα $Ax = b$ με πολλές λύσεις x_n αλλά καμία λύση x_p. (Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.) Για ποια b υπάρχει κάποια x_p;

12. Ποιες από τις παρακάτω περιγραφές αποτελούν σωστό ορισμό της *τάξης* του A;

(α) Το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του R.
(β) Το πλήθος των στηλών μείον το συνολικό πλήθος των γραμμών.
(γ) Το πλήθος των στηλών μείον το πλήθος των ελεύθερων στηλών.
(δ) Το πλήθος των μονάδων στον R.

13. Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R και την τάξη των εξής πινάκων:

(α) Του 3 επί 4 πίνακα που περιέχει μόνο μονάδες.
(β) Του 4 επί 4 πίνακα με $a_{ij} = (-1)^{ij}$.
(γ) Του 3 επί 4 πίνακα με $a_{ij} = (-1)^{j}$.

14. Βρείτε τον R και τις ειδικές λύσεις για καθέναν από τους παρακάτω (μπλοκ) πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} A & A \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Αν οι r οδηγικές μεταβλητές εμφανίζονται πρώτες, ο ανηγμένος R πρέπει να έχει την εξής μορφή:

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{ο } I \text{ είναι } r \text{ επί } r \\ \text{ο } F \text{ είναι } r \text{ επί } n-r \end{array}$$

Ποιος είναι ο πίνακας μηδενόχωρου N που περιέχει τις ειδικές λύσεις;

16. Υποθέστε ότι και οι r οδηγικές μεταβλητές εμφανίζονται *τελευταίες*. Περιγράψτε τα τέσσερα μπλοκ της m επί n ανηγμένης κλιμακωτής μορφής (το μπλοκ B πρέπει να είναι r επί r):

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Ποιος είναι ο πίνακας μηδενόχωρου N των ειδικών λύσεων; Τι σχήμα έχει;

17. (Ανόητο πρόβλημα) Περιγράψτε όλους τους 2 επί 3 πίνακες A_1 και A_2 με κλιμακωτές μορφές R_1 και R_2 τέτοιες ώστε ο $R_1 + R_2$ να είναι η κλιμακωτή μορφή του $A_1 + A_2$. Ισχύει σε αυτή την περίπτωση ότι $R_1 = A_1$ και $R_2 = A_2$;

18. Αν ο A έχει r στήλες οδηγούς, τότε ο A^{T} έχει r στήλες οδηγούς. Δώστε ένα 3 επί 3 παράδειγμα όπου τα πλήθη των στηλών να είναι διαφορετικά για τους A και A^{T}.

19. Ποιες είναι οι ειδικές λύσεις των $Rx = 0$ και $R^{\mathrm{T}}y = 0$ για τους παρακάτω R;

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

20. *Αν ο A έχει τάξη r, τότε έχει έναν r επί r υποπίνακα S που είναι αντιστρέψιμος.* Βρείτε αυτόν τον υποπίνακα S από τις γραμμές οδηγούς και τις στήλες οδηγούς κάθε A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

21. Εξηγήστε γιατί οι γραμμές οδηγοί και οι στήλες οδηγοί του A (όχι του R) δίνουν πάντα έναν r επί r αντιστρέψιμο υποπίνακα του A.

22. Βρείτε τις τάξεις των AB και AM (πίνακας τάξης 1 επί πίνακα τάξης 1):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1{,}5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & bc \end{bmatrix}.$$

23. Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες τάξης 1 $A = uv^{\mathrm{T}}$ και $B = wz^{\mathrm{T}}$, παίρνουμε uz^{T} επί τον αριθμό ___. Ο AB έχει τάξη 1 εκτός αν ___ $= 0$.

24. Αν κάθε στήλη του AB είναι ένας συνδυασμός των στηλών του A, τότε από τις διαστάσεις των χώρων στηλών προκύπτει ότι **τάξη**$(\boldsymbol{AB}) \leq$ **τάξη**$(\boldsymbol{A})$. Πρόβλημα: Αποδείξτε επίσης ότι **τάξη**$(\boldsymbol{AB}) \leq$ **τάξη**$(\boldsymbol{B})$.

25. (Σημαντικό) Υποθέστε ότι οι A και B είναι n επί n πίνακες και $AB = I$. Χρησιμοποιώντας την τάξη$(AB) \leq$ τάξη(A), αποδείξτε ότι η τάξη του A είναι n. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και ο B πρέπει να είναι ο αμφίπλευρος αντίστροφός του. Συνεπώς, $BA = I$ (*το οποίο δεν είναι τόσο προφανές!*).

26. Αν ο A είναι 2 επί 3 και ο C είναι 3 επί 2, χρησιμοποιώντας την τάξη του δείξτε ότι $CA \neq I$. Δώστε ένα παράδειγμα όπου $AC = I$. Για $m < n$, ένας δεξιός αντίστροφος δεν είναι αριστερός αντίστροφος.

27. Υποθέστε ότι οι A και B έχουν την *ίδια* ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R. Εξηγήστε πώς μπορούμε να μετατρέψουμε τον A στον B με στοιχειώδεις γραμμοπράξεις. Άρα ο B ισούται με έναν ______ πίνακα επί A.

28. Κάθε m επί n πίνακας τάξης r ανάγεται σε ένα γινόμενο (m επί r) επί (r επί n):

$$A = (\text{στήλες οδηγοί του } A)(\text{πρώτες } r \text{ γραμμές του } R) = (\textbf{ΣΤΗΛ})(\textbf{ΓΡΑΜ}).$$

Γράψτε τον 3 επί 4 πίνακα A που δίνεται στην αρχή αυτής της ενότητας σαν το γινόμενο του 3 επί 2 πίνακα που προκύπτει από τις στήλες οδηγούς και του 2 επί 4 πίνακα που προκύπτει από τον R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

29. Υποθέστε ότι A είναι ένας m επί n πίνακας τάξης r. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του είναι R. Περιγράψτε ακριβώς την *ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του* R^{T} (όχι του A^{T}).

30. (Προτεινόμενο) Εκτελώντας τα έξι βήματα που αναφέρονται μετά την εξίσωση (6), βρείτε τον χώρο στηλών και τον μηδενόχωρο του A, και τη λύση του $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

31. Για κάθε c, βρείτε τον R και τις ειδικές λύσεις του $Ax = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & c & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} 1-c & 2 \\ 0 & 2-c \end{bmatrix}.$$

32. Ποιος είναι ο πίνακας μηδενόχωρου N (των ειδικών λύσεων) των A, B, C;

$$A = \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} I & I & I \end{bmatrix}.$$

Τα Προβλήματα 33–36 αφορούν την επίλυση του $Ax = b$. Ακολουθώντας τα βήματα που περιγράφονται στο κείμενο, βρείτε τις x_p και x_n. Αναγάγετε τον επαυξημένο πίνακα $[A\ \ b]$.

33. Βρείτε τις πλήρεις λύσεις των

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 5 \\ -x - 3y + 3z &= 5 \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

34. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει λύση; Συμπεριλάβετε το b ως τέταρτη στήλη στον $[A\ \ b]$. Βρείτε όλες τις λύσεις όταν ισχύει αυτή η συνθήκη:

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= b_1 \\ 2x + 5y - 4z &= b_2 \\ 4x + 9y - 8z &= b_3. \end{aligned}$$

35. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα b_1, b_2, b_3, b_4 ώστε τα παρακάτω συστήματα να έχουν λύση; *Λύστε ως προς* x:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

36. Ποια διανύσματα (b_1, b_2, b_3) ανήκουν στον χώρο στηλών του A; Ποιοι συνδυασμοί γραμμών του A δίνουν μηδέν;

$$(\alpha)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad (\beta)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

37. Γιατί σε ένα 1 επί 3 σύστημα δεν μπορεί να έχουμε $x_p = (2, 4, 0)$ και $x_n =$ οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του $(1, 1, 1)$;

38. (α) Αν x_1 και x_2 είναι δύο λύσεις του $Ax = b$, βρείτε δύο λύσεις του $Ax = 0$.
(β) Στη συνέχεια βρείτε μια ακόμη λύση του $Ax = b$.

39. Εξηγήστε γιατί δεν ισχύει τίποτα από τα παρακάτω:
(α) Η πλήρης λύση είναι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των x_p και x_n.
(β) Ένα σύστημα $Ax = b$ έχει το πολύ μία μερική λύση.
(γ) Η λύση x_p με όλες τις ελεύθερες μεταβλητές ίσες με μηδέν είναι η βραχύτερη λύση (ελάχιστο μήκος $\|x\|$). (Βρείτε ένα 2 επί 2 αντιπαράδειγμα.)
(δ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, ο μηδενόχωρος δεν περιέχει καμία λύση x_n.

40. Αν η στήλη 5 του U δεν έχει οδηγό, τότε το x_5 είναι ______ μεταβλητή. Το μηδενικό διάνυσμα (είναι) (δεν είναι) η μοναδική λύση του $Ax = 0$. Αν το $Ax = b$ έχει λύση, τότε έχει ______ λύσεις.

41. Αν γνωρίζετε την x_p (ελεύθερες μεταβλητές $= 0$) και όλες τις ειδικές λύσεις του $Ax = b$, βρείτε την x_p και όλες τις ειδικές λύσεις των παρακάτω συστημάτων:

$$Ax = 2b \qquad \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ X \end{bmatrix} = b \qquad \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}.$$

42. Αν το $Ax = b$ έχει άπειρες λύσεις, γιατί είναι αδύνατο να έχει μόνο μία λύση το $Ax = B$ (νέο δεξί μέλος); Θα μπορούσε να μην έχει λύση το $Ax = B$;

43. Επιλέξτε τον αριθμό q έτσι ώστε (αν είναι δυνατό) η τάξη να είναι (α) 1, (β) 2, (γ) 3:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 9 & 6 & q \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ q & 2 & q \end{bmatrix}.$$

44. Δώστε παραδείγματα πινάκων A για τους οποίους το πλήθος των λύσεων του $Ax = b$ να είναι

(α) 0 ή 1, ανάλογα με το b.
(β) ∞, ανεξάρτητα από το b.
(γ) 0 ή ∞, ανάλογα με το b.
(δ) 1, ανεξάρτητα από το b.

45. Γράψτε όλες τις γνωστές σχέσεις μεταξύ r, m και n αν το $Ax = b$ έχει

(α) καμία λύση για κάποια b.
(β) άπειρες λύσεις για κάθε b.
(γ) ακριβώς μία λύση για κάποια b, καμία λύση για άλλα b.
(δ) ακριβώς μία λύση για κάθε b.

46. Εφαρμόστε τη μέθοδο απαλοιφής Gauss–Jordan (το δεξί μέλος γίνεται μια επιπλέον στήλη) στα $Ux = 0$ και $Ux = c$. Καταλήξτε στα $Rx = 0$ και $Rx = d$:

$$\begin{bmatrix} U & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & 4 & \mathbf{8} \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το $Rx = 0$, βρείτε την x_n (η ελεύθερη μεταβλητή του είναι $x_2 = 1$). Λύνοντας το $Rx = d$, βρείτε την x_p (η ελεύθερη μεταβλητή του είναι $x_2 = 0$).

47. Εφαρμόζοντας απαλοιφή με την επιπλέον στήλη, καταλήξετε στα $Rx = 0$ και $Rx = d$:

$$\begin{bmatrix} & & \\ U & 0 \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} & & \\ U & c \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 & \mathbf{9} \\ 0 & 0 & 2 & \mathbf{4} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}.$$

Λύστε το $Rx = 0$ (ελεύθερη μεταβλητή $= 1$). Ποιες είναι οι λύσεις του $Rx = d$;

48. Αναγάγετε το παρακάτω σύστημα στο $Ux = c$ (εφαρμόζοντας απαλοιφή Gauss) και κατόπιν στο $Rx = d$:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = b.$$

Βρείτε μια μερική λύση x_p και όλες τις λύσεις μηδενόχωρου x_n.

49. Βρείτε πίνακες A και B που να έχουν τη ζητούμενη ιδιότητα. Αν δεν μπορείτε να βρείτε, εξηγήστε γιατί.

(α) Η μοναδική λύση του $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι το $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(β) Η μοναδική λύση του $Bx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

50. Η πλήρης λύση του $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ είναι το $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε τον A.

51. Ο μηδενόχωρος ενός 3 επί 4 πίνακα A είναι η ευθεία που διέρχεται από το $(2, 3, 1, 0)$.

(α) Ποια είναι η *τάξη* του A και η πλήρης λύση του $Ax = 0$;

(β) Ποια είναι η ακριβής ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R του A;

52. Αναγάγετε τους παρακάτω πίνακες A και B στις συνήθεις κλιμακωτές μορφές τους, U:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \end{bmatrix}$.

Βρείτε μια ειδική λύση για κάθε ελεύθερη μεταβλητή και περιγράψτε κάθε λύση των $Ax = 0$ και $Bx = 0$. Αναγάγετε τις κλιμακωτές μορφές U στους αντίστοιχους R και σημειώστε τον ταυτοτικό πίνακα που σχηματίζουν οι γραμμές οδηγοί και οι στήλες οδηγοί.

53. Σωστό ή λάθος; (Με αιτιολόγηση αν είναι σωστό και αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος.)

(α) Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

(β) Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

(γ) Ένας m επί n πίνακας έχει το πολύ n οδηγικές μεταβλητές.

(δ) Ένας m επί n πίνακας έχει το πολύ m οδηγικές μεταβλητές.

54. Υπάρχει 3 επί 3 πίνακας χωρίς μηδενικά στοιχεία για τον οποίο να ισχύει $U = R = I$;

55. Βάλτε όσο το δυνατόν περισσότερες μονάδες σε έναν 4 επί 7 κλιμακωτό πίνακα U και σε μια *ανηγμένη* μορφή R με στήλες οδηγούς τις $2, 4, 5$.

56. Αν η στήλη 4 ενός 3 επί 5 πίνακα περιέχει μόνο μηδενικά, τότε η x_4 είναι σίγουρα ______ μεταβλητή. Η ειδική λύση για αυτή τη μεταβλητή είναι το διάνυσμα $x =$ ______.

57. Αν οι πρώτες και τελευταίες στήλες ενός 3 επί 5 πίνακα είναι ίδιες (μη μηδενικές), τότε η ______ είναι ελεύθερη μεταβλητή. Βρείτε την ειδική λύση για αυτή τη μεταβλητή.

58. Η εξίσωση $x - 3y - z = 0$ ορίζει ένα επίπεδο του $\mathbf{R}^3$. Ποιος είναι ο πίνακας A αυτής της εξίσωσης; Ποιες είναι οι ελεύθερες μεταβλητές; Οι ειδικές λύσεις είναι οι $(3, 1, 0)$ και ______. Το παράλληλο επίπεδο $x - 3y - z = 12$ περιέχει το σημείο $(12, 0, 0)$. Όλα τα σημεία αυτού του επίπεδου έχουν την εξής μορφή (συμπληρώστε τις πρώτες συνιστώσες):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

59. Υποθέστε ότι σε έναν 4 επί 5 πίνακα με τέσσερις οδηγούς έχουμε στήλη $1 +$ στήλη $3 +$ στήλη $5 = 0$. Ποια στήλη είναι σίγουρο ότι δεν έχει οδηγό (και ποια μεταβλητή είναι ελεύθερη); Ποια είναι η ειδική λύση; Ποιος είναι ο μηδενόχωρος;

Στα Προβλήματα 60–66 σας ζητείται να βρείτε πίνακες (αν είναι δυνατό) με συγκεκριμένες ιδιότητες.

60. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να αποτελείται από όλους τους συνδυασμούς των $(2, 2, 1, 0)$ και $(3, 1, 0, 1)$.

61. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(4, 3, 2, 1)$.

62. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 5)$ και $(0, 3, 1)$, και του οποίου ο μηδενόχωρος να περιέχει το $(1, 1, 2)$.

63. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$, και του οποίου ο μηδενόχωρος να περιέχει τα $(1, 0, 1)$ και $(0, 0, 1)$.

64. Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει το $(1, 1, 1)$ και του οποίου ο μηδενόχωρος να είναι η ευθεία των πολλαπλασίων του $(1, 1, 1, 1)$.

65. Κατασκευάστε έναν 2 επί 2 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να ισούται με τον χώρο στηλών του.

66. Γιατί δεν υπάρχει 3 επί 3 πίνακας του οποίου ο μηδενόχωρος να ισούται με τον χώρο στηλών του;

67. Η ανηγμένη μορφή R ενός 3 επί 3 πίνακα με τυχαία επιλεγμένα στοιχεία είναι σχεδόν σίγουρα ______. Ποιος θα είναι πρακτικά σίγουρα ο R αν ο τυχαίος A είναι 4 επί 3;

68. Χρησιμοποιώντας παραδείγματα, δείξτε ότι οι παρακάτω τρεις ισχυρισμοί εν γένει *δεν ισχύουν*:

(α) Οι A και A^{T} έχουν τον ίδιο μηδενόχωρο.
(β) Οι A και A^{T} έχουν τις ίδιες ελεύθερες μεταβλητές.
(γ) Αν ο R είναι η ανηγμένη μορφή του $\mathsf{rref}(A)$, τότε ο R^{T} είναι ο $\mathsf{rref}(A^{\mathrm{T}})$.

69. Αν οι ειδικές λύσεις του $Rx = 0$ βρίσκονται στις στήλες των παρακάτω N, εργαζόμενοι ανάδρομα βρείτε τις μη μηδενικές γραμμές των ανηγμένων πινάκων R:

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad N = \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix} \quad \text{(κενός 3 επί 1).}$$

70. Εξηγήστε γιατί οι A και $-A$ έχουν πάντα την ίδια ανηγμένη κλιμακωτή μορφή R.

2.3 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ, ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Από μόνοι τους, οι αριθμοί m και n δεν δίνουν την πλήρη εικόνα του πραγματικού μεγέθους ενός γραμμικού συστήματος. Ο πίνακας του παραδείγματός μας είχε τρεις γραμμές και τέσσερις στήλες, αλλά η τρίτη γραμμή δεν ήταν παρά συνδυασμός των δύο πρώτων. Η απαλοιφή τη μετέτρεψε σε μηδενική γραμμή. Δεν επηρέασε καθόλου το ομογενές πρόβλημα $Ax = 0$. Οι τέσσερις στήλες δεν ήταν ούτε αυτές ανεξάρτητες, ενώ ο χώρος στηλών εκφυλίστηκε σε ένα διδιάστατο επίπεδο.

Ο σημαντικός αριθμός που αρχίζει να αποκαλύπτεται (το πραγματικό μέγεθος) είναι η ***τάξη r***. Εισαγάγαμε την τάξη ως το *πλήθος των οδηγών* στη διαδικασία απαλοιφής. Ισοδύναμα, ο τελικός πίνακας U έχει r μη μηδενικές γραμμές. Αυτός ο ορισμός θα μπορούσε να δοθεί σε έναν υπολογιστή. Θα ήταν όμως λάθος να μην προχωρήσουμε παραπέρα, διότι η τάξη έχει μια απλή διαισθητικά σημασία: *Η τάξη μετράει το πλήθος των γνησίως ανεξάρτητων γραμμών του πίνακα A.* Θέλουμε μαθηματικούς και όχι υπολογιστικούς ορισμούς.

Στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να εξηγήσουμε και να χρησιμοποιήσουμε τέσσερις έννοιες:

1. Τη γραμμική ανεξαρτησία και εξάρτηση.
2. Την παραγωγή ενός υποχώρου.
3. Τη βάση ενός υποχώρου (ένα σύνολο διανυσμάτων).
4. Τη διάσταση ενός υποχώρου (ένας αριθμός).

Το πρώτο βήμα είναι να ορίσουμε τη ***γραμμική ανεξαρτησία***. Δεδομένου ενός συνόλου διανυσμάτων $v_1, \dots, v_k$, εξετάζουμε τους συνδυασμούς τους, $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_kv_k$. Ο τετριμμένος συνδυασμός, με όλα τα βάρη $c_i = 0$, παράγει προφανώς το μηδενικό διάνυσμα: $0v_1 + \cdots + 0v_k = 0$. Το ερώτημα είναι αν αυτός είναι ο *μοναδικός τρόπος* παραγωγής του μηδενός. Αν ναι, τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα.

Αν υπάρχει άλλος συνδυασμός των διανυσμάτων που δίνει μηδέν, τα διανύσματα είναι *εξαρτημένα*.

2Ε Αν η $c_1v_1 + \cdots + c_kv_k = 0$ ισχύει μόνο όταν $c_1 = \cdots = c_k = 0$, τότε τα διανύσματα $v_1, \dots, v_k$ είναι ***γραμμικά ανεξάρτητα***. Αν κάποιο c είναι μη μηδενικό, τα v είναι ***γραμμικά εξαρτημένα***. Κάποιο διάνυσμα είναι συνδυασμός των υπόλοιπων.

Μπορούμε εύκολα να παραστήσουμε γραφικά τη γραμμική εξάρτηση στον τριδιάστατο χώρο, όταν όλα τα διανύσματα ξεκινούν από την αρχή των αξόνων. Δύο διανύσματα είναι εξαρτημένα αν περιέχονται στην ίδια ευθεία. *Τρία διανύσματα είναι εξαρτημένα αν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο.* Αν επιλέξουμε τυχαία τρία διανύσματα, και δεν τύχει κάτι εξαιρετικό, θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν θα περιέχονται στο ίδιο επίπεδο). Τέσσερα διανύσματα είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα στον $\mathbf{R}^3$.

Παράδειγμα 1 Αν το v_1 είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε το σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο. Μπορούμε να επιλέξουμε $c_1 = 3$ και $c_i = 0$ για όλα τα υπόλοιπα, το οποίο είναι ένας μη τετριμμένος συνδυασμός που παράγει το μηδέν.

Παράδειγμα 2 Οι στήλες του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένες, αφού η δεύτερη στήλη ισούται με τρία επί την πρώτη. Συνδυάζοντας τις στήλες με βάρη $-3, 1, 0, 0$, παίρνουμε μια στήλη μηδενικών.

Οι γραμμές είναι και αυτές γραμμικά εξαρτημένες· η γραμμή 3 ισούται με δύο επί τη γραμμή 2 μείον πέντε επί τη γραμμή 1. (Αυτό είναι το ίδιο με τον συνδυασμό των b_1, b_2, b_3 που έπρεπε να μηδενίζεται στο δεξί μέλος ώστε να είναι συμβιβαστό το $Ax = b$. Αν δεν ίσχυε $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, η τρίτη εξίσωση δεν θα γινόταν $0 = 0$.)

Παράδειγμα 3 Οι στήλες του παρακάτω τριγωνικού πίνακα είναι γραμμικά *ανεξάρτητες*:

$$\textbf{Κανένα μηδενικό στη διαγώνιο} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Αναζητούμε έναν συνδυασμό των στηλών που να δίνει μηδέν:

$$\textbf{Λύνουμε το } \boldsymbol{Ac = 0} \qquad c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι τα c_1, c_2, c_3 είναι όλα υποχρεωτικά μηδέν. Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $c_3 = 0$. Κατόπιν, από την επόμενη εξίσωση παίρνουμε $c_2 = 0$, και αντικαθιστώντας στη πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι υποχρεωτικά $c_1 = 0$. Ο μόνος συνδυασμός που παράγει το μηδενικό διάνυσμα είναι ο τετριμμένος συνδυασμός. ***Ο μηδενόχωρος του A περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα $c_1 = c_2 = c_3 = 0$***.

> ***Οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $N(A) = \{$μηδενικό διάνυσμα$\}$.***

Αντίστοιχος συλλογισμός ισχύει για τις γραμμές του A, οι οποίες είναι επίσης ανεξάρτητες. Ας υποθέσουμε ότι

$$c_1(3,4,2) + c_2(0,1,5) + c_3(0,0,2) = (0,0,0).$$

Από τις πρώτες συνιστώσες βρίσκουμε ότι $3c_1 = 0$ ή $c_1 = 0$. Κατόπιν, από τις δεύτερες συνιστώσες παίρνουμε $c_2 = 0$ και τέλος $c_3 = 0$.

Οι μη μηδενικές γραμμές κάθε κλιμακωτού πίνακα U πρέπει να είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, αν επιλέξουμε *τις στήλες που περιέχουν τους οδηγούς*, είναι και αυτές γραμμικά ανεξάρτητες. Στο προηγούμενο παράδειγμά μας, με

$$\begin{matrix}\textbf{Δύο ανεξάρτητες γραμμές} \\ \textbf{Δύο ανεξάρτητες στήλες}\end{matrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

οι στήλες οδηγοί 1 και 3 είναι ανεξάρτητες. Κανένα σύνολο τριών στηλών δεν αποτελείται από ανεξάρτητες στήλες, και σίγουρα δεν είναι ανεξάρτητες και οι τέσσερις. Ισχύει ότι οι στήλες 1 και 4 είναι επίσης ανεξάρτητες, αν όμως αλλάζαμε το τελευταίο 1 σε 0 θα ήταν εξαρτημένες. *Αυτές που είναι εγγυημένα ανεξάρτητες είναι οι στήλες με τους οδηγούς*. Ο γενικός κανόνας είναι ο εξής:

> **2ΣΤ** Οι r μη μηδενικές γραμμές ενός κλιμακωτού πίνακα U και ενός ανηγμένου πίνακα R είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει για τις r στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Παράδειγμα 4 Οι στήλες του n επί n ταυτοτικού πίνακα είναι ανεξάρτητες:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι στήλες $e_1, \ldots, e_n$ αυτού του πίνακα αντιπροσωπεύουν τα μοναδιαία διανύσματα κατά τις διευθύνσεις των συντεταγμένων. Στον $\mathbf{R}^4$,

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Τα περισσότερα σύνολα τεσσάρων διανυσμάτων στον $\mathbf{R}^4$ αποτελούνται από ανεξάρτητα διανύσματα. Τα συγκεκριμένα e είναι η ασφαλέστερη επιλογή.

Για να ελέγξουμε αν ένα σύνολο διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$ είναι ανεξάρτητα, τα τοποθετούμε στις στήλες ενός πίνακα A και λύνουμε το σύστημα $Ac = 0$. Τα διανύσματα είναι εξαρτημένα αν υπάρχει λύση διαφορετική από την $c = 0$. Αν δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές (*τάξη* n), δεν υπάρχει άλλος μηδενόχωρος εκτός του $c = 0$· τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. Αν η τάξη είναι μικρότερη από n, τουλάχιστον μια ελεύθερη μεταβλητή μπορεί να είναι μη μηδενική και οι στήλες είναι εξαρτημένες.

Μια περίπτωση έχει ειδικό ενδιαφέρον. Έστω ότι τα n διανύσματα έχουν m συνιστώσες, οπότε ο A είναι ένας m επί n πίνακας. Αν $n > m$, υπάρχουν πάρα πολλές στήλες για να είναι ανεξάρτητες! Δεν μπορούν να υπάρχουν n οδηγοί, αφού δεν υπάρχουν αρκετές γραμμές για να τους χωρέσουν. Η τάξη θα είναι μικρότερη από n. Κάθε σύστημα $Ac = 0$ με περισσότερους αγνώστους από εξισώσεις έχει λύσεις $c \neq 0$.

2Ζ Ένα σύνολο n διανυσμάτων του $\mathbf{R}^m$ αποτελείται υποχρεωτικά από γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα αν $n > m$.

Ο αναγνώστης θα αναγνωρίσει ότι αυτό είναι μια διαφορετική μορφή του 2Γ: Κάθε m επί n σύστημα $Ax = 0$ έχει μη μηδενικές λύσεις αν $n > m$.

Παράδειγμα 5 Οι παρακάτω τρεις στήλες του $\mathbf{R}^2$ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τον συνδυασμό των στηλών που παράγουν το μηδέν λύνουμε το $Ac = 0$:

$$A \rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αν δώσουμε στην ελεύθερη μεταβλητή c_3 την τιμή 1, εφαρμόζοντας ανάδρομη αντικατάσταση στο $Uc = 0$ παίρνουμε $c_2 = -1$ και $c_1 = 1$. Με αυτά τα τρία βάρη, η πρώτη στήλη μείον τη δεύτερη συν την τρίτη δίνει μηδέν: Εξάρτηση.

Παραγωγή ενός υποχώρου

Σε αυτό το σημείο θα ορίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε ότι ένα σύνολο διανυσμάτων *παράγει έναν χώρο*. Ο χώρος στηλών του A *παράγεται* από τις στήλες. **Οι συνδυασμοί τους παράγουν ολόκληρο τον χώρο:**

2Η Αν ένας διανυσματικός χώρος $\mathbf{V}$ αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $w_1, \ldots, w_\ell$, τότε τα διανύσματα αυτά ***παράγουν*** τον χώρο. Κάθε διάνυσμα v του $\mathbf{V}$ είναι ένας συνδυασμός των w:

Κάθε v προκύπτει από τα w: $\quad v = c_1w_1 + \cdots + c_\ell w_\ell \quad$ για κάποιους συντελεστές c_i.

Επιτρέπεται διαφορετικοί συνδυασμοί των w να δίνουν το ίδιο διάνυσμα v. Τα c δεν χρειάζεται να είναι μοναδικά, διότι το παράγον σύνολο μπορεί να είναι πάρα πολύ μεγάλο —μπορεί να περιέχει το μηδενικό διάνυσμα ή ακόμη και όλα τα διανύσματα.

Παράδειγμα 6 Τα διανύσματα $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$ και $w_3 = (-2, 0, 0)$ παράγουν ένα επίπεδο (το επίπεδο x-y) του $\mathbf{R}^3$. Τα δύο πρώτα διανύσματα παράγουν επίσης το ίδιο επίπεδο, ενώ τα w_1 και w_3 παράγουν μόνο μια ευθεία.

Παράδειγμα 7 Ο χώρος στηλών του A είναι ακριβώς ***ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του***. Ο χώρος γραμμών παράγεται από τις γραμμές. Ο ορισμός ικανοποιείται. Πολλαπλασιάζοντας τον A με οποιοδήποτε x παίρνουμε έναν συνδυασμό των στηλών· ένα διάνυσμα Ax του χώρου στηλών.

Τα διανύσματα συντεταγμένων $e_1, \ldots, e_n$ που προκύπτουν από τον ταυτοτικό πίνακα παράγουν τον $\mathbf{R}^n$. Κάθε διάνυσμα $b = (b_1, \ldots, b_n)$ είναι ένας συνδυασμός αυτών των στηλών. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, τα βάρη είναι οι ίδιες οι συνιστώσες b_i: $b = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$. Αλλά ο $\mathbf{R}^n$ παράγεται και από τις στήλες άλλων πινάκων!

Βάση ενός διανυσματικού χώρου

Για να διαπιστώσουμε αν ένα b είναι ένας συνδυασμός των στηλών, δοκιμάζουμε να λύσουμε το $Ax = b$. Για να διαπιστώσουμε αν οι στήλες είναι ανεξάρτητες, λύνουμε το $Ax = 0$. ***Η παραγωγή συνδέεται με τον χώρο στηλών, ενώ η ανεξαρτησία συνδέεται με τον μηδενόχωρο***. Τα διανύσματα συντεταγμένων $e_1, \ldots, e_n$ παράγουν τον $\mathbf{R}^n$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σε γενικές γραμμές, ***κανένα διάνυσμα αυτού του συνόλου δεν περισσεύει***. Αυτό μας οδηγεί στην κομβική έννοια της ***βάσης***.

2Θ Μια ***βάση*** ενός διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}$ είναι μια ακολουθία διανυσμάτων που έχουν ταυτόχρονα δύο ιδιότητες:

1. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα (δεν είναι περισσότερα από όσα πρέπει).
2. Παράγουν τον χώρο $\mathbf{V}$ (δεν είναι λιγότερα από όσα πρέπει).

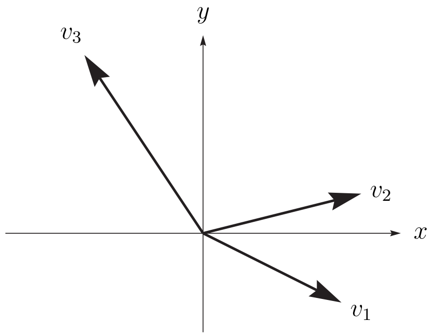
Ο συνδυασμός αυτών των ιδιοτήτων είναι θεμελιώδους σημασίας για τη γραμμική άλγεβρα. Σημαίνει ότι κάθε διάνυσμα του χώρου είναι συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης, διότι τα διανύσματα της βάσης παράγουν τον χώρο. Σημαίνει επίσης ότι ο συνδυασμός είναι μοναδικός: Αν $v = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ και $v = b_1v_1 + \cdots + b_kv_k$, τότε αφαιρώντας παίρνουμε $0 = \sum(a_i - b_i)v_i$. Λόγω της ανεξαρτησίας, όμως, κάθε συντελεστής $a_i - b_i$ πρέπει να είναι μηδέν. Συνεπώς, $a_i = b_i$. ***Υπάρχει ένας και μόνο ένας τρόπος να γράψουμε το v σαν συνδυασμό των διανυσμάτων βάσης***.

Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι τα διανύσματα συντεταγμένων $e_1, \ldots, e_n$ δεν είναι η μοναδική βάση του $\mathbf{R}^n$. Μερικά πράγματα στη γραμμική άλγεβρα είναι μοναδικά, αλλά όχι αυτό. Ένας διανυσματικός χώρος έχει ***άπειρες το πλήθος διαφορετικές βάσεις***. Όταν ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, οι στήλες του είναι ανεξάρτητες —και είναι μια βάση του $\mathbf{R}^n$. Οι δύο στήλες του παρακάτω μη ιδιόμορφου πίνακα είναι μια βάση του $\mathbf{R}^2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Κάθε διδιάστατο διάνυσμα είναι ένας συνδυασμός αυτών των (ανεξάρτητων!) στηλών.

Παράδειγμα 8 Το επίπεδο x-y στο Σχήμα 2.4 είναι ο $\mathbf{R}^2$. Το διάνυσμα v_1 από μόνο του είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά δεν παράγει τον $\mathbf{R}^2$. Τα τρία διανύσματα v_1, v_2, v_3 παράγουν σίγουρα τον $\mathbf{R}^2$, αλλά δεν είναι ανεξάρτητα. *Οποιαδήποτε δύο* από αυτά τα διανύσματα, φερ' ειπείν τα v_1 και v_2, έχουν και τις δύο ιδιότητες —παράγουν τον χώρο και είναι ανεξάρτητα. Άρα αποτελούν μια βάση. Επισημαίνουμε ξανά ότι *ένας διανυσματικός χώρος δεν έχει μοναδική βάση*.



Σχήμα 2.4 Ένα παράγον σύνολο v_1, v_2, v_3. Βάσεις v_1, v_2 και v_1, v_3 και v_2, v_3.

Παράδειγμα 9 Οι παρακάτω τέσσερις στήλες παράγουν τον χώρο στηλών του U, αλλά δεν είναι ανεξάρτητες:

$$\textbf{Κλιμακωτός πίνακας} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν πολλές δυνατές βάσεις, αλλά προτείνουμε μια συγκεκριμένη επιλογή: ***Οι στήλες που περιέχουν οδηγούς*** (στη συγκεκριμένη περίπτωση η πρώτη και η τρίτη, οι οποίες αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές) ***είναι μια βάση του χώρου στηλών***. Οι στήλες αυτές είναι ανεξάρτητες και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι παράγουν τον χώρο. Στην πραγματικότητα, ο χώρος στηλών του U είναι το επίπεδο x-y του $\mathbf{R}^3$. Ο $\boldsymbol{C}(U)$ *δεν είναι ίδιος* με τον χώρο στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ πριν από την απαλοιφή —όμως το *πλήθος* των ανεξάρτητων στηλών δεν άλλαξε.

Για να συνοψίσουμε: *Οι στήλες ενός πίνακα παράγουν τον χώρο στηλών του.* Αν είναι ανεξάρτητες, είναι μια βάση του χώρου στηλών —είτε ο πίνακας είναι τετραγωνικός είτε παραλληλόγραμμος. Αν θέλουμε οι στήλες να είναι μια βάση ολόκληρου του χώρου $\mathbf{R}^n$, ο πίνακας πρέπει να είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος.

Διάσταση διανυσματικού χώρου

Ένας χώρος έχει άπειρες το πλήθος διαφορετικές βάσεις, αλλά όλες οι επιλογές έχουν κάτι κοινό. Το ***πλήθος των διανυσμάτων βάσης*** είναι μια ιδιότητα του ίδιου του χώρου:

2I Οποιεσδήποτε δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου $\mathbf{V}$ περιέχουν το ίδιο πλήθος διανυσμάτων. Αυτός ο αριθμός, ο οποίος είναι κοινός για όλες τις βάσεις και εκφράζει το πλήθος των «βαθμών ελευθερίας» του χώρου, είναι η ***διάσταση*** του $\mathbf{V}$.

Πρέπει να αποδείξουμε το εξής: Όλες οι δυνατές βάσεις περιέχουν το ίδιο πλήθος διανυσμάτων. Κάθε βάση του επιπέδου x-y στο Σχήμα 2.4 περιέχει δύο διανύσματα· η διάσταση του είναι 2. Στις τρεις διαστάσεις χρειαζόμαστε τρία διανύσματα, επί των αξόνων x-y-z ή τριών άλλων (γραμμικά ανεξάρτητων!) διευθύνσεων. ***Η διάσταση του χώρου $\mathbf{R}^n$ είναι n.*** Ο χώρος στηλών του U στο Παράδειγμα 9 είχε διάσταση 2· ήταν ένας «διδιάστατος υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$». Ο μηδενικός πίνακας αποτελεί ιδιαίτερη περίπτωση, καθώς ο χώρος στηλών του περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα. Κατά σύμβαση, βάση αυτού του χώρου είναι το κενό σύνολο και η διάστασή του είναι μηδέν.

Ακολουθεί το πρώτο από τα βασικά θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας που θα παρουσιάσουμε:

2IA Αν τα $v_1, \ldots, v_m$ και $w_1, \ldots, w_n$ είναι αμφότερα βάσεις του ίδιου διανυσματικού χώρου, τότε $m = n$. Το πλήθος των διανυσμάτων είναι το ίδιο.

Απόδειξη Θα υποθέσουμε ότι τα w είναι περισσότερα από τα v $(n > m)$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού τα v είναι βάση, πρέπει να παράγουν τον χώρο. *Κάθε w_j μπορεί να γραφτεί σαν συνδυασμός των v*: Αν $w_1 = a_{11}v_1 + \cdots + a_{m1}v_m$, αυτό είναι η πρώτη στήλη ενός πολλαπλασιασμού πινάκων VA:

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \ldots & v_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & & & \end{bmatrix} = VA.$$

Δεν γνωρίζουμε κάθε a_{ij}, αλλά γνωρίζουμε το σχήμα του A (είναι m επί n). Το δεύτερο διάνυσμα w_2 είναι επίσης ένας συνδυασμός των v. Οι συντελεστές αυτού του συνδυασμού συμπληρώνουν τη δεύτερη στήλη του A. Η βασική ιδέα είναι ότι ο A έχει μια γραμμή για κάθε v και μια στήλη για κάθε w. Ο A είναι ένας κοντός, φαρδύς πίνακας, αφού $n > m$.

Το $Ax = \mathbf{0}$ έχει μη μηδενική λύση, επομένως $VAx = 0$, που σημαίνει ότι $Wx = 0$. *Ένας συνδυασμός των w δίνει μηδέν!* Τα w δεν μπορούν να είναι βάση —άρα δεν μπορούμε να έχουμε $n > m$.

Αν $m > n$, ανταλλάσσουμε τους ρόλους των v και w, και επαναλαμβάνουμε τα ίδια βήματα. Ο μόνος τρόπος να αποφύγουμε το άτοπο είναι να έχουμε $m = n$. Άρα αποδείξαμε ότι $m = n$. Επαναλαμβάνουμε: Η ***διάσταση ενός χώρου*** είναι το πλήθος των διανυσμάτων κάθε βάσης του. ■

Χρησιμοποιήσαμε αυτή την απόδειξη νωρίτερα για να δείξουμε ότι κάθε σύνολο $m+1$ διανυσμάτων του $\mathbf{R}^m$ αποτελείται υποχρεωτικά από εξαρτημένα διανύσματα. Τα v και w δεν χρειάζεται να είναι διανύσματα στήλες —η απόδειξη αφορούσε τον πίνακα A των συντελεστών. Μάλιστα, μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής γενικό αποτέλεσμα: *Σε έναν υπόχωρο διάστασης k, κανένα σύνολο που περιέχει περισσότερα από k διανύσματα δεν αποτελείται από ανεξάρτητα διανύσματα, και κανένα σύνολο που περιέχει λιγότερα από k διανύσματα δεν αποτελείται από διανύσματα που μπορούν να παραγάγουν τον χώρο*.

Υπάρχουν και άλλα «δυϊκά» θεωρήματα, από τα οποία θα αναφέρουμε μόνο ένα. Μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα σύνολο διανυσμάτων που είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από όσο πρέπει και να καταλήξουμε σε μια βάση:

2Ι΄Β Κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του $\mathbf{V}$ μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει βάση με την προσθήκη επιπλέον διανυσμάτων αν χρειάζεται.

Κάθε παράγον σύνολο του $\mathbf{V}$ μπορεί να συρρικνωθεί ώστε να γίνει βάση με την απόρριψη κάποιων διανυσμάτων αν χρειάζεται.

Η βασική ιδέα είναι ότι μια βάση είναι ένα ***μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο***. Δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο χωρίς απώλεια της ανεξαρτησίας. Μια βάση είναι επίσης ένα ***ελάχιστο παράγον σύνολο***. Δεν μπορεί να γίνει μικρότερο και να εξακολουθεί να παράγει το χώρο.

Πρέπει να προσέξετε ότι ο χαρακτηρισμός «-διάστατος» χρησιμοποιείται με δύο διαφορετικούς τρόπους. Μιλάμε για ένα τετραδιάστατο ***διάνυσμα***, εννοώντας ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^4$. Παραπάνω ορίσαμε έναν τετραδιάστατο ***υπόχωρο***· ένα παράδειγμα είναι το σύνολο των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^6$ των οποίων η πρώτη και τελευταία συνιστώσα είναι μηδέν. Τα μέλη αυτού του τετραδιάστατου υποχώρου είναι εξαδιάστατα διανύσματα σαν το $(0, 5, 1, 3, 4, 0)$.

Μια τελευταία σημείωση σχετικά με τη γλώσσα της γραμμικής άλγεβρας. Δεν χρησιμοποιούμε ποτέ τους όρους «βάση ενός πίνακα», «τάξη ενός χώρου» ή «διάσταση μιας βάσης». Αυτές οι φράσεις δεν έχουν νόημα. Αυτό που έχουμε είναι ότι *η διάσταση του χώρου στηλών* ισούται με *την τάξη του πίνακα*, όπως θα αποδείξουμε στην επόμενη ενότητα.

Προβλήματα 2.3

Τα Προβλήματα 1–10 αφορούν τη γραμμική ανεξαρτησία και τη γραμμική εξάρτηση.

1. Δείξτε ότι τα v_1, v_2, v_3 είναι ανεξάρτητα αλλά τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι εξαρτημένα:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Λύστε την $c_1v_1 + \cdots + c_4v_4 = 0$ ή το $Ac = 0$. Οι στήλες του A είναι τα v.

2. Βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ανεξάρτητων διανυσμάτων μεταξύ των

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ο αριθμός αυτός είναι __ ______ του χώρου που παράγουν τα v.

3. Δείξτε ότι αν $a = 0$, $d = 0$ ή $f = 0$ (3 περιπτώσεις), οι στήλες του U είναι εξαρτημένες:

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

4. Αν τα a, d, f στο Πρόβλημα 3 είναι όλα μη μηδενικά, δείξτε ότι η μοναδική λύση του $Ux = 0$ είναι η $x = 0$, οπότε ο U έχει ανεξάρτητες στήλες.

5. Ελέγξτε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι εξαρτημένα ή ανεξάρτητα:

(α) $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$ και $(3, 2, 1)$.
(β) $(1, -3, 2)$, $(2, 1, -3)$ και $(-3, 2, 1)$.

6. Επιλέξτε τρεις ανεξάρτητες στήλες του U. Κατόπιν κάντε δύο ακόμη διαφορετικές επιλογές. Κάντε το ίδιο για τον A. Για ποιους χώρους βρήκατε βάσεις;

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Αν τα w_1, w_2, w_3 είναι ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε ότι οι διαφορές $v_1 = w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 - w_3$ και $v_3 = w_1 - w_2$ είναι *εξαρτημένες*. Βρείτε έναν συνδυασμό των v που να δίνει μηδέν.

8. Αν τα w_1, w_2, w_3 είναι ανεξάρτητα διανύσματα, δείξτε ότι τα αθροίσματα $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_3$ και $v_3 = w_1 + w_2$ είναι *ανεξάρτητα*. (Γράψτε την $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ συναρτήσει των w. Βρείτε και λύστε εξισώσεις για τα c.)

9. Υποθέστε ότι τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι διανύσματα του $\mathbf{R}^3$.

(α) Τα τέσσερα αυτά διανύσματα είναι εξαρτημένα διότι ______.
(β) Τα δύο διανύσματα v_1 και v_2 θα είναι εξαρτημένα αν ______.
(γ) Τα διανύσματα v_1 και $(0, 0, 0)$ είναι εξαρτημένα διότι ______.

10. Βρείτε δύο ανεξάρτητα διανύσματα στο επίπεδο $x + 2y - 3z - t = 0$ του $\mathbf{R}^4$. Κατόπιν βρείτε τρία ανεξάρτητα διανύσματα. Γιατί όχι τέσσερα; Ποιος πίνακας έχει αυτό το επίπεδο ως μηδενόχωρο;

Τα Προβλήματα 11–18 αφορούν τον χώρο *που παράγεται* από ένα σύνολο διανυσμάτων. Πάρτε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των διανυσμάτων.

11. Περιγράψτε τον υπόχωρο του $\mathbf{R}^3$ (είναι ευθεία, επίπεδο ή ο $\mathbf{R}^3$;) που παράγεται από

(α) τα δύο διανύσματα $(1, 1, -1)$ και $(-1, -1, 1)$.

(β) τα τρία διανύσματα $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ και $(0, 0, 0)$.
(γ) τις στήλες ενός 3 επί 5 κλιμακωτού πίνακα με 2 οδηγούς.
(δ) όλα τα διανύσματα με θετικές συνιστώσες.

12. Το διάνυσμα b ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν οι στήλες του A όταν το ______ έχει λύση. Το διάνυσμα c ανήκει στον χώρο γραμμών του A όταν το ______ έχει λύση. *Σωστό ή λάθος*: Αν το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στον χώρο γραμμών, οι γραμμές είναι εξαρτημένες.

13. Βρείτε τις διαστάσεις (α) του χώρου στηλών του A, (β) του χώρου στηλών του U, (γ) του χώρου γραμμών του A, (δ) του χώρου γραμμών του U. Ποιοι δύο από αυτούς τους χώρους είναι ίδιοι;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

14. Επιλέξτε ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ του $\mathbf{R}^4$. Υπάρχουν 24 αναδιατάξεις σαν την (x_2, x_1, x_3, x_4) και (x_4, x_3, x_1, x_2). Τα 24 αυτά διανύσματα, συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του x, παράγουν έναν υπόχωρο $\mathbf{S}$. Βρείτε συγκεκριμένα διανύσματα x για τα οποία η διάσταση του $\mathbf{S}$ να είναι: (α) 0, (β) 1, (γ) 3, (δ) 4.

15. Τα $v + w$ και $v - w$ είναι συνδυασμοί των v και w. Γράψτε τα v και w σαν συνδυασμό των $v + w$ και $v - w$. Τα δύο ζεύγη διανυσμάτων ______ τον ίδιο χώρο. Πότε αποτελούν βάση του ίδιου χώρου;

16. Ελέγξτε αν τα παρακάτω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, λύνοντας την $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = 0$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε επίσης αν παράγουν τον $\mathbf{R}^4$, προσπαθώντας να λύσετε το $c_1 v_1 + \cdots + c_4 v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

17. Υποθέστε ότι τα διανύσματα των οποίων την ανεξαρτησία θέλουμε να ελέγξουμε τοποθετούνται στις γραμμές αντί στις στήλες του A. Πώς μπορούμε να συμπεράνουμε μέσω της διαδικασίας απαλοιφής που ανάγει τον A στον U αν τα διανύσματα είναι ή όχι είναι ανεξάρτητα;

18. Για να ελέγξετε αν το b ανήκει στον υπόχωρο που παράγεται από τα $w_1, \ldots, w_n$, θεωρήστε ότι τα διανύσματα w είναι οι στήλες του A και προσπαθήστε να λύσετε το $Ax = b$. Ποιο είναι το αποτέλεσμα για

(α) $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (2, 2, 1)$, $w_3 = (0, 0, 2)$, $b = (3, 4, 5)$;
(β) $w_1 = (1, 2, 0)$, $w_2 = (2, 5, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$, $w_4 = (0, 0, 0)$ και οποιοδήποτε b;

Τα Προβλήματα 19–37 αφορούν τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια βάση.

19. Αν τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, ο χώρος που παράγουν έχει διάσταση ______. Τα διανύσματα αυτά είναι ______ αυτού του χώρου. Αν τα διανύσματα είναι οι στήλες ενός m επί n πίνακα, τότε το m είναι ______ από το n.

20. Βρείτε μια βάση για καθέναν από τους εξής υποχώρους του $\mathbf{R}^4$:

(α) Όλα τα διανύσματα με ίσες συνιστώσες.
(β) Όλα τα διανύσματα με μηδενικό άθροισμα συνιστωσών.
(γ) Όλα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1,1,0,0)$ και $(1,0,1,1)$.
(δ) Τον χώρο στηλών (στον $\mathbf{R}^2$) και τον μηδενόχωρο (στον $\mathbf{R}^5$) του

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

21. Βρείτε τρεις διαφορετικές βάσεις του χώρου στηλών του παραπάνω U. Κατόπιν βρείτε δύο διαφορετικές βάσεις του χώρου γραμμών του U.

22. Υποθέστε ότι τα $v_1, v_2, \ldots, v_6$ είναι έξι διανύσματα του $\mathbf{R}^4$.

(α) Τα διανύσματα αυτά (παράγουν) (δεν παράγουν) (ενδέχεται να μην παράγουν) τον $\mathbf{R}^4$.
(β) Τα διανύσματα αυτά (είναι) (δεν είναι) (ενδέχεται να είναι) γραμμικά ανεξάρτητα.
(γ) Οποιοδήποτε τέσσερα από αυτά τα διανύσματα (είναι) (δεν είναι) (ενδέχεται να είναι) μια βάση του $\mathbf{R}^4$.
(δ) Αν τα διανύσματα αυτά είναι οι στήλες του A, τότε το $Ax = b$ (έχει) (δεν έχει) (ενδέχεται να μην έχει) λύση.

23. Οι στήλες του A είναι n διανύσματα του $\mathbf{R}^m$. Αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ποια είναι η τάξη του A; Αν παράγουν τον $\mathbf{R}^m$, ποια είναι η τάξη; Αν είναι μια βάση του $\mathbf{R}^m$, τότε τι;

24. Βρείτε μια βάση του επιπέδου $x - 2y + 3z = 0$ του $\mathbf{R}^3$. Κατόπιν βρείτε μια βάση της τομής του συγκεκριμένου επιπέδου με το επίπεδο xy. Κατόπιν βρείτε μια βάση όλων των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο επίπεδο.

25. Υποθέστε ότι οι στήλες ενός 5 επί 5 πίνακα A είναι μια βάση του $\mathbf{R}^5$.

(α) Η εξίσωση $Ax = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$ διότι ______.
(β) Αν το b ανήκει στον $\mathbf{R}^5$, τότε το $Ax = b$ έχει λύση διότι ______.

Συμπέρασμα: ο A είναι αντιστρέψιμος. Η τάξη του είναι 5.

26. Έστω $\mathbf{S}$ ένας πενταδιάστατος υπόχωρος του $\mathbf{R}^6$. Σωστό ή λάθος;

(α) Κάθε βάση του $\mathbf{S}$ μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει βάση του $\mathbf{R}^6$ με την προσθήκη ενός επιπλέον διανύσματος.
(β) Κάθε βάση του $\mathbf{R}^6$ μπορεί να συρρικνωθεί ώστε να γίνει βάση του $\mathbf{S}$ με την αφαίρεση ενός διανύσματος.

27. Ο U προκύπτει από τον A με αφαίρεση της γραμμής 1 από τη γραμμή 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε βάσεις των δύο χώρων στηλών. Βρείτε βάσεις των δύο χώρων γραμμών. Βρείτε βάσεις των δύο μηδενόχωρων.

28. Σωστό ή λάθος (αιτιολογήστε την απάντησή σας);

(α) Αν οι στήλες ενός πίνακα είναι εξαρτημένες, το ίδιο ισχύει για τις γραμμές.
(β) Ο χώρος στηλών ενός 2 επί 2 πίνακα είναι ίδιος με τον χώρο γραμμών του.
(γ) Ο χώρος στηλών ενός 2 επί 2 πίνακα έχει την ίδια διάσταση με τον χώρο γραμμών του.
(δ) Οι στήλες ενός πίνακα είναι μια βάση του χώρου στηλών.

29. Για ποιους αριθμούς c και d έχουν τάξη 2 οι παρακάτω πίνακες;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}.$$

30. Εντοπίζοντας τους οδηγούς, βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εκφράστε κάθε στήλη που δεν ανήκει στη βάση σαν συνδυασμό των βασικών στηλών. Βρείτε επίσης έναν πίνακα A που να έχει την ίδια κλιμακωτή μορφή U αλλά διαφορετικό χώρο στηλών.

31. Βρείτε ένα αντιπαράδειγμα για τον εξής ισχυρισμό: Αν τα v_1, v_2, v_3, v_4 είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbf{R}^4$, και $\mathbf{W}$ είναι ένας υπόχωρος, τότε κάποιο υποσύνολο των v είναι μια βάση του $\mathbf{W}$.

32. Βρείτε τις διαστάσεις των εξής διανυσματικών χώρων:

(α) Του χώρου όλων των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^4$ με μηδενικό άθροισμα συνιστωσών.
(β) Του μηδενόχωρου του 4 επί 4 ταυτοτικού πίνακα.
(γ) Του χώρου όλων των 4 επί 4 πινάκων.

33. Υποθέστε ότι γνωρίζουμε πως ο $\mathbf{V}$ έχει διάσταση k. Αποδείξτε ότι

(α) οποιαδήποτε k ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{V}$ αποτελούν βάση.
(β) οποιαδήποτε k διανύσματα που παράγουν τον $\mathbf{V}$ αποτελούν βάση.

Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε ότι το πλήθος των διανυσμάτων είναι σωστό, καθεμία από τις δύο ιδιότητες που ικανοποιεί μια βάση συνεπάγεται την άλλη.

34. Δείξτε ότι αν οι $\mathbf{V}$ και $\mathbf{W}$ είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$, τότε οι $\mathbf{V}$ και $\mathbf{W}$ πρέπει να έχουν ένα κοινό μη μηδενικό διάνυσμα. *Υπόδειξη*: Ξεκινήστε με βάσεις των δύο υποχώρων, δηλαδή με έξι διανύσματα συνολικά.

35. *Σωστό ή λάθος*;

(α) Αν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε το $Ax = b$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε b.
(β) Ένας 5 επί 7 πίνακας δεν έχει ποτέ γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

36. Αν ο A είναι ένας 64 επί 17 πίνακας τάξης 11, πόσα ανεξάρτητα διανύσματα ικανοποιούν το $Ax = 0$; Πόσα ανεξάρτητα διανύσματα ικανοποιούν το $A^{\mathrm{T}}y = 0$;

37. Βρείτε μια βάση καθενός από τους παρακάτω υποχώρους των 3 επί 3 πινάκων:

(α) Όλους τους διαγώνιους πίνακες.
(β) Όλους τους συμμετρικούς πίνακες ($A^{\mathrm{T}} = A$).
(γ) Όλους τους αντισυμμετρικούς πίνακες ($A^{\mathrm{T}} = -A$).

Τα Προβλήματα 38–42 αφορούν χώρους όπου τα «διανύσματα» είναι συναρτήσεις.

38. (α) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την $\frac{dy}{dx} = 0$.
(β) Επιλέξτε μια συγκεκριμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την $\frac{dy}{dx} = 3$.
(γ) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις που ικανοποιούν την $\frac{dy}{dx} = 3$.

39. Ο χώρος συνημιτόνων $\mathbf{F}_3$ περιέχει όλους τους συνδυασμούς

$$y(x) = A\cos x + B\cos 2x + C\cos 3x.$$

Βρείτε μια βάση του υποχώρου για τον οποίο $y(0) = 0$.

40. Βρείτε μια βάση του χώρου των συναρτήσεων που ικανοποιούν

(α) την $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$.

(β) την $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 0$.

41. Υποθέστε ότι οι $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ είναι τρεις διαφορετικές συναρτήσεις του x. Ο διανυσματικός χώρος που παράγουν θα μπορούσε να έχει διάσταση 1, 2 ή 3. Δώστε ένα παράδειγμα συναρτήσεων y_1, y_2, y_3 για κάθε περίπτωση.

42. Βρείτε μια βάση του χώρου των πολυωνύμων $p(x)$ βαθμού ≤ 3. Βρείτε μια βάση του υποχώρου με $p(1) = 0$.

43. Γράψτε τον 3 επί 3 ταυτοτικό πίνακα σαν συνδυασμό των υπόλοιπων πέντε πινάκων μετάθεσης! Στη συνέχεια δείξτε ότι οι πέντε αυτοί πίνακες είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. (Θεωρήστε ότι ένας συνδυασμός δίνει μηδέν και ελέγξτε τα στοιχεία ώστε να αποδείξετε ότι κάθε όρος είναι μηδέν.) Οι πέντε μεταθέσεις είναι μια βάση του υποχώρου των 3 επί 3 πινάκων με ίσα αθροίσματα γραμμών και στηλών.

44. *Επανάληψη*: Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι βάσεις του $\mathbf{R}^3$;

(α) $(1, 2, 0)$ και $(0, 1, -1)$.
(β) $(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)$.
(γ) $(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 0)$.
(δ) $(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 6)$.

45. *Επανάληψη*: Υποθέστε ότι ο A είναι 5 επί 4 και έχει τάξη 4. Δείξτε ότι το $Ax = b$ δεν έχει λύση όταν ο 5 επί 5 πίνακας $[A \;\; b]$ είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι το $Ax = b$ έχει λύση όταν ο $[A \;\; b]$ είναι ιδιόμορφος.

2.4 ΟΙ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με ορισμούς, αλλά όχι με κατασκευαστικές διαδικασίες. Γνωρίζουμε τι είναι μια βάση, αλλά όχι πώς τη βρίσκουμε. Σε αυτή την ενότητα, ξεκινώντας από τη ρητή περιγραφή ενός υποχώρου, θα θέλαμε να υπολογίσουμε μια συγκεκριμένη βάση.

Οι υπόχωροι μπορούν να περιγραφούν με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορεί να μας δίνεται ένα σύνολο διανυσμάτων που παράγουν τον χώρο. (*Παράδειγμα*: Οι στήλες παράγουν τον χώρο στηλών.) Δεύτερον, μπορεί να γνωρίζουμε ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα διανύσματα του χώρου. (*Παράδειγμα*: Ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλα τα διανύσματα που ικανοποιούν το $Ax = 0$.)

Η πρώτη περιγραφή ενδέχεται να περιλαμβάνει άχρηστα διανύσματα (εξαρτημένες στήλες). Η δεύτερη περιγραφή ενδέχεται να περιλαμβάνει επαναλαμβανόμενες συνθήκες (εξαρτημένες γραμμές). Δεν μπορούμε να γράψουμε κατευθείαν μια βάση· χρειαζόμαστε μια συστηματική διαδικασία.

Ο αναγνώστης μπορεί να μαντέψει ποια θα είναι η διαδικασία. Αφού εφαρμόσουμε την απαλοιφή στον A και πάρουμε έναν κλιμακωτό πίνακα U ή έναν ανηγμένο πίνακα R, θα βρούμε μια βάση για καθέναν από τους υποχώρους που σχετίζονται με τον A. Στη συνέχεια πρέπει να εξετάσουμε την ακραία περίπτωση της **πλήρους τάξης**:

Όταν η τάξη είναι η μεγαλύτερη δυνατή, $\boldsymbol{r = n}$ ή $\boldsymbol{r = m}$ ή $\boldsymbol{r = m = n}$, ο πίνακας έχει έναν **αριστερό αντίστροφο** *B ή* **δεξιό αντίστροφο** *C ή* **αμφίπλευρο** *A^{-1}.*

Για να οργανώσουμε την ανάλυσή μας, θα εξετάσουμε διαδοχικά καθέναν από τους τέσσερις υποχώρους. Τους δύο τους γνωρίζουμε ήδη, ενώ οι άλλοι δύο είναι καινούργιοι.

1. Ο ***χώρος στηλών*** του A συμβολίζεται με $\boldsymbol{C}(A)$. Η διάστασή του είναι η τάξη r.
2. Ο ***μηδενόχωρος*** του A συμβολίζεται με $\boldsymbol{N}(A)$. Η διάσταση του είναι $n - r$.
3. Ο ***χώρος γραμμών*** του A είναι ο *χώρος στηλών* του A^{T}. Είναι ο $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ και παράγεται από τις γραμμές του A. Η διάστασή του είναι επίσης r.
4. Ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** του A είναι ο *μηδενόχωρος του* A^{T}. Περιέχει όλα τα διανύσματα y για τα οποία $A^{\mathrm{T}}y = 0$ και συμβολίζεται με $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Η διάσταση του είναι ______.

Το χαρακτηριστικό των δύο τελευταίων υποχώρων είναι ότι *προκύπτουν από* τον A^{T}. Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, μπορούμε να βρούμε τους «φιλοξενούντες» χώρους που περιέχουν τους τέσσερις υποχώρους εξετάζοντας το πλήθος των συνιστωσών:

Ο μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A)$ και ο χώρος γραμμών $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^n$.
Ο αριστερός μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ και ο χώρος στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ είναι υπόχωροι του $\mathbf{R}^m$.

Οι γραμμές έχουν n συνιστώσες και οι στήλες m. Για έναν απλό πίνακα σαν τον

$$A = U = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ο χώρος στηλών είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ο χώρος γραμμών είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Ανήκει στον $\mathbf{R}^3$. Ο μηδενόχωρος είναι ένα επίπεδο του $\mathbf{R}^3$, ενώ ο αριστερός μηδενόχωρος είναι μια ευθεία του $\mathbf{R}^2$:

$$\text{O } \boldsymbol{N}(A) \text{ περιέχει τα } \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad \text{O } \boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}}) \text{ περιέχει το } \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Προσέξτε ότι όλα τα διανύσματα είναι διανύσματα στήλες. Ακόμα και οι γραμμές είναι ανεστραμμένες, και ο χώρος γραμμών του A είναι ο χώρος *στηλών* του A^{T}. Το πρόβλημά μας θα είναι να συνδέσουμε τους τέσσερις χώρους του U (μετά την απαλοιφή) με τους τέσσερις χώρους του A:

Βασικό παράδειγμα

$$\text{O } U = \begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&0&3&3\\0&0&0&0\end{bmatrix} \text{ προέκυψε από τον } A = \begin{bmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&7\\-1&-3&3&4\end{bmatrix}.$$

Για αλλαγή, θα εξετάσουμε τους τέσσερις υποχώρους με μια πιο ενδιαφέρουσα σειρά.

3. Ο χώρος γραμμών του A Ο χώρος γραμμών ενός κλιμακωτού πίνακα, όπως είναι ο U, είναι ξεκάθαρος. Περιέχει όλους τους συνδυασμούς των γραμμών, όπως κάθε χώρος γραμμών —αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση η τρίτη γραμμή δεν συνεισφέρει τίποτα. Οι δύο πρώτες γραμμές είναι μια βάση του χώρου γραμμών. Αντίστοιχος κανόνας ισχύει για κάθε κλιμακωτό πίνακα U ή R με r οδηγούς και r μη μηδενικές γραμμές: ***Οι μη μηδενικές γραμμές είναι μια βάση και ο χώρος γραμμών έχει διάσταση r***. Αυτό μας βοηθάει να βρούμε τον χώρο γραμμών του αρχικού πίνακα A.

2ΙΓ Ο χώρος γραμμών του A έχει την ίδια διάσταση r με τον χώρο γραμμών του U και έχει τις ίδιες βάσεις, διότι ***οι χώροι γραμμών των A και U (και R) είναι ίδιοι***.

Ο λόγος είναι ότι καμία στοιχειώδης πράξη δεν μεταβάλλει τον χώρο γραμμών. Οι γραμμές του U είναι συνδυασμοί των αρχικών γραμμών του A. Άρα ο χώρος γραμμών του U δεν περιέχει τίποτα καινούργιο. Ταυτόχρονα, αφού κάθε βήμα μπορεί να αντιστραφεί, δεν χάνεται τίποτα· οι γραμμές του A μπορούν να ανακατασκευαστούν από τον U. Οι A και U έχουν πράγματι διαφορετικές γραμμές, αλλά οι *συνδυασμοί* των γραμμών είναι οι ίδιοι: *ίδιος χώρος*!

Προσέξτε ότι η στρατηγική μας δεν ήταν να ξεκινήσουμε με τις m γραμμές του A, οι οποίες παράγουν τον χώρο γραμμών, και απορρίπτοντας τις $m-r$ από αυτές να καταλήξουμε σε μια βάση. Σύμφωνα με το 2ΙΒ, θα μπορούσαμε να το κάνουμε. Ίσως όμως να ήταν δύσκολο να αποφασίσουμε ποιες γραμμές να κρατήσουμε και ποιες να απορρίψουμε· ήταν ευκολότερο να πάρουμε τις μη μηδενικές γραμμές του U.

2. Ο μηδενόχωρος του A Η απαλοιφή απλοποιεί ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων χωρίς να αλλάζει τις λύσεις. Το σύστημα $Ax = 0$ ανάγεται στο $Ux = 0$, και η διαδικασία είναι αντιστρέψιμη. ***Ο μηδενόχωρος του A είναι ο ίδιος με τον μηδενόχωρο των U και R***. Μόνο r από τις εξισώσεις του $Ax = 0$ είναι ανεξάρτητες. Επιλέγοντας τις $n - r$ «ειδικές λύσεις» του $Ax = 0$, διαθέτουμε μια ορισμένη βάση του μηδενόχωρου:

2ΙΔ Ο μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A)$ έχει διάσταση $n-r$. Οι «ειδικές λύσεις» είναι μια βάση —δίνουμε διαδοχικά σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή την τιμή 1, ενώ στις υπόλοιπες ελεύθερες μεταβλητές δίνουμε την τιμή 0. Οι οδηγικές μεταβλητές προκύπτουν από το $Ax=0$, ή το $Ux=0$, ή το $Rx=0$ με ανάδρομη αντικατάσταση.

Αυτός ακριβώς είναι ο τρόπος με τον οποίο λύσαμε το $Ux=0$. Στο παραπάνω βασικό παράδειγμα, οι οδηγοί βρίσκονται στις στήλες 1 και 3. Άρα οι ελεύθερες μεταβλητές είναι το δεύτερο και τέταρτο v και y. Η βάση του μηδενόχωρου είναι

$$\textbf{Ειδικές λύσεις} \qquad \begin{matrix} v=1 \\ y=0 \end{matrix} \quad x_1=\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}. \qquad \begin{matrix} v=0 \\ y=1 \end{matrix} \quad x_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Κάθε συνδυασμός $c_1x_1+c_2x_2$ έχει το c_1 ως συνιστώσα v και το c_2 ως συνιστώσα y. Ο μόνος τρόπος να έχουμε $c_1x_1+c_2x_2=0$ είναι να έχουμε $c_1=c_2=0$, άρα τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. Τα διανύσματα αυτά παράγουν και τον μηδενόχωρο· η πλήρης λύση είναι η vx_1+yx_2. Επομένως, τα $n-r=4-2$ διανύσματα είναι μια βάση.

Ο μηδενόχωρος καλείται επίσης *πυρήνας* του A, ενώ η διάστασή του $n-r$ είναι η *μηδενικότητα*.

1. Ο χώρος στηλών του A Ο χώρος στηλών καλείται μερικές φορές **πεδίο τιμών**. Αυτό συμφωνεί με τη συνήθη σημασία του πεδίου τιμών, ως του συνόλου όλων των δυνατών τιμών $f(x)$· το x ανήκει στο πεδίο ορισμού και το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο τιμών. Στην περίπτωσή μας, η συνάρτηση είναι η $f(x)=Ax$. Το πεδίο ορισμού της αποτελείται από όλα τα x του $\mathbf{R}^n$. Το πεδίο τιμών της είναι όλα τα δυνατά διανύσματα Ax, τα οποία είναι ο χώρος στηλών. (Σε προηγούμενη έκδοση αυτού του βιβλίου το καλούσαμε $R(A)$.)

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε βάσεις για τους χώρους στηλών των U και A. ***Οι χώροι αυτοί είναι διαφορετικοί*** (αρκεί να κοιτάξετε τους πίνακες!) αλλά οι διαστάσεις τους είναι ίδιες.

Η πρώτη και η τρίτη στήλη του U είναι μια βάση του χώρου στηλών του. Είναι οι ***στήλες με οδηγούς***. Όλες οι άλλες στήλες είναι συνδυασμοί αυτών των δύο. Το ίδιο ισχύει για τον αρχικό A —μολονότι οι στήλες του είναι διαφορετικές. ***Οι στήλες οδηγοί του A είναι μια βάση του χώρου στηλών του***. Η δεύτερη στήλη ισούται με τρία επί την πρώτη, ακριβώς όπως στον U. Η τέταρτη στήλη ισούται με (στήλη 3) − (στήλη 1). Οι εξαρτήσεις αυτές προκύπτουν και από το γεγονός ότι οι μηδενόχωροι είναι ίδιοι.

Ο λόγος είναι ο εξής: $Ax=0$ *αν και μόνο αν* $Ux=0$. Τα δύο συστήματα είναι ισοδύναμα και έχουν τις ίδιες λύσεις. Η τέταρτη στήλη του U ήταν επίσης (στήλη 3) − (στήλη 1). Σε κάθε γραμμική εξάρτηση $Ax=0$ μεταξύ των στηλών του A αντιστοιχεί μια εξάρτηση $Ux=0$ μεταξύ των στηλών του U, με ακριβώς τους ίδιους συντελεστές. *Αν κάποιες στήλες του A είναι ανεξάρτητες, το ίδιο ισχύει για τις αντίστοιχες στήλες του U και αντιστρόφως.*

Για να βρούμε μια βάση του χώρου στηλών $\boldsymbol{C}(A)$, χρησιμοποιούμε ό,τι έχουμε ήδη κάνει για τον U. Οι r στήλες που περιέχουν τους οδηγούς είναι μια βάση του χώρου στηλών του U. Επιλέγουμε τις ίδιες r στήλες του A:

2ΙΕ Η διάσταση του χώρου στηλών $\boldsymbol{C}(A)$ ισούται με την τάξη r, η οποία ισούται επίσης με τη διάσταση του χώρου γραμμών: ***Το πλήθος των ανεξάρτητων στηλών ισούται με το πλήθος των ανεξάρτητων γραμμών***. Μια βάση του $\boldsymbol{C}(A)$ σχηματίζεται από τις r στήλες του A που αντιστοιχούν, στον U, στις στήλες που περιέχουν οδηγούς.

Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών έχουν την ίδια διάσταση r! Αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας. Πολλές φορές γράφεται σύντομα ως «***τάξη γραμμών = τάξη στηλών***». Εκφράζει ένα αποτέλεσμα το οποίο, για έναν τυχαίο 10 επί 12 πίνακα, δεν είναι καθόλου προφανές. Λέει επίσης κάτι για τους τετραγωνικούς πίνακες: *Αν οι γραμμές ενός τετραγωνικού πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες και οι στήλες* (και αντιστρόφως). Και πάλι, αυτό δεν είναι προφανές (τουλάχιστον, για τον συγγραφέα).

Για να δούμε για ακόμη μία φορά ότι ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών του U έχουν αμφότεροι διάσταση r, θα θεωρήσουμε μια τυπική περίπτωση με τάξη $r = 3$. Ο κλιμακωτός πίνακας U έχει σίγουρα τρεις ανεξάρτητες γραμμές:

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι ο U έχει και αυτός τρεις ανεξάρτητες στήλες, και καμία επιπλέον. Οι στήλες έχουν μόνο τρεις μη μηδενικές συνιστώσες. Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι οι στήλες οδηγοί —η πρώτη, η τέταρτη και η έκτη— είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε πρέπει να αποτελούν μια βάση (του χώρου στηλών του U, όχι του A!). Υποθέτουμε ότι κάποιος συνδυασμός αυτών των στηλών οδηγών παράγει το μηδέν:

$$c_1 \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} * \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Εργαζόμενοι ανάδρομα με τον συνήθη τρόπο, βρίσκουμε ότι το c_3 πρέπει να είναι μηδέν διότι ο οδηγός d_3 είναι διάφορος του 0, κατόπιν ότι το c_2 πρέπει να είναι μηδέν διότι $d_2 \neq 0$, και τέλος ότι $c_1 = 0$. Άρα αποδείξαμε την ανεξαρτησία. Αφού $Ax = 0$ αν και μόνο αν $Ux = 0$, η πρώτη, η τέταρτη και η έκτη στήλη του A —όποιος και να είναι ο αρχικός πίνακας A, τον οποίο δεν γνωρίζουμε καν στο συγκεκριμένο παράδειγμα— είναι μια βάση του $\boldsymbol{C}(A)$.

Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών φάνηκαν και οι δύο ξεκάθαρα μετά την εφαρμογή της απαλοιφής στον A. Θα δούμε τώρα τον τέταρτο θεμελιώδη υπόχωρο, με τον οποίο δεν έχουμε ασχοληθεί μέχρι στιγμής. Αφού οι τρεις πρώτοι χώροι ήταν οι $\boldsymbol{C}(A)$, $\boldsymbol{N}(A)$ και $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$, ο τέταρτος χώρος πρέπει να είναι ο $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Είναι ο μηδενόχωρος του αναστρόφου, ή ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** του A. $A^{\mathrm{T}}y = 0$ σημαίνει ότι $y^{\mathrm{T}}A = 0$, και το διάνυσμα εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά του A.

4. Ο αριστερός μηδενόχωρος του $\boldsymbol{A}$ (= ο μηδενόχωρος του $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$) Αν ο A είναι ένας m επί n πίνακας, τότε ο A^{T} είναι n επί m. Ο μηδενόχωρός του είναι ένας υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$· το διάνυσμα y έχει m συνιστώσες. Αν γράψουμε το σύστημα στη μορφή $y^{\mathrm{T}}A = 0$, οι συνιστώσες του y πολλαπλασιάζουν τις *γραμμές* του A και παράγουν τη μηδενική γραμμή:

$$y^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \end{bmatrix}.$$

Η διάσταση αυτού του μηδενόχωρου $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ βρίσκεται εύκολα. Για *κάθε* πίνακα, ***το πλήθος των οδηγικών μεταβλητών συν το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών πρέπει να ισούται με το συνολικό πλήθος των στηλών***. Για τον A, είχαμε $r + (n - r) = n$. Με άλλα λόγια, τάξη συν μηδενικότητα ίσον n:

$$\textbf{διάσταση του } \boldsymbol{C}(A) + \textbf{διάσταση του } \boldsymbol{N}(A) = \textbf{πλήθος στηλών.}$$

Αυτή η σχέση ισχύει και για τον A^{T}, ο οποίος έχει m στήλες. Ο A^{T} είναι ένας εξίσου καλός πίνακας με τον A. Αλλά η διάσταση του χώρου στηλών του είναι επίσης r, άρα

$$r + \text{διάσταση } (\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})) = m. \tag{1}$$

2ΙΣΤ Ο αριστερός μηδενόχωρος $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$ έχει διάσταση $m - r$.

Οι $m - r$ λύσεις του $y^{\mathrm{T}}A = 0$ κρύβονται κάπου στην απαλοιφή. Οι γραμμές του A συνδυάζονται και παράγουν τις $m-r$ *μηδενικές γραμμές* του U. Ξεκινάμε από την $PA = LU$, ή την $L^{-1}PA = U$. Οι τελευταίες $m - r$ γραμμές του αντιστρέψιμου πίνακα $L^{-1}P$ πρέπει να είναι μια βάση αποτελούμενη από διανύσματα y του αριστερού μηδενόχωρου —επειδή πολλαπλασιάζουν τον A και δίνουν τις μηδενικές γραμμές του U.

Στο 3 επί 4 παράδειγμά μας, η μηδενική γραμμή ήταν η γραμμή 3 $-$ 2 (γραμμή 2) $+$ 5 (γραμμή 1). Άρα οι συνιστώσες του y είναι $5, -2, 1$. Αυτός ο συνδυασμός είναι ίδιος με τον $b_3 - 2b_2 + 5b_1$ στο δεξί μέλος, που οδηγεί στην τελική εξίσωση $0 = 0$. Αυτό το διάνυσμα y είναι μια βάση του αριστερού μηδενόχωρου, ο οποίος έχει διάσταση $m - r = 3 - 2 = 1$. Είναι η τελευταία γραμμή του $L^{-1}P$ και παράγει τη μηδενική γραμμή του U —και συχνά μπορούμε να τη δούμε χωρίς να υπολογίσουμε τον L^{-1}. Όταν δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι άλλο, μπορούμε πάντα να λύσουμε το $A^{\mathrm{T}}y = 0$.

Ομολογουμένως, μέχρι στιγμής δεν έχουμε αναφέρει σε αυτό το βιβλίο κάποιον λόγο για τον οποίο πρέπει να μας ενδιαφέρει ο $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}})$. Θα ήταν σωστό, αν και όχι πειστικό, να γράφαμε με πλάγια στοιχεία ότι *ο αριστερός μηδενόχωρος είναι και αυτός σημαντικός*. Στην επόμενη ενότητα θα έχουμε κάτι περισσότερο να πούμε, βρίσκοντας μια φυσική ερμηνεία για το y μέσω του κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff.

Γνωρίζουμε πλέον τις διαστάσεις των τεσσάρων χώρων. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα αποτελέσματα σε έναν πίνακα και να τα χαρακτηρίσουμε με ένα όνομα.

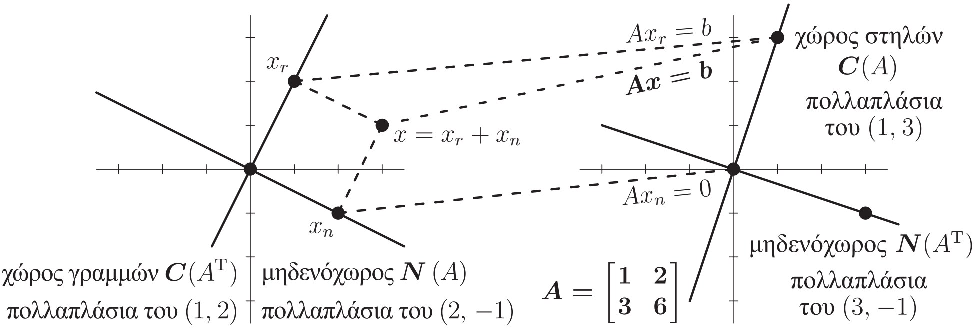
Θεμελιώδες θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας, Μέρος I

1. $\boldsymbol{C}(A) =$ χώρος στηλών του A, διάσταση r.
2. $\boldsymbol{N}(A) =$ μηδενόχωρος του A, διάσταση $n - r$.
3. $\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}}) =$ χώρος γραμμών του A, διάσταση r.
4. $\boldsymbol{N}(A^{\mathrm{T}}) =$ αριστερός μηδενόχωρος του A, διάσταση $m - r$.

Παράδειγμα 1 Για τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, έχουμε $m = n = 2$ και τάξη $r = 1$.

1. Ο ***χώρος στηλών*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. Η δεύτερη στήλη έχει την ίδια κατεύθυνση και δεν συνεισφέρει τίποτα καινούργιο.
2. Ο ***μηδενόχωρος*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Αυτό το διάνυσμα ικανοποιεί το $Ax = 0$.
3. Ο ***χώρος γραμμών*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. Το γράφουμε σαν διάνυσμα στήλη, αφού τυπικά ανήκει στον χώρο στηλών του A^{T}.
4. Ο ***αριστερός μηδενόχωρος*** περιέχει όλα τα πολλαπλάσια του $y = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Οι γραμμές του A με συντελεστές -3 και 1 έχουν άθροισμα μηδέν, άρα $A^{\mathrm{T}}y = 0$.

Σε αυτό το παράδειγμα *και οι τέσσερις υπόχωροι είναι ευθείες*. Αυτό είναι σύμπτωση και οφείλεται στο γεγονός ότι $r = 1$ και $n - r = 1$, $m - r = 1$. Στο Σχήμα 2.5 φαίνεται ότι υπάρχουν δύο ζεύγη κάθετων μεταξύ τους ευθειών. Αυτό δεν είναι σύμπτωση!



Σχήμα 2.5 Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι (ευθείες) του ιδιόμορφου πίνακα A.

Αν αλλάξουμε το τελευταίο στοιχείο του A από 6 σε 7, αλλάζουν όλες οι διαστάσεις. Ο χώρος στηλών και ο χώρος γραμμών έχουν διάσταση $r = 2$. Ο μηδενόχωρος και ο αριστερός μηδενόχωρος περιέχουν μόνο τα διανύσματα $x = 0$ και $y = 0$. *Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.*

Ύπαρξη αντιστρόφων

Γνωρίζουμε ότι αν ο A έχει αριστερό αντίστροφο ($BA = I$) και δεξιό αντίστροφο ($AC = I$), τότε οι δύο αντίστροφοι είναι ίσοι: $B = B(AC) = (BA)C = C$. Αν γνωρίζουμε την τάξη ενός πίνακα, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε αν έχει πράγματι αυτούς τους αντιστρόφους. Σε γενικές γραμμές, ***αντίστροφος υπάρχει μόνο όταν η τάξη είναι η μεγαλύτερη δυνατή***.

Η τάξη ικανοποιεί πάντα την $r \leq m$ και την $r \leq n$. Ένας m επί n πίνακας δεν μπορεί να έχει περισσότερες από m ανεξάρτητες γραμμές ή n ανεξάρτητες στήλες. Δεν υπάρχει χώρος για περισσότερους από m οδηγούς ή για περισσότερους από n. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι όταν $r = m$, υπάρχει δεξιός αντίστροφος και το $Ax = b$ έχει πάντα λύση. Όταν $r = n$, υπάρχει αριστερός αντίστροφος και η λύση (*αν υπάρχει*) είναι μοναδική.

Μόνο για έναν τετραγωνικό πίνακα μπορεί να ισχύει και $r = m$ και $r = n$, άρα μόνο για έναν τετραγωνικό πίνακα μπορεί να ισχύει και η ύπαρξη και η μοναδικότητα. Μόνο ένας τετραγωνικός πίνακας έχει αμφίπλευρο αντίστροφο.

2ΙΖ **ΥΠΑΡΞΗ: Πλήρης τάξη γραμμών $r = m$.** Το $Ax = b$ έχει ***τουλάχιστον*** μία λύση x για κάθε b αν και μόνο αν οι στήλες παράγουν τον $\mathbf{R}^m$. Σε αυτή την περίπτωση, ο A έχει έναν **δεξιό αντίστροφο** C τέτοιον ώστε $AC = I_m$ (m επί m). Αυτό είναι δυνατό μόνο αν $m \leq n$.

ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ: Πλήρης τάξη στηλών $r = n$. Το $Ax = b$ έχει ***το πολύ*** μία λύση x για κάθε b αν και μόνο αν οι στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Σε αυτή την περίπτωση, ο A έχει έναν n επί m **αριστερό αντίστροφο** B τέτοιον ώστε $BA = I_n$. Αυτό είναι δυνατό μόνο αν $m \geq n$.

Για την περίπτωση της ύπαρξης, μία δυνατή λύση είναι η $x = Cb$, αφού τότε $Ax = ACb = b$. Αν υπάρχουν και άλλοι δεξιοί αντίστροφοι, θα υπάρχουν όμως και άλλες λύσεις. Το πλήθος των λύσεων όταν οι στήλες παράγουν τον $\mathbf{R}^m$ είναι 1 ή ∞.

Για την περίπτωση της μοναδικότητας, αν το $Ax = b$ έχει λύση, αυτή πρέπει να είναι η $x = BAx = Bb$. Ενδέχεται όμως να μην υπάρχει καμία λύση. Το πλήθος των λύσεων είναι 0 ή 1.

Ο καλύτερος αριστερός και δεξιός αντίστροφος, αν υπάρχουν, δίνονται από τους εξής απλούς τύπους:

$$\textbf{Μονόπλευροι αντίστροφοι} \qquad B = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} \quad \text{και} \quad C = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Γνωρίζουμε σίγουρα ότι $BA = I$ και $AC = I$. Αυτό που δεν είναι τόσο σίγουρο είναι αν οι $A^{\mathrm{T}}A$ και AA^{T} είναι αντιστρέψιμοι. Στο Κεφάλαιο 3 θα δείξουμε ότι ο $A^{\mathrm{T}}A$ δεν έχει αντίστροφο αν η τάξη είναι n, και ότι ο AA^{T} έχει αντίστροφο όταν η τάξη είναι m. Επομένως, οι τύποι έχουν νόημα όταν η τάξη είναι η μεγαλύτερη δυνατή, και δίνουν τους μονόπλευρους αντιστρόφους.

Παράδειγμα 2 Έστω ένας απλός 2 επί 3 πίνακας τάξης 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφού $r = m = 2$, το θεώρημα διασφαλίζει ότι υπάρχει ένας δεξιός αντίστροφος C:

$$AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπάρχουν πολλοί δεξιοί αντίστροφοι, διότι η τελευταία γραμμή του C είναι εντελώς αυθαίρετη. Αυτή είναι μια περίπτωση ύπαρξης αλλά όχι μοναδικότητας. Ο πίνακας A δεν έχει αριστερό αντίστροφο, διότι η τελευταία στήλη του BA είναι σίγουρα μηδέν. Στον συγκεκριμένο δεξιό αντίστροφο $C = A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}$, τα c_{31} και c_{32} έχουν επιλεγεί να είναι μηδέν:

$$\textbf{Καλύτερος δεξιός αντίστροφος} \qquad A^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C.$$

Αυτός είναι ο *ψευδοαντίστροφος* —ένας τρόπος επιλογής του καλύτερου C στην Ενότητα 6.3. Ο ανάστροφος του A είναι ένα παράδειγμα ύπαρξης άπειρων το πλήθος *αριστερών* αντιστρόφων:

$$BA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & b_{13} \\ 0 & \frac{1}{5} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτή την περίπτωση, εντελώς αυθαίρετη είναι η τελευταία στήλη του B. Ο καλύτερος αριστερός αντίστροφος (επίσης ο ψευδοαντίστροφος) έχει $b_{13} = b_{23} = 0$. Αυτή είναι μια «περίπτωση μοναδικότητας», όταν η τάξη είναι $r = n$. Δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές, αφού $n - r = 0$. Αν υπάρχει λύση, θα είναι μόνο μία. Μπορούμε να δούμε πότε έχει μία ή καμία λύση το συγκεκριμένο παράδειγμα:

$$\text{Το} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{έχει λύση αν και μόνο αν} \quad b_3 = 0.$$

Για έναν παραλληλόγραμμο πίνακα δεν μπορούμε να έχουμε και ύπαρξη και μοναδικότητα. Αν το m είναι διαφορετικό από το n, δεν μπορούμε να έχουμε $r = m$ και $r = n$.

Για τους τετραγωνικούς πίνακες ισχύει το αντίθετο. Αν $m = n$, δεν μπορεί να ισχύει η μία ιδιότητα *χωρίς* να ισχύει η άλλη. Ένας τετραγωνικός πίνακας έχει αριστερό αντίστροφο αν και μόνο αν έχει δεξιό αντίστροφο. Υπάρχει μόνο ένας αντίστροφος, ο $B = C = A^{-1}$. *Όταν ο πίνακας είναι τετραγωνικός, η ύπαρξη συνεπάγεται τη μοναδικότητα και η μοναδικότητα συνεπάγεται την ύπαρξη*. Η συνθήκη αντιστρεψιμότητας είναι η **πλήρης τάξη**: $r = m = n$. Καθεμία από αυτές τις συνθήκες είναι ένα αναγκαίο και ικανό κριτήριο:

1. Οι στήλες παράγουν τον $\mathbf{R}^n$, άρα το $Ax = b$ έχει τουλάχιστον μία λύση για κάθε b.
2. Οι στήλες είναι ανεξάρτητες, άρα το $Ax = 0$ έχει μόνο τη λύση $x = 0$.

Ο κατάλογος αυτός μπορεί να γίνει πολύ μακρύτερος, ιδιαίτερα αν λάβουμε υπόψη και την ύλη των επόμενων κεφαλαίων. Κάθε συνθήκη είναι ισοδύναμη με όλες τις υπόλοιπες και διασφαλίζει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.

3. Οι γραμμές του A παράγουν τον $\mathbf{R}^n$.
4. Οι γραμμές είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
5. Η απαλοιφή μπορεί να ολοκληρωθεί: $PA = LDU$, με n οδηγούς συνολικά.
6. Η ορίζουσα του A δεν είναι μηδέν.
7. Το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του A.
8. Ο $A^{\mathrm{T}}A$ είναι θετικά ορισμένος.

Ακολουθεί μια τυπική εφαρμογή στα πολυώνυμα $P(t)$ βαθμού $n-1$. Το μόνο τέτοιο πολυώνυμο που μηδενίζεται στα $t_1, \ldots, t_n$ είναι το $P(t) \equiv 0$. Κανένα άλλο πολυώνυμο βαθμού $n-1$ δεν μπορεί να έχει n ρίζες. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε μοναδικότητα, η οποία συνεπάγεται την ύπαρξη: Δεδομένων οποιωνδήποτε τιμών $b_1, \ldots, b_n$, *υπάρχει* ένα πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού $n - 1$ για αυτές τις τιμές: $P(t_i) = b_i$. Το σημαντικό είναι ότι έχουμε να κάνουμε με τετραγωνικό πίνακα· ο αριθμός n των συντελεστών του $P(t) = x_1 + x_2t + \cdots + x_nt^{n-1}$

συμφωνεί με το πλήθος των εξισώσεων:

$$\textbf{Παρεβολή} \quad \boldsymbol{P(t_i) = b_i} \qquad \begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Αυτός ο *πίνακας Vandermonde* είναι n επί n και είναι πλήρους τάξης. Το $Ax = b$ έχει πάντα λύση —ένα πολυώνυμο μπορεί να εξαναγκαστεί να διέρχεται από οποιαδήποτε b_i σε διαφορετικά σημεία t_i. Αργότερα, θα βρούμε την ορίζουσα του A, η οποία δεν είναι μηδέν.

Πίνακες τάξης 1

Απομένει η ευκολότερη περίπτωση, όπου η τάξη είναι η *μικρότερη* δυνατή (με την εξαίρεση του μηδενικού πίνακα τάξης 0). Ένα βασικό ζητούμενο στα μαθηματικά είναι, δεδομένου κάποιου σύνθετου αντικειμένου, η εύρεση ενός τρόπου διάσπασής του σε απλά κομμάτια. Στη γραμμική άλγεβρα, τα απλά κομμάτια είναι οι πίνακες ***τάξης* 1**:

$$\textbf{Τάξη 1} \qquad \text{Ο } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{έχει } r = 1.$$

Κάθε γραμμή είναι πολλαπλάσιο της πρώτης γραμμής, άρα ο χώρος γραμμών είναι μονοδιάστατος. Μάλιστα, μπορούμε να γράψουμε ολόκληρο τον πίνακα σαν *το γινόμενο ενός διανύσματος στήλης με ένα διάνυσμα γραμμή*:

$$\boldsymbol{A = }\textbf{(στήλη)(γραμμή)} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το γινόμενο ενός 4 επί 1 πίνακα με έναν 1 επί 3 πίνακα είναι ένας 4 επί 3 πίνακας. *Η τάξη του γινομένου είναι 1.* Επιπλέον, οι στήλες είναι όλες πολλαπλάσια του ίδιου διανύσματος στήλης· ο χώρος στηλών έχει την ίδια διάσταση $r = 1$ και είναι μια ευθεία.

***Κάθε πίνακας τάξης* 1 *έχει την απλή μορφή* $\boldsymbol{A = uv^{\mathrm{T}}}$ = *στήλη επί γραμμή*.**

Οι γραμμές είναι όλες πολλαπλάσια του ίδιου διανύσματος v^{T} και οι στήλες είναι όλες πολλαπλάσια του u. Ο χώρος γραμμών και ο χώρος στηλών είναι ευθείες —η ευκολότερη περίπτωση.

Προβλήματα 2.4

1. Σωστό ή λάθος: Αν $m = n$, ο χώρος γραμμών του A ισούται με τον χώρο στηλών. Αν $m < n$, ο μηδενόχωρος έχει μεγαλύτερη διάσταση από ______.

2. Βρείτε τη διάσταση και κατασκευάστε μια βάση των τεσσάρων υποχώρων που σχετίζονται με καθέναν από τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Βρείτε τη διάσταση και μια βάση των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Περιγράψτε τους τέσσερις υποχώρους του τριδιάστατου χώρου που σχετίζονται με τον

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Αν το γινόμενο AB είναι ο μηδενικός πίνακας, δηλαδή $AB = 0$, δείξτε ότι ο χώρος στηλών του B περιέχεται στον μηδενόχωρο του A. (Και ο χώρος γραμμών του A περιέχεται στον αριστερό μηδενόχωρο του B, αφού κάθε γραμμή του A πολλαπλασιάζει τον B και δίνει μια μηδενική γραμμή.)

6. Υποθέστε ότι ο A είναι ένας m επί n πίνακας τάξης r. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν αυτοί οι αριθμοί ώστε

(α) ο A να έχει αμφίπλευρο αντίστροφο: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$;
(β) το $Ax = b$ να έχει *άπειρες* λύσεις για *κάθε* b;

7. Γιατί δεν υπάρχει πίνακας του οποίου ο χώρος γραμμών και ο μηδενόχωρος να περιέχουν αμφότεροι το $(1, 1, 1)$;

8. Έστω ότι η μοναδική λύση του $Ax = 0$ (m εξισώσεις με n αγνώστους) είναι η $x = 0$. Ποια είναι η τάξη και γιατί; Οι στήλες του A είναι γραμμικά ______.

9. Βρείτε έναν 1 επί 3 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να αποτελείται από όλα τα διανύσματα του $\mathbf{R}^3$ για τα οποία $x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$. Βρείτε έναν 3 επί 3 πίνακα με τον ίδιο μηδενόχωρο.

10. Αν το $Ax = b$ έχει πάντα τουλάχιστον μία λύση, δείξτε ότι η μοναδική λύση του $A^{\mathrm{T}}y = 0$ είναι η $y = 0$. *Υπόδειξη*: Ποια είναι η τάξη;

11. Αν το $Ax = 0$ έχει μη μηδενική λύση, δείξτε ότι το $A^{\mathrm{T}}y = f$ δεν έχει λύση για κάποια δεξιά μέλη f. Κατασκευάστε ένα παράδειγμα A και f.

12. Βρείτε την τάξη του A και γράψτε τον πίνακα ως $A = uv^{\mathrm{T}}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

13. Αν δίνονται τα a, b, c με $a \neq 0$, επιλέξτε το d έτσι ώστε ο

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = uv^{\mathrm{T}}$$

να έχει τάξη 1. Ποιοι είναι οι οδηγοί;

14. Βρείτε έναν αριστερό αντίστροφο και/ή έναν δεξιό αντίστροφο (αν υπάρχουν) των

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad T = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

15. Αν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες (ο A είναι m επί n), τότε η τάξη είναι ______, ο μηδενόχωρος είναι ______, ο χώρος γραμμών είναι ______ και υπάρχει ______ αντίστροφος.

16. (*Ένα παράδοξο*) Αν ο A έχει έναν δεξιό αντίστροφο B, τότε από την $AB = I$ παίρνουμε $A^{\mathrm{T}}AB = A^{\mathrm{T}}$, ή $B = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Αυτός ο πίνακας ικανοποιεί όμως την $BA = I$· είναι ένας *αριστερός* αντίστροφος. Ποιο βήμα είναι εσφαλμένο;

17. Βρείτε έναν πίνακα A που να έχει τον $\mathbf{V}$ ως χώρο γραμμών του και έναν πίνακα B που να έχει τον $\mathbf{V}$ ως μηδενόχωρό του, αν $\mathbf{V}$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από τα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

18. Βρείτε μια βάση καθενός από τους τέσσερις υποχώρους του

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

19. Αν ο A έχει τους ίδιους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους με τον B, ισχύει η $A = cB$;

20. (α) Αν ένας 7 επί 9 πίνακας έχει τάξη 5, ποια είναι η διάσταση των τεσσάρων υποχώρων; Ποιο είναι το άθροισμα και των τεσσάρων διαστάσεων;
(β) Αν ένας 3 επί 4 πίνακας έχει τάξη 3, ποιος είναι ο χώρος στηλών και ο αριστερός μηδενόχωρός του;

21. Κατασκευάστε έναν πίνακα που να ικανοποιεί τη ζητούμενη ιδιότητα ή εξηγήστε γιατί δεν μπορείτε να τον κατασκευάσετε.
(α) Ο χώρος στηλών περιέχει τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ο χώρος γραμμών περιέχει τα $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.
(β) Ο χώρος στηλών έχει βάση το $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ο μηδενόχωρος έχει βάση το $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(γ) Διάσταση του μηδενόχωρου $= 1 +$ διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου.
(δ) Ο αριστερός μηδενόχωρος περιέχει το $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, ο χώρος γραμμών περιέχει το $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(ε) Χώρος γραμμών $=$ χώρος στηλών, μηδενόχωρος $\neq$ αριστερός μηδενόχωρος.

22. Χωρίς να εφαρμόσετε απαλοιφή, βρείτε τις διαστάσεις και τις βάσεις των τεσσάρων υποχώρων των

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

23. Υποθέστε ότι ο 3 επί 3 πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Βρείτε βάσεις των τεσσάρων υποχώρων του A, καθώς και του 3 επί 6 πίνακα $B = [A \;\; A]$.

24. Ποιες είναι οι διαστάσεις των τεσσάρων υποχώρων των A, B και C, αν I είναι ο 3 επί 3 ταυτοτικός πίνακας και 0 είναι ο 3 επί 2 μηδενικός πίνακας;

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & I \\ 0^{\mathrm{T}} & 0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

25. Ποιοι υπόχωροι των παρακάτω πινάκων διαφορετικού μεγέθους είναι ίδιοι;

(α) $[A]$ και $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$. (β) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$.

Αποδείξτε ότι και οι τρεις πίνακες έχουν την ίδια τάξη r.

26. Αν τα στοιχεία ενός 3 επί 3 πίνακα επιλεγούν τυχαία μεταξύ 0 και 1, ποιες είναι οι πιθανότερες διαστάσεις των τεσσάρων υποχώρων; Τι θα συμβεί αν ο πίνακας είναι 3 επί 5;

27. (Σημαντικό) Ο A είναι ένας m επί n πίνακας τάξης r. Υποθέστε ότι υπάρχουν δεξιά μέλη b για τα οποία τα $Ax = b$ *δεν έχει λύση*.

(α) Ποιες ανισότητες ($<$ ή $\leq$) πρέπει να ικανοποιούν τα m, n και r;
(β) Πώς ξέρουμε ότι το $A^{\mathrm{T}}y = 0$ έχει μη μηδενική λύση;

28. Κατασκευάστε έναν πίνακα για τον οποίο τα $(1, 0, 1)$ και $(1, 2, 0)$ να είναι βάση του χώρου γραμμών και του χώρου στηλών του. Γιατί δεν μπορούν τα διανύσματα αυτά να είναι βάση του χώρου γραμμών και του μηδενόχωρου;

29. Χωρίς να υπολογίστε τον A, βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

30. Αν αντιμεταθέσουμε τις δύο πρώτες γραμμές ενός πίνακα A, ποιοι από τους τέσσερις υποχώρους παραμένουν ίδιοι; Αν το $y = (1, 2, 3, 4)$ ανήκει στον αριστερό μηδενόχωρο του A, γράψτε ένα διάνυσμα του αριστερού μηδενόχωρου του νέου πίνακα.

31. Εξηγήστε γιατί το $v = (1, 0, -1)$ δεν μπορεί να είναι γραμμή του A και να ανήκει και στον μηδενόχωρο.

32. Περιγράψτε τους τέσσερις υποχώρους του $\mathbf{R}^3$ που σχετίζονται με τους

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

33. (Αριστερός μηδενόχωρος) Προσθέστε την επιπλέον στήλη b και αναγάγετε τον A σε κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 4 & 5 & 6 & b_2 \\ 7 & 8 & 9 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Η μηδενική γραμμή προέκυψε από κάποιο συνδυασμό των γραμμών του A. Ποιος είναι αυτός ο συνδυασμός; (Κοιτάξτε το $b_3 - 2b_2 + b_1$ στο δεξί μέλος.) Ποια διανύσματα ανήκουν στον μηδενόχωρο του A^{T} και ποια στον μηδενόχωρο του A;

34. Ακολουθώντας τη μέθοδο του Προβλήματος 33, αναγάγετε τον A σε κλιμακωτή μορφή και κοιτάξτε τις μηδενικές γραμμές. Η στήλη b αποκαλύπτει ποιους συνδυασμούς γραμμών έχετε πάρει:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 3 & 4 & b_2 \\ 4 & 6 & b_3 \end{bmatrix}$. (β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & b_3 \\ 2 & 5 & b_4 \end{bmatrix}$.

Από τη στήλη b μετά την απαλοιφή, βρείτε κατευθείαν $m - r$ διανύσματα βάσης του αριστερού μηδενόχωρου του A (συνδυασμούς των γραμμών που δίνουν μηδέν).

35. Έστω ότι ο A είναι το άθροισμα δύο πινάκων τάξης 1: $A = uv^{\mathrm{T}} + wz^{\mathrm{T}}$.

(α) Ποια διανύσματα παράγουν τον χώρο στηλών του A;
(β) Ποια διανύσματα παράγουν τον χώρο γραμμών του A;
(γ) Η τάξη είναι μικρότερη από 2 αν ______ ή αν ______.
(δ) Υπολογίστε τον A και την τάξη του αν $u = z = (1, 0, 0)$ και $v = w = (0, 0, 1)$.

36. Χωρίς να πολλαπλασιάσετε τους πίνακες, βρείτε βάσεις των χώρων γραμμών και στηλών του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Πώς προκύπτει από αυτά τα σχήματα ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος;

37. Σωστό ή λάθος (αιτιολογήστε ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα);

(α) Οι A και A^{T} έχουν το ίδιο πλήθος οδηγών.
(β) Οι A και A^{T} έχουν τον ίδιο αριστερό μηδενόχωρο.
(γ) Αν ο χώρος γραμμών ισούται με τον χώρο στηλών, τότε $A^{\mathrm{T}} = A$.
(δ) Αν $A^{\mathrm{T}} = -A$, τότε ο χώρος γραμμών του A ισούται με τον χώρο στηλών.

38. Αν $AB = 0$, οι στήλες του B ανήκουν στον μηδενόχωρο του A. Αν τα διανύσματα αυτά ανήκουν στον $\mathbf{R}^n$, δείξτε ότι τάξη(A) + τάξη$(B) \leq n$.

39. Μπορεί να ολοκληρωθεί η τρίλιζα (5 μονάδες και 4 μηδενικά στον A) με τρόπο ώστε τάξη$(A) = 2$, αλλά κανένας από τους δύο παίκτες να μην έχει χάσει κάποια κίνηση που θα οδηγούσε σε νίκη;

40. Κατασκευάστε έναν 2 επί 3 πίνακα τάξης 1. Αντιγράψτε το Σχήμα 2.5 και βάλτε ένα διάνυσμα σε κάθε υπόχωρο (δύο στον μηδενόχωρο). Ποια διανύσματα είναι ορθογώνια;

41. Σχεδιάστε ξανά το Σχήμα 2.5 για έναν 3 επί 2 πίνακα τάξης $r = 2$. Ποιος υπόχωρος είναι ο $\boldsymbol{Z}$ (μόνο το μηδενικό διάνυσμα); Το τμήμα μηδενόχωρου οποιουδήποτε διανύσματος x του $\mathbf{R}^2$ είναι $x_n =$ ______.

2.5 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ

Ο 3 επί 4 πίνακας της προηγούμενης ενότητας δεν ήταν ακριβώς αυτό που θα θέλαμε. Από θεωρητικής πλευράς ήταν πολύ ικανοποιητικός· μπορέσαμε να υπολογίσουμε τους τέσσερις υποχώρους, και οι διαστάσεις τους r, $n - r$, r, $m - r$ ήταν μη μηδενικές. Ωστόσο, το παράδειγμα δεν προέκυψε από κάποια πραγματική εφαρμογή. Δεν μας απέδειξε τη θεμελιώδη σημασία αυτών των υποχώρων.

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια κατηγορία παραλληλόγραμμων πινάκων με δύο πλεονεκτήματα. Είναι απλοί και σημαντικοί. Πρόκειται για τους ***πίνακες πρόσπτωσης των γραφημάτων***, τα στοιχεία των οποίων είναι 1, -1 ή 0. Αυτό που είναι αξιοσημείωτο είναι ότι τα ίδια ισχύουν για τους L και U και για τα διανύσματα βάσης και των τεσσάρων υποχώρων. Οι υπόχωροι αυτοί παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία δικτύων. Τονίζουμε ότι η λέξη «γράφημα» δεν αναφέρεται στο γράφημα μιας συνάρτησης (όπως είναι η παραβολή $y = x^2$). Υπάρχει μια δεύτερη σημασία, εντελώς διαφορετική, η οποία συνδέεται στενότερα με την επιστήμη υπολογιστών από ό,τι με τον απειροστικό λογισμό —και εξηγείται εύκολα. *Αυτή η ενότητα είναι προαιρετική*, αλλά μας δίνει την ευκαιρία να δούμε τους παραλληλόγραμμους πίνακες εν δράσει —και πώς εμφανίζεται στο τέλος ο τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας $A^{\mathrm{T}}A$.

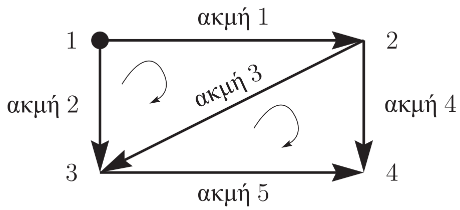
Ένα ***γράφημα*** αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών ή *κόμβων* και από ένα σύνολο *ακμών* που τους συνδέουν. Το γράφημα του Σχήματος 2.6 έχει 4 κόμβους και 5 ακμές. Δεν υπάρχει ακμή μεταξύ των κόμβων 1 και 4 (και δεν επιτρέπονται ακμές από έναν κόμβο προς στον εαυτό του). Το συγκεκριμένο γράφημα είναι *προσανατολισμένο*, διότι κάθε ακμή έχει ένα βέλος.

Ο ***πίνακας πρόσπτωσης ακμών–κόμβων*** είναι 5 επί 4 και περιέχει μια γραμμή για κάθε ακμή. ***Αν η ακμή πηγαίνει από τον κόμβο j στον κόμβο k, τότε η συγκεκριμένη γραμμή έχει -1 στη στήλη j και $+1$ στη στήλη k***. Ο πίνακας πρόσπτωσης A παρουσιάζεται δίπλα στο γράφημα (και θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε το γράφημα αν διαθέταμε μόνο τον A). Η γραμμή 1 αναπαριστά την ακμή που ξεκινάει από τον κόμβο 1 και καταλήγει στον κόμβο 2. Η γραμμή 5 προκύπτει από την πέμπτη ακμή, που ξεκινάει από τον κόμβο 3 και καταλήγει στον κόμβο 4.

Προσέξτε τις στήλες του A. Η στήλη 3 παρέχει πληροφορίες για τον κόμβο 3 —μας λέει ποιες ακμές εισέρχονται και ποιες εξέρχονται. Οι ακμές 2 και 3 εισέρχονται, ενώ η ακμή 5 εξέρχεται (με το αρνητικό πρόσημο). Ο A καλείται μερικές φορές πίνακας *συνεκτικότητας* ή πίνακας *τοπολογίας*. Όταν το γράφημα έχει m ακμές και n κόμβους, ο A είναι m επί n (και συνήθως $m > n$). Ο ανάστροφός του είναι ο πίνακας πρόσπτωσης «κόμβων–ακμών».

Καθένας από τους τέσσερις θεμελιώδεις υποχώρους μπορεί να ερμηνευτεί με βάση το γράφημα. Μπορούμε να κάνουμε γραμμική άλγεβρα ή να μιλήσουμε για τάσεις και ρεύματα. Θα κάνουμε και τα δύο!

Μηδενόχωρος του A: Υπάρχει κάποιος συνδυασμός των στηλών που δίνει $Ax = 0$; Κανονικά, την απάντηση δίνει η απαλοιφή, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση τη βρίσκουμε



$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{κόμβος} & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Σχήμα 2.6 Ένα προσανατολισμένο γράφημα (5 ακμές, 4 κόμβοι, 2 βρόχοι) και ο αντίστοιχος πίνακας πρόσπτωσης A.

κοιτάζοντας απλώς τον πίνακα. *Το άθροισμα των στηλών είναι η μηδενική στήλη*. Ο μηδενόχωρος περιέχει το $x = (1, 1, 1, 1)$, αφού $Ax = 0$. Η εξίσωση $Ax = b$ δεν έχει μοναδική λύση (αν έχει καν λύση). Σε οποιαδήποτε μερική λύση του $Ax = b$ μπορεί να προστεθεί οποιοδήποτε «σταθερό διάνυσμα» $x = (c, c, c, c)$. Η πλήρης λύση έχει αυτή την αυθαίρετη σταθερά c (αντίστοιχη με τη σταθερά $+C$ των ολοκληρωμάτων που υπολογίζουμε στον απειροστικό λογισμό).

Μια δυνατή ερμηνεία προκύπτει αν φανταστούμε τα x_1, x_2, x_3, x_4 σαν τα ***δυναμικά*** (τις τάσεις) ***κάθε κόμβου***. Οι πέντε συνιστώσες του Ax δίνουν τις ***διαφορές*** δυναμικού κατά μήκος των πέντε ακμών. Η διαφορά κατά μήκος της ακμής 1 είναι $x_2 - x_1$, λόγω των ± 1 στην πρώτη γραμμή.

Η εξίσωση $Ax = b$ αντιστοιχεί στο εξής πρόβλημα: Δεδομένων των διαφορών $b_1, \ldots, b_5$, ζητούνται τα δυναμικά $x_1, \ldots, x_4$. Αυτό όμως είναι αδύνατο! Μπορούμε να αυξήσουμε ή να μειώσουμε τα δυναμικά κατά την ίδια σταθερά c, χωρίς να αλλάξουν οι διαφορές —πράγμα που επιβεβαιώνει το γεγονός ότι το $x = (c, c, c, c)$ ανήκει στον μηδενόχωρο του A. Αυτά είναι τα μόνα διανύσματα του μηδενόχωρου, αφού $Ax = 0$ σημαίνει ίσα δυναμικά κατά μήκος κάθε ακμής. Ο μηδενόχωρος αυτού του πίνακα πρόσπτωσης είναι μονοδιάστατος. ***Η τάξη είναι*** $\mathbf{4 - 1 = 3}$.

Χώρος στηλών: Για ποιες διαφορές $b_1, \ldots, b_5$ έχει λύση το $Ax = b$; Για να μπορέσουμε να βρούμε ένα απευθείας κριτήριο, κοιτάζουμε ξανά τον πίνακα. Γραμμή 1 συν γραμμή 3 ίσον γραμμή 2. Στο δεξί μέλος πρέπει να έχουμε $b_1 + b_3 = b_2$, διαφορετικά είναι αδύνατο να υπάρχει λύση. Με αντίστοιχο τρόπο, γραμμή 3 συν γραμμή 5 ίσον γραμμή 4. Το δεξί μέλος πρέπει να ικανοποιεί την $b_3 + b_5 = b_4$, ώστε η απαλοιφή να καταλήξει στην $0 = 0$. Επαναλαμβάνουμε: αν το b ανήκει στον χώρο στηλών, τότε

$$b_1 - b_2 + b_3 = 0 \quad \text{και} \quad b_3 - b_4 + b_5 = 0. \tag{1}$$

Συνεχίζοντας την αναζήτηση, βρίσκουμε επίσης ότι οι γραμμές $1+4$ ισούνται με τις γραμμές $2+5$. Αυτό όμως δεν είναι κάτι καινούργιο· αφαιρώντας τις εξισώσεις (1) παίρνουμε $b_1 + b_4 = b_2 + b_5$. Οι πέντε συνιστώσες πρέπει να ικανοποιούν *δύο συνθήκες*, διότι ο χώρος στηλών έχει διάσταση $5-2$. Οι συνθήκες αυτές θα προέκυπταν από την απαλοιφή, αλλά στη συγκεκριμένη περίπτωση η σημασία τους προκύπτει από το γράφημα.

Βρόχοι: Ο κανόνας τάσεων του Kirchhoff λέει ότι οι *διαφορές δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου έχουν άθροισμα μηδέν*. Κατά μήκος του επάνω βρόχου του Σχήματος 2.6, οι διαφορές ικανοποιούν την $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = (x_3 - x_1)$. Οι διαφορές αυτές είναι $b_1 + b_3 = b_2$. Για να διανύσουμε τον κάτω βρόχο και να επιστρέψουμε στο ίδιο δυναμικό, πρέπει να έχουμε $b_3 + b_5 = b_4$.

2ΙΗ Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε να ανήκει στον χώρο στηλών είναι ο ***κανόνας τάσεων του Kirchhoff***:

Το άθροισμα των διαφορών δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου πρέπει να είναι μηδέν.

Αριστερός μηδενόχωρος: Για να λύσουμε το $A^{\mathrm{T}} y = 0$, βρίσκουμε τη σημασία του στο γράφημα. Το διάνυσμα y έχει πέντε συνιστώσες, μία για κάθε ακμή. Οι αριθμοί αυτοί αντιπροσωπεύουν τα **ρεύματα** που ρέουν κατά μήκος των πέντε ακμών. Αφού ο A^{T} είναι 4 επί 5, οι εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}y = 0$ δίνουν τέσσερις συνθήκες για τα πέντε αυτά ρεύματα, μία συνθήκη «διατήρησης» για κάθε κόμβο: **Η εισερχόμενη ροή ισούται με την εξερχόμενη ροή σε κάθε κόμβο**:

$$A^{\mathrm{T}}y = \mathbf{0} \qquad \begin{aligned} -y_1 - y_2 \qquad &= 0 \\ y_1 - y_3 - y_4 &= 0 \\ y_2 + y_3 - y_5 &= 0 \\ y_4 + y_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{Το συνολικό ρεύμα στον κόμβο 1 είναι μηδέν} \\ &\text{στον κόμβο 2} \\ &\text{στον κόμβο 3} \\ &\text{στον κόμβο 4} \end{aligned}$$

Η ομορφιά της θεωρίας δικτύων είναι ότι οι A και A^{T} παίζουν και οι δύο σημαντικό ρόλο.

Επίλυση του $A^{\mathrm{T}}y = 0$ σημαίνει εύρεση ενός συνόλου ρευμάτων που δεν «συσσωρεύονται» σε κανέναν κόμβο. Η κυκλοφορία συνεχίζεται, και οι απλούστερες λύσεις είναι τα **ρεύματα κατά μήκος των μικρών βρόχων**. Τα γράφημά μας έχει δύο βρόχους, και στέλνουμε ρεύμα έντασης 1 amp κατά μήκος κάθε βρόχου:

$$\textbf{Διανύσματα βρόχων} \qquad y_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad y_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Κάθε βρόχος παράγει ένα διάνυσμα y του αριστερού μηδενόχωρου. Η συνιστώσα $+1$ ή -1 δηλώνει αν το ρεύμα έχει τη φορά του βέλους ή αντίθετη φορά. Οι συνδυασμοί των y_1 και y_2 γεμίζουν τον αριστερό μηδενόχωρο, άρα τα y_1 και y_2 είναι μια βάση (η διάσταση έπρεπε να είναι $m - r = 5 - 3 = 2$). Το $y_1 - y_2 = (1, -1, 0, 1, -1)$ αντιστοιχεί στον μεγάλο, εξωτερικό βρόχο του γραφήματος.

Ο χώρος στηλών και ο αριστερός μηδενόχωρος σχετίζονται στενά μεταξύ τους. Ο αριστερός μηδενόχωρος περιέχει το $y_1 = (1, -1, 1, 0, 0)$, ενώ τα διανύσματα του χώρου στηλών ικανοποιούν την $b_1 - b_2 + b_3 = 0$. Επομένως, $y^{\mathrm{T}}b = 0$: Τα διανύσματα του χώρου στηλών και του αριστερού μηδενόχωρου είναι ορθογώνια μεταξύ τους! Αυτό θα αποτελέσει σύντομα το δεύτερο μέρος του «θεμελιώδους θεωρήματος της γραμμικής άλγεβρας».

Χώρος γραμμών: Ο χώρος γραμμών του A περιέχει τα διανύσματα του $\mathbf{R}^4$, αλλά όχι όλα τα διανύσματα. Η διάστασή του είναι η τάξη $r = 3$. Μέσω της απαλοιφής βρίσκουμε τρεις ανεξάρτητες γραμμές, αλλά μπορούμε να κοιτάξουμε και το γράφημα. Οι τρεις πρώτες γραμμές είναι *εξαρτημένες* (γραμμή 1 + γραμμή 3 = γραμμή 2· οι ακμές αυτές σχηματίζουν βρόχο). Οι *γραμμές* 1, 2, 4 *είναι ανεξάρτητες, διότι οι ακμές* 1, 2, 4 *δεν περιέχουν βρόχους.*

Οι γραμμές 1, 2, 4 είναι μια βάση του χώρου γραμμών. *Τα στοιχεία κάθε γραμμής έχουν άθροισμα μηδέν*. Κάθε συνδυασμός (f_1, f_2, f_3, f_4) του χώρου γραμμών θα έχει την εξής ιδιότητα:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f} \textbf{ στον χώρο γραμμών} \qquad && f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0 \\ &\boldsymbol{x} \textbf{ στον μηδενόχωρο} && x = c(1, 1, 1, 1) \end{aligned} \tag{2}$$

Καταλήγουμε ξανά στο θεμελιώδες θεώρημα: Ο χώρος γραμμών είναι ορθογώνιος στον μηδενόχωρο. *Αν το f ανήκει στον χώρο γραμμών και το x ανήκει στον μηδενόχωρο, τότε $f^{\mathrm{T}}x = 0$.*

Για τον πίνακα A^{T}, ο βασικός νόμος της θεωρίας δικτύων είναι ο ***κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff***. *Η συνολική εισερχόμενη ροή σε κάθε κόμβο είναι μηδέν*. Οι αριθμοί f_1, f_2, f_3, f_4 είναι πηγές ρευμάτων που εισέρχονται στους κόμβους. Η πηγή f_1 πρέπει να αντισταθμίσει το

$-y_1 - y_2$, που είναι η ροή που εγκαταλείπει τον κόμβο 1 (κατά μήκος των ακμών 1 και 2). Αυτή είναι η πρώτη εξίσωση του $A^{\mathrm{T}}y = f$. Αντίστοιχα πράγματα ισχύουν για τους άλλους τρεις κόμβους —λόγω της διατήρησης του φορτίου πρέπει να έχουμε *εισερχόμενη ροή* $=$ *εξερχόμενη ροή*. Το ωραίο είναι ότι ο $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ ***είναι ακριβώς ο πίνακας που χρειάζεται για τον κανόνα ρευμάτων***.

2ΙΘ Οι εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}y = f$ στους κόμβους εκφράζουν τον ***κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff***:

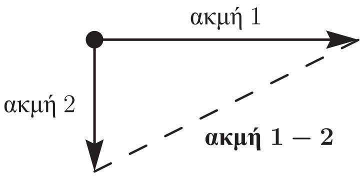
Το καθαρό ρεύμα που εισέρχεται σε κάθε κόμβο είναι μηδέν.
Εισερχόμενη ροή = Εξερχόμενη ροή.

Ο νόμος αυτός μπορεί να ικανοποιείται μόνο αν το συνολικό ρεύμα που εισέρχεται από έξω είναι $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$. Για $f = 0$, ο νόμος $A^{\mathrm{T}}y = 0$ ικανοποιείται από ***ένα ρεύμα που ρέει κατά μήκος ενός βρόχου***.

Ζευγνύοντα δέντρα και ανεξάρτητες γραμμές

Κάθε συνιστώσα των y_1 και y_2 του αριστερού μηδενόχωρου είναι 1 ή -1 ή 0 (λόγω των ροών κατά μήκος των βρόχων). Το ίδιο ισχύει για το $x = (1, 1, 1, 1)$ του μηδενόχωρου και για όλα τα στοιχεία των πινάκων της $PA = LDU$! Η βασική ιδέα είναι ότι κάθε βήμα της απαλοιφής έχει κάποια σημασία για το γράφημα.

Μπορούμε να το δούμε στο πρώτο βήμα για τον πίνακα A: *αφαιρούμε τη γραμμή 1 από τη γραμμή 2*. Με αυτόν τον τρόπο, η ακμή 2 αντικαθίσταται από μια νέα ακμή «1 μείον 2»:



γραμμή 1	-1	1	0	0
γραμμή 2	-1	0	1	0
γραμμή 1 − 2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$

Αυτό το βήμα της απαλοιφής καταστρέφει μια ακμή και δημιουργεί μια νέα. Η νέα ακμή «1 − 2» είναι απλώς η παλιά ακμή 3 με αντίθετη κατεύθυνση. Στο επόμενο βήμα της απαλοιφής θα παραχθούν μηδενικά στη γραμμή 3 του πίνακα. Αυτό δείχνει ότι οι γραμμές $1, 2, 3$ είναι εξαρτημένες. *Οι γραμμές είναι εξαρτημένες αν οι αντίστοιχες ακμές περιέχουν κάποιο βρόχο.*

Στο τέλος της απαλοιφής έχουμε ένα πλήρες σύνολο r ανεξάρτητων γραμμών. **Οι $\boldsymbol{r}$ αυτές ακμές σχηματίζουν ένα δέντρο —ένα γράφημα χωρίς βρόχους**. Το γράφημά μας έχει $r = 3$, και οι ακμές $1, 2, 4$ σχηματίζουν ένα δυνατό δέντρο. Το πλήρες όνομά του είναι *ζευγνύον δέντρο*, διότι το δέντρο «συνδέει» όλους τους κόμβους του γραφήματος. Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, ένα ζευγνύον δέντρο έχει $n - 1$ ακμές. Η προσθήκη μιας επιπλέον ακμής δημιουργεί βρόχο.

Στη γλώσσα της γραμμικής άλγεβρας, το $n - 1$ είναι η τάξη του πίνακα πρόσπτωσης A. Ο χώρος γραμμών έχει διάσταση $n - 1$. Το ζευγνύον δέντρο που προκύπτει από την απαλοιφή δίνει μια βάση του χώρου γραμμών —κάθε ακμή του δέντρου αντιστοιχεί σε μια γραμμή της βάσης.

Το θεμελιώδες θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας συνδέει τις διαστάσεις των υποχώρων:

Μηδενόχωρος: διάσταση 1, περιέχει το $x = (1, \dots, 1)$.
Χώρος στηλών: διάσταση $r = n - 1$, οποιεσδήποτε $n - 1$ στήλες είναι ανεξάρτητες.
Χώρος γραμμών: διάσταση $r = n-1$, ανεξάρτητες γραμμές από οποιοδήποτε ζευγνύον δέντρο.
Αριστερός μηδενόχωρος: διάσταση $m - r = m - n + 1$, περιέχει τα y των βρόχων.

Οι τέσσερις αυτές γραμμές δίνουν ***τον τύπο του Euler***, ο οποίος είναι κατά κάποιο τρόπο το πρώτο θεώρημα της τοπολογίας. Μετράει τους μηδενοδιάστατους κόμβους μείον τις μονοδιάστατες ακμές συν τους διδιάστατους βρόχους. Στη γραμμική άλγεβρα, για κάθε συνεκτικό γράφημα αποδεικνύεται το εξής:

$$(\#\ \textbf{κόμβων}) - (\#\ \textbf{ακμών}) + (\#\ \textbf{βρόχων}) = (n) - (m) + (m - n + 1) = \mathbf{1}. \qquad (3)$$

Για έναν απλό βρόχο αποτελούμενο από 10 κόμβους και 10 ακμές, ο αριθμός Euler είναι $10 - 10 + 1$. Αν καθένας από αυτούς τους 10 κόμβους συνδεθεί με έναν ενδέκατο κόμβο στο κέντρο, τότε το $11 - 20 + 10$ παραμένει 1.

Για κάθε διάνυσμα f του χώρου γραμμών έχουμε $x^{\mathrm{T}} f = f_1 + \cdots + f_n = 0$ —τα ρεύματα που εισρέουν από έξω έχουν άθροισμα μηδέν. Για κάθε διάνυσμα b του χώρου στηλών έχουμε $y^{\mathrm{T}} b = 0$ —οι διαφορές δυναμικού κατά μήκος των βρόχων έχουν άθροισμα μηδέν. Σε λίγο θα συνδέσουμε το x με το y μέσω ενός τρίτου νόμου (του ***νόμου του Ohm για κάθε αντίσταση***). Προηγουμένως όμως, θα παραμείνουμε στον πίνακα A με μια εφαρμογή που φαίνεται ασήμαντη, αλλά δεν είναι.

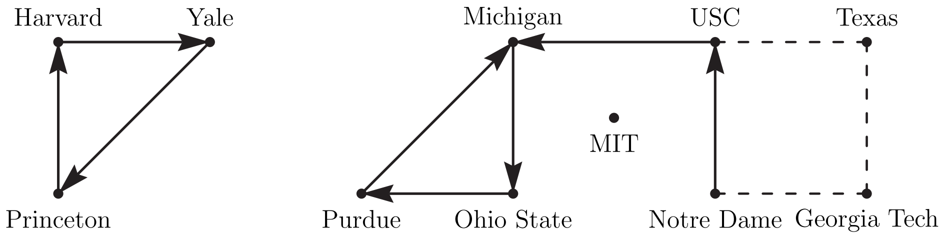
Κατάταξη ποδοσφαιρικών ομάδων

Στο τέλος κάθε αγωνιστικής περιόδου, τα πρακτορεία δημοσιεύουν μια κατάταξη των κολεγιακών ποδοσφαιρικών ομάδων. Η κατάταξη είναι εν πολλοίς ο μέσος όρος των απόψεων διάφορων αθλητικογράφων, και μερικές φορές γίνεται ασαφής μετά τα δέκα πρώτα κολέγια. Θέλουμε να κατατάξουμε όλες τις ομάδες με βάση έναν πιο μαθηματικό τρόπο.

Το πρώτο βήμα είναι να κατασκευάσουμε το γράφημα. Αν η ομάδα j έχει παίξει με την ομάδα k, υπάρχει μια ακμή μεταξύ τους. Οι *ομάδες* είναι οι *κόμβοι* και οι *αγώνες* είναι οι *ακμές*. Υπάρχουν μερικές εκατοντάδες κόμβοι και μερικές χιλιάδες ακμές —η κατεύθυνση των ακμών δηλώνεται με ένα βέλος, με φορά από τη φιλοξενούμενη προς τη φιλοξενούσα ομάδα. Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζεται ένα τμήμα του Ivy League, μερικές σοβαρές ομάδες, καθώς και ένα κολέγιο που δεν φημίζεται για το ποδόσφαιρό του. Ευτυχώς για το συγκεκριμένο κολέγιο (από όπου γράφει ο συγγραφέας), το γράφημα δεν είναι συνεκτικό. Από μαθηματικής πλευράς, δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι το MIT δεν είναι το νούμερο 1 (εκτός αν τύχει να παίξει έναν αγώνα εναντίον κάποιου).

Αν το ποδόσφαιρο ήταν απόλυτα προβλέψιμο, θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε ένα «δυναμικό» x_j σε κάθε ομάδα. Έτσι, αν μια φιλοξενούμενη ομάδα v έπαιζε στην έδρα μιας ομάδας h, θα νικούσε η ομάδα με το υψηλότερο δυναμικό. Στην ιδανική περίπτωση, η διαφορά b του αποτελέσματος του αγώνα θα ήταν ακριβώς ίση με τη διαφορά $x_h - x_v$ των δυναμικών των ομάδων. Δεν θα χρειαζόταν καν να αγωνιστούν! Όλοι θα συμφωνούσαν ότι η ομάδα με το υψηλότερο δυναμικό είναι η καλύτερη.

Η μέθοδος αυτή έχει δύο (τουλάχιστον) δυσκολίες. Προσπαθούμε να βρούμε έναν αριθμό x για κάθε ομάδα και θέλουμε να ισχύει $x_h - x_v = b_i$ για κάθε αγώνα. Αυτό σημαίνει ότι θα



Σχήμα 2.7 Τμήμα του γραφήματος για το κολεγιακό ποδόσφαιρο.

έχουμε μερικές χιλιάδες εξισώσεις αλλά μόνο μερικές εκατοντάδες αγνώστους. Οι εξισώσεις $x_h - x_v = b_i$ σχηματίζουν ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου ο A είναι ένας ***πίνακας πρόσπτωσης***. Για κάθε αγώνα υπάρχει μια γραμμή, με $+1$ στη στήλη h και -1 στη στήλη v —τα οποία δηλώνουν ποιες ομάδες παίζουν στον συγκεκριμένο αγώνα.

Πρώτη δυσκολία: Αν το b δεν ανήκει στον χώρο στηλών, δεν υπάρχει λύση. Τα αποτελέσματα των αγώνων πρέπει να συμφωνούν απόλυτα, διαφορετικά δεν μπορούν να βρεθούν ακριβή δυναμικά. Δεύτερη δυσκολία: Αν ο μηδενόχωρος του A περιέχει μη μηδενικά διανύσματα, τα δυναμικά x δεν είναι καλά ορισμένα. Στην πρώτη περίπτωση το x δεν υπάρχει· στη δεύτερη περίπτωση το x δεν είναι μοναδικό. Ενδέχεται να συνυπάρχουν και οι δύο δυσκολίες.

Ο μηδενόχωρος περιέχει πάντα το διάνυσμα που αποτελείται μόνο από μονάδες, αφού ο A ελέγχει μόνο τις *διαφορές* $x_h - x_v$. Για να προσδιορίσουμε τα δυναμικά, μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετα δυναμικό μηδέν στο Harvard. (Μιλώντας καθαρά μαθηματικά και μη υπονοώντας τίποτα.) Αν όμως το γράφημα δεν είναι συνεκτικό, κάθε ασύνδετο κομμάτι του γραφήματος συνεισφέρει ένα διάνυσμα στον μηδενόχωρο. Υπάρχει ακόμα και το διάνυσμα με $x_{\text{MIT}} = 1$ και $x_j = 0$ για όλα τα υπόλοιπα. Πρέπει να γειώσουμε, όχι μόνο το Harvard, αλλά και μία ομάδα σε κάθε κομμάτι. (Δεν αδικούμε κανέναν αποδίδοντάς του δυναμικό μηδέν· αν όλα τα υπόλοιπα δυναμικά είναι μικρότερα του μηδενός, τότε η γειωμένη ομάδα κατατάσσεται πρώτη.) Η διάσταση του μηδενόχωρου είναι το *πλήθος των κομματιών* του γραφήματος —δεν υπάρχει τρόπος να κατατάξουμε μεταξύ τους τις ομάδες των ασύνδετων κομματιών, αφού οι ομάδες από τις οποίες αποτελούνται δεν αγωνίζονται μεταξύ τους.

Ο χώρος στηλών περιγράφεται πιο δύσκολα. Ποια αποτελέσματα αγώνων συμφωνούν απόλυτα με ένα σύνολο δυναμικών; Είναι βέβαιο ότι το $Ax = b$ δεν έχει λύση αν το Harvard νικήσει το Yale, το Yale νικήσει το Princeton και το Princeton νικήσει το Harvard. Επιπλέον, οι διαφορές αποτελεσμάτων σε αυτό τον βρόχο αγώνων ***πρέπει να έχουν άθροισμα μηδέν***:

Κανόνας του Kirchhoff για διαφορές αποτελεσμάτων $\quad b_{\text{HY}} + b_{\text{YP}} + b_{\text{PH}} = 0.$

Αυτό είναι και νόμος της γραμμικής άλγεβρας. Το $Ax = b$ έχει λύση όταν το b ικανοποιεί τις ίδιες γραμμικές εξαρτήσεις με τις γραμμές του A. Σε αυτή την περίπτωση, η απαλοιφή οδηγεί στην $0 = 0$.

Στην πραγματικότητα, είναι σχεδόν βέβαιο ότι το b δεν ανήκει στον χώρο στηλών. Τα αποτελέσματα των αγώνων ποδοσφαίρου δεν είναι τόσο προβλέψιμα. Για να βρούμε μια κατάταξη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ***ελαχίστων τετραγώνων***: Φέρνουμε το Ax όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο b. Με αυτό θα ασχοληθούμε στο Κεφάλαιο 3, αλλά θα αναφέρουμε μια μόνο τροποποίηση. Ο νικητής παίρνει μπόνους 50 ή ακόμα και 100 βαθμών επιπλέον της διαφοράς με την οποία νίκησε. Διαφορετικά, η νίκη με 1 είναι πολύ κοντά στην ήττα με 1. Αυτό φέρνει τις μαθηματικά υπολογιζόμενες κατατάξεις πολύ κοντά στις κατατάξεις των πρακτορείων. Ο Dr. Leake (Notre Dame) παρουσίασε μια πλήρη ανάλυση στο *Management Science in Sports* (1976).

Αφού είχα γράψει αυτή την παράγραφο, βρήκα στους *New York Times* το εξής:

> Στην τελική κατάταξη που υπολόγισε για το 1985, ο υπολογιστής κατέταξε το Miami (10-2) στην έβδομη θέση πάνω από το Tennessee (9-1-2). Λίγες μέρες μετά τη δημοσίευση, άρχισαν να καταφθάνουν πακέτα που περιείχαν πορτοκάλια και οργισμένες επιστολές από απογοητευμένους οπαδούς του Tennessee στο αθλητικό τμήμα των *Times*. Η εκνευρισμός οφείλεται στο γεγονός ότι το Tennessee συνέτριψε το Miami 35-7 στο Sugar Bowl. Στις τελικές τους κατατάξεις, τα AP και UPI κατέταξαν το Tennessee τέταρτο και το Miami σημαντικά χαμηλότερα.
>
> Χθες το πρωί έφτασαν στον χώρο φορτοεκφόρτωσης εννέα χαρτοκιβώτια με πορτοκάλια. Είχαν σταλεί στο Bellevue Hospital με την προειδοποίηση ότι η ποιότητα και το περιεχόμενο των πορτοκαλιών ήταν αβέβαιο.

Αυτά για αυτή την εφαρμογή της γραμμικής άλγεβρας.

Δίκτυα και εφαρμοσμένα διακριτά μαθηματικά

Ένα γράφημα γίνεται ***δίκτυο***, αν στις ακμές αντιστοιχιστούν κάποιοι αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$. Ο αριθμός c_i μπορεί να είναι το *μήκος* της ακμής i, η *χωρητικότητά της*, η *δυσκαμψία* της (αν περιέχει ελατήριο) ή η *αγωγιμότητά* της (αν περιέχει κάποια αντίσταση). Αυτοί οι αριθμοί μπαίνουν σε έναν διαγώνιο πίνακα C, ο οποίος είναι m επί m. Ο C αποτυπώνει τις «ιδιότητες του υλικού», σε αντίθεση με τον πίνακα πρόσπτωσης A —ο οποίος παρέχει πληροφορίες για τις συνδέσεις.

Η περιγραφή μας αφορά την περίπτωση του ηλεκτρισμού. Η αγωγιμότητα που αντιστοιχεί στην ακμή i είναι c_i, ενώ η αντίσταση είναι $1/c_i$. Ο νόμος του Ohm λέει ότι το ρεύμα y_i που διέρχεται από την αντίσταση είναι ανάλογο της πτώσης τάσης e_i:

$$\textbf{Νόμος του Ohm} \qquad \boldsymbol{y_i = c_i e_i} \qquad (\text{ρεύμα}) = (\text{αγωγιμότητα})(\text{πτώση τάσης}).$$

Αυτό γράφεται και ως $E = IR$, όπου η πτώση τάσης ισούται με το ρεύμα επί την αντίσταση. Σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης για όλες τις ακμές ταυτόχρονα, ο ***νόμος του Ohm είναι*** $\boldsymbol{y = Ce}$.

Για να ολοκληρώσουμε την περιγραφή, χρειαζόμαστε τον κανόνα τάσεων και τον κανόνα ρευμάτων του Kirchhoff:

ΚΤΚ: Οι πτώσεις τάσης κατά μήκος κάθε βρόχου έχουν άθροισμα μηδέν.
ΚΡΚ: Τα ρεύματα y_i (και f_i) που εισρέουν σε κάθε κόμβο έχουν άθροισμα μηδέν.

Ο νόμος τάσεων μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε δυναμικά $x_1, \ldots, x_n$ στους κόμβους. Οι διαφορές κατά μήκος ενός βρόχου δίνουν αθροίσματα σαν το $(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) = 0$, όπου όλα απαλείφονται. Ο κανόνας ρευμάτων μάς υπαγορεύει να προσθέσουμε τα ρεύματα που εισρέουν σε κάθε κόμβο μέσω του πολλαπλασιασμού $A^{\mathrm{T}}y$. Αν δεν υπάρχουν εξωτερικές πηγές ρευμάτων, ο *κανόνας ρευμάτων του Kirchhoff είναι* $A^{\mathrm{T}}y = 0$.

Η άλλη εξίσωση είναι ο νόμος του Ohm, αλλά πρέπει να βρούμε την πτώση τάσης e κατά μήκος της αντίστασης. Ο πολλαπλασιασμός Ax έδωσε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των κόμβων. Αν αντιστρέψουμε το πρόσημο, το $-Ax$ δίνει την *πτώση* δυναμικού. Μέρος της πτώσης αυτής μπορεί να οφείλεται σε μια ***μπαταρία*** ισχύος b_i που υπάρχει στην ακμή. Το υπόλοιπο της πτώσης είναι $e = b - Ax$ κατά μήκος της αντίστασης:

$$\textbf{Νόμος του Ohm} \qquad y = C(b - Ax) \quad \text{ή} \quad C^{-1}y + Ax = b. \tag{4}$$

Οι ***θεμελιώδεις εξισώσεις ισορροπίας*** συνδυάζουν τον νόμο του Ohm και τους κανόνες του Kirchhoff σε ένα κεντρικό πρόβλημα των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Οι εξισώσεις αυτές εμφανίζονται παντού:

$$\textbf{Εξισώσεις ισορροπίας} \qquad \begin{aligned} C^{-1}y + Ax &= b \\ A^{\mathrm{T}}y &= f. \end{aligned} \tag{5}$$

Πρόκειται για ένα γραμμικό συμμετρικό σύστημα, από το οποίο έχει εξαφανιστεί το e. Οι άγνωστοι είναι τα ρεύματα y και τα δυναμικά x. Βλέπουμε ότι ο πίνακας είναι ένας συμμετρικός μπλοκ πίνακας:

$$\textbf{Μορφή μπλοκ} \qquad \begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Σε αυτόν τον μπλοκ πίνακα μπορούμε να εφαρμόσουμε απαλοιφή κατά μπλοκ. Οδηγός είναι ο C^{-1}, πολλαπλασιαστής ο $A^{\mathrm{T}}C$, και η αφαίρεση εξουδετερώνει τον A^{T} που υπάρχει κάτω από τον οδηγό. Το αποτέλεσμα είναι

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ 0 & -A^{\mathrm{T}}CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ f - A^{\mathrm{T}}Cb \end{bmatrix}$$

Η εξίσωση που περιέχει μόνο το x βρίσκεται στην τελευταία γραμμή, με τον συμμετρικό πίνακα $A^{\mathrm{T}}CA$:

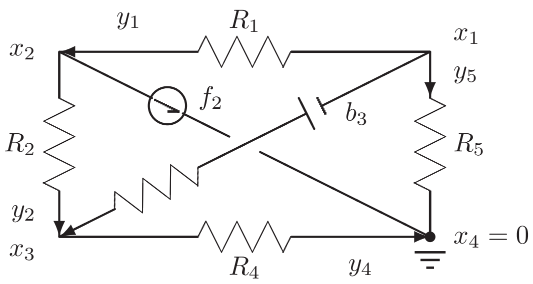
$$\textbf{Θεμελιώδης εξίσωση} \qquad A^{\mathrm{T}}CAx = A^{\mathrm{T}}Cb - f. \tag{7}$$

Το y προκύπτει με ανάδρομη αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση. Τίποτα το περίεργο: αντικαθιστούμε $y = C(b - Ax)$ στην $A^{\mathrm{T}}y = f$ και καταλήγουμε στην (7).

Σημαντική παρατήρηση Ένα δυναμικό πρέπει να καθοριστεί εκ των προτέρων: $x_n = 0$. Ο n-οστός κόμβος είναι ***γειωμένος***, και η n-οστή στήλη του αρχικού πίνακα πρόσπτωσης απομακρύνεται. Ο A για τον οποίο μιλάμε είναι ο πίνακας που απομένει· οι $n - 1$ στήλες του είναι ανεξάρτητες. Ο τετραγωνικός πίνακας $A^{\mathrm{T}}CA$, ο οποίος είναι το κλειδί για τη επίλυση της εξίσωσης (7) ως προς x, είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας τάξης $n - 1$:

$$\underset{n-1 \text{ επί } m}{\begin{bmatrix} \quad A^{\mathrm{T}} \quad \end{bmatrix}} \underset{m \text{ επί } m}{\begin{bmatrix} \\ \quad C \quad \\ \\ \end{bmatrix}} \underset{m \text{ επί } n-1}{\begin{bmatrix} \\ A \\ \\ \end{bmatrix}} = \underset{n-1 \text{ επί } n-1}{\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}CA \end{bmatrix}}$$

Παράδειγμα 1 Έστω ότι μια μπαταρία b_3 και μια πηγή ρεύματος f_2 (και πέντε αντιστάσεις) συνδέουν τέσσερις κόμβους. Ο κόμβος 4 είναι γειωμένος και το δυναμικό $x_4 = 0$ έχει καθοριστεί εκ των προτέρων.



Εφαρμόζουμε πρώτα τον κανόνα ρευμάτων $A^{\mathrm{T}}y = f$ στους κόμβους 1, 2, 3:

$$\text{Για το}\quad \begin{aligned} -y_1 - y_3 - y_5 &= 0 \\ y_1 - y_2 &= f_2 \\ y_2 + y_3 - y_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{έχουμε}\quad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Δεν γράφουμε κάποια εξίσωση για τον κόμβο 4, για τον οποίο ο κανόνας ρευμάτων είναι $y_4 + y_5 + f_2 = 0$, ο οποίος προκύπτει με πρόσθεση των υπόλοιπων τριών εξισώσεων.

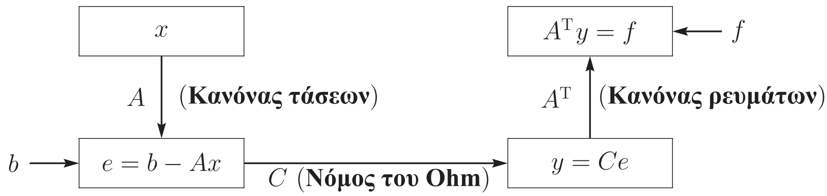
Η άλλη εξίσωση είναι η $C^{-1}y + Ax = b$. Τα δυναμικά x συνδέονται με τα ρεύματα y μέσω του νόμου του Ohm. Ο διαγώνιος πίνακας C περιέχει τις πέντε αγωγιμότητες $c_i = 1/R_i$. Το δεξί μέλος καταγράφει την ισχύ της μπαταρίας b_3 που υπάρχει στην ακμή 3. Στη μορφή μπλοκ, πάνω από το $A^{\mathrm{T}}y = f$ υπάρχει το $C^{-1}y + Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} C^{-1} & A \\ A^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & & -1 & 1 & 0 \\ & R_2 & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & R_3 & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & R_4 & & 0 & 0 & -1 \\ & & & & R_5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι 8 επί 8, με πέντε ρεύματα και τρία δυναμικά. Με απαλοιφή των y, το σύστημα ανάγεται στο 3 επί 3 σύστημα $A^{\mathrm{T}}CAx = A^{\mathrm{T}}Cb - f$. Ο πίνακας $A^{\mathrm{T}}CA$ περιέχει τις αντίστροφες ποσότητες $c_i = 1/R_i$ (διότι στην απαλοιφή διαιρούμε με τους οδηγούς). Παρουσιάζουμε και την τέταρτη γραμμή και στήλη, που αντιστοιχούν στον γειωμένο κόμβο, έξω από τον 3 επί 3 πίνακα:

$$\begin{array}{rcccl} A^{\mathrm{T}}CA = & \left[\begin{matrix} c_1 + c_3 + c_5 & -c_1 & -c_3 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_3 & -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 \end{matrix}\right] & \begin{matrix} -c_5 \\ 0 \\ -c_4 \end{matrix} & \begin{matrix} \text{(κόμβος 1)} \\ \text{(κόμβος 2)} \\ \text{(κόμβος 3)} \end{matrix} \\ & \begin{matrix} -c_5 & \qquad 0 & \qquad -c_4 \end{matrix} & c_4 + c_5 & \text{(κόμβος 4)} \end{array}$$

Το πρώτο στοιχείο είναι $1 + 1 + 1$, ή $c_1 + c_3 + c_5$ αν συμπεριληφθεί ο C, διότι οι ακμές 1, 3, 5 ακουμπούν τον κόμβο 1. Το επόμενο στοιχείο της διαγωνίου είναι $1 + 1$ ή $c_1 + c_2$, λόγω των ακμών που ακουμπούν τον κόμβο 2. Εκτός της διαγωνίου, τα c εμφανίζονται με αρνητικά πρόσημα. *Οι ακμές προς τον γειωμένο κόμβο* 4 ανήκουν στην *τέταρτη* γραμμή και στήλη, οι οποίες διαγράφονται όταν η στήλη 4 απομακρύνεται από τον A (καθιστώντας τον $A^{\mathrm{T}}CA$ αντιστρέψιμο). Όλες οι γραμμές και στήλες του 4 επί 4 πίνακα θα είχαν άθροισμα μηδέν και το $(1, 1, 1, 1)$ θα ανήκε στον μηδενόχωρό του.



Σχήμα 2.8 Το πλαίσιο εργασίας για την ισορροπία: πηγές b και f, τρία βήματα ώς τον $A^{\mathrm{T}}CA$.

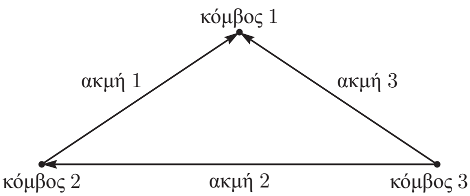
Προσέξτε ότι ο $A^{\mathrm{T}}CA$ είναι συμμετρικός. Έχει θετικούς οδηγούς και προκύπτει από το **βασικό πλαίσιο εργασίας των εφαρμοσμένων μαθηματικών** που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8.

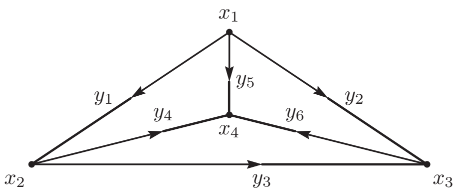
Στη μηχανική, τα x και y είναι μετατοπίσεις και τάσεις. Στα υγρά, οι άγνωστοι είναι η πίεση και ο ρυθμός ροής. Στη στατιστική, το e είναι το σφάλμα και το x η καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Οι συγκεκριμένες εξισώσεις πινάκων και οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις περιλαμβάνονται στο βιβλίο μου *Introduction to Applied Mathematics* και στο νέο βιβλίο *Applied Mathematics and Scientific Computing*. (Βλ. `www.wellesleycambridge.com`.)

Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο έχοντας φτάσει στο αποκορύφωμά του —τη ***διατύπωση*** ενός θεμελιώδους προβλήματος των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Συχνά, για αυτό απαιτείται βαθύτερη διαισθητική αντίληψη από ό,τι για την ***επίλυση*** του προβλήματος. Στο Κεφάλαιο 1 κάναμε το πρώτο βήμα στη γραμμική άλγεβρα, λύνοντας γραμμικές εξισώσεις. Για να βρούμε τις εξισώσεις, χρειάστηκε η βαθύτερη γνώση του Κεφαλαίου 2. Η συμβολή των μαθηματικών, και των ανθρώπων, δεν είναι οι υπολογισμοί αλλά η ευφυΐα.

Προβλήματα 2.5

1. Γράψτε τον 3 επί 3 πίνακα πρόσπτωσης A που αντιστοιχεί στο τριγωνικό γράφημα τριών κόμβων του παρακάτω σχήματος. Βρείτε μια λύση του $Ax = 0$ και περιγράψτε όλα τα υπόλοιπα διανύσματα του μηδενόχωρου του A. Βρείτε μια λύση του $A^{\mathrm{T}}y = 0$ και περιγράψτε όλα τα υπόλοιπα διανύσματα του αριστερού μηδενόχωρου του A.





2. Για τον ίδιο 3 επί 3 πίνακα, δείξτε απευθείας από τις στήλες ότι κάθε διάνυσμα b του χώρου στηλών θα ικανοποιεί την $b_1 + b_2 - b_3 = 0$. Συναγάγετε το ίδιο από τις τρεις γραμμές —τις εξισώσεις του συστήματος $Ax = b$. Τι σημαίνει αυτό για τις διαφορές δυναμικού κατά μήκος ενός βρόχου;

3. Δείξτε απευθείας από τις γραμμές ότι κάθε διάνυσμα f του χώρου γραμμών θα ικανοποιεί την $f_1 + f_2 + f_3 = 0$. Συναγάγετε το ίδιο από τις τρεις εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}y = f$. Τι σημαίνει αυτό όταν τα f είναι ρεύματα που εισρέουν στους κόμβους;

4. Υπολογίστε τον 3 επί 3 πίνακα $A^{\mathrm{T}}A$ και δείξτε ότι είναι συμμετρικός αλλά ιδιόμορφος —ποια διανύσματα ανήκουν στον μηδενόχωρό του; Αν απομακρύνουμε την τελευταία στήλη του A (και την τελευταία γραμμή του A^{T}) απομένει ο 2 επί 2 πίνακας στην άνω αριστερή γωνία· δείξτε ότι *δεν* είναι ιδιόμορφος.

5. Τοποθετήστε τον διαγώνιο πίνακα C με στοιχεία c_1, c_2, c_3 στη μέση και υπολογίστε τον $A^{\mathrm{T}}CA$. Δείξτε ξανά ότι ο 2 επί 2 πίνακας στην άνω αριστερή γωνία είναι αντιστρέψιμος.

6. Γράψτε τον 6 επί 4 πίνακα πρόσπτωσης A που αντιστοιχεί στο δεύτερο γράφημα του σχήματος. Το διάνυσμα $(1,1,1,1)$ ανήκει στον μηδενόχωρο του A, αλλά σε αυτή την περίπτωση θα υπάρχουν $m-n+1=3$ ανεξάρτητα διανύσματα που ικανοποιούν το $A^{\mathrm{T}}y=0$. Βρείτε τρία διανύσματα y και *συνδέστε τα με τους βρόχους του γραφήματος*.

7. Αν το δεύτερο γράφημα αναπαριστά έξι αγώνες μεταξύ τεσσάρων ομάδων και οι διαφορές αποτελεσμάτων είναι $b_1,\ldots,b_6$, πότε είναι δυνατό να αντιστοιχίσουμε δυναμικά $x_1,\ldots,x_4$ με τρόπο ώστε οι διαφορές δυναμικού να συμφωνούν με τα b; Αυτό που καλείστε να βρείτε (με χρήση των κανόνων του Kirchhoff ή της απαλοιφής) είναι τις συνθήκες που καθιστούν το $Ax=b$ επιλύσιμο.

8. Γράψτε τις διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων αυτού του 6 επί 4 πίνακα πρόσπτωσης και μια βάση κάθε υποχώρου.

9. Υπολογίστε τους $A^{\mathrm{T}}A$ και $A^{\mathrm{T}}CA$, όπου ο 6 επί 6 διαγώνιος πίνακας C έχει στοιχεία $c_1,\ldots,c_6$. Πώς μπορείτε να συμπεράνετε από το γράφημα πού θα εμφανιστούν τα c στην κύρια διαγώνιο του $A^{\mathrm{T}}CA$;

10. Σχεδιάστε ένα γράφημα με αριθμημένες και προσανατολισμένες ακμές (και αριθμημένους κόμβους) του οποίου ο πίνακας πρόσπτωσης να είναι ο εξής:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Είναι το γράφημα δέντρο; (Είναι οι γραμμές του A ανεξάρτητες;) Δείξτε ότι αν απομακρύνουμε την τελευταία ακμή προκύπτει ένα ζευγνύον δέντρο. Οι γραμμές που απομένουν είναι μια βάση του ______.

11. Έχοντας απομακρύνει την τελευταία στήλη από τον προηγούμενο A και θεωρώντας ότι η διαγώνιος του C περιέχει τους αριθμούς 1, 2, 2, 1, γράψτε το 7 επί 7 σύστημα

$$\begin{aligned} C^{-1}y \,+\, Ax &= 0\\ A^{\mathrm{T}}y \qquad\quad &= f. \end{aligned}$$

Αν απαλείψουμε τα y_1, y_2, y_3, y_4, απομένουν τρεις εξισώσεις $A^{\mathrm{T}}CAx=-f$ με αγνώστους τα x_1, x_2, x_3. Λύστε τις εξισώσεις αν $f=(1,1,6)$. Με αυτά τα ρεύματα να εισρέουν στους κόμβους 1, 2, 3 του δικτύου, βρείτε τα δυναμικά στους κόμβους και τα ρεύματα στις ακμές.

12. Αν ο A είναι ένας 12 επί 7 πίνακας πρόσπτωσης ενός συνεκτικού γραφήματος, ποια είναι η τάξη του; Πόσες ελεύθερες μεταβλητές περιέχει η λύση του $Ax=b$; Πόσες ελεύθερες μεταβλητές περιέχει η λύση του $A^{\mathrm{T}}y=f$; Πόσες ακμές πρέπει να απομακρύνουμε ώστε να απομείνει ένα ζευγνύον δέντρο;

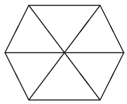
13. Βρείτε και τα 16 ζευγνύοντα δέντρα του παραπάνω γραφήματος με τους 4 κόμβους και τις 6 ακμές.

14. Αν το MIT νικήσει το Harvard με 35-0, το Yale φέρει ισοπαλία με το Harvard και το Princeton νικήσει το Yale με 7-6, ποιες διαφορές αποτελεσμάτων στους υπόλοιπους τρεις αγώνες (H-P, MIT-P, MIT-Y) θα επιτρέψουν στις διαφορές δυναμικού να συμφωνήσουν με τις διαφορές αποτελεσμάτων; Αν γνωρίζουμε τις διαφορές αποτελεσμάτων για τους αγώνες ενός ζευγνύοντος δέντρου, τότε τις γνωρίζουμε για όλους τους αγώνες.

15. Στη μέθοδο κατάταξης των ποδοσφαιρικών ομάδων που παρουσιάσαμε, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη δυναμικότητα του αντιπάλου —ή έχει ήδη ληφθεί υπόψη;

16. Αν όλοι οι κόμβοι συνδέονται με μία ακμή (πλήρες γράφημα), πόσες ακμές υπάρχουν; Το γράφημα έχει n κόμβους και δεν επιτρέπονται ακμές από έναν κόμβο προς τον εαυτό του.

17. Επαληθεύστε τον *τύπο του Euler* για τα παρακάτω δύο γραφήματα:
(# **κόμβων**) − (# **ακμών**) + (# **βρόχων**) $= 1$.



18. Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες, βρείτε τον $A^{\mathrm{T}}A$ και μαντέψτε πώς προκύπτουν τα στοιχεία του από το γράφημα:

(α) Η διαγώνιος του $A^{\mathrm{T}}A$ μας λέει πόσ__ ______ σε κάθε κόμβο.
(β) Τα εκτός διαγωνίου -1 ή 0 μας λένε ποια ζεύγη κόμβων είναι ______.

19. Γιατί περιέχει το $(1, 1, 1, 1)$ ο μηδενόχωρος του $A^{\mathrm{T}}A$; Ποια είναι η τάξη του;

20. Γιατί ένα πλήρες γράφημα με $n = 6$ κόμβους έχει $m = 15$ ακμές; Ένα ζευγνύον δέντρο που συνδέει και τους έξι κόμβους έχει ______ ακμές. Υπάρχουν $n^{n-2} = 6^4$ ζευγνύοντα δέντρα!

21. Ο *πίνακας γειτνίασης* ενός γραφήματος έχει $M_{ij} = 1$ αν οι κόμβοι i και j συνδέονται με μια ακμή (διαφορετικά $M_{ij} = 0$). Γράψτε τον M και τον M^2 για το γράφημα του Προβλήματος 6 με τους 6 κόμβους και τις 4 ακμές. Γιατί ο $(M^2)_{ij}$ μετράει το πλήθος των *διαδρομών δύο βημάτων* από τον κόμβο i στον κόμβο j;

2.6 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Γνωρίζουμε πώς επηρεάζει ένας πίνακας A τους διάφορους υποχώρους όταν πολλαπλασιάζουμε με αυτόν. Ο μηδενόχωρος απεικονίζεται στο μηδενικό διάνυσμα. Όλα τα διανύσματα απεικονίζονται στον χώρο στηλών, αφού το Ax είναι πάντα ένας συνδυασμός των στηλών. Σύντομα θα δούμε κάτι όμορφο —ότι ο A απεικονίζει τον χώρο γραμμών του στον χώρο στηλών του, και ότι σε αυτούς τους χώρους διάστασης r είναι 100% αντιστρέψιμος. Αυτή είναι η πραγματική επίδραση του A. Κρύβεται μερικώς από τους μηδενόχωρους και τους αριστερούς μηδενόχωρους, οι οποίοι σχηματίζουν ορθές γωνίες και πηγαίνουν με τον δικό τους τρόπο (προς το μηδέν).

Αυτό που ενδιαφέρει σε αυτό το σημείο είναι τι συμβαίνει *στο εσωτερικό* του χώρου — δηλαδή στο εσωτερικού του n-διάστατου χώρου, αν ο A είναι n επί n. Για να απαντήσουμε, πρέπει να μελετήσουμε προσεκτικότερα το πρόβλημα.

Ας υποθέσουμε ότι x είναι ένα n-διάστατο διάνυσμα. Όταν ο A πολλαπλασιάζει το x, το ***μετασχηματίζει*** σε ένα νέο διάνυσμα Ax. Αυτό συμβαίνει για κάθε σημείο x του n-διάστατου χώρου $\mathbf{R}^n$. Ο πίνακας A μετασχηματίζει, ή «απεικονίζει στον εαυτό του», ολόκληρο τον χώρο. Στο Σχήμα 2.9 παρουσιάζονται τέσσερις μετασχηματισμοί που πραγματοποιούνται με πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

1. Ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, $A = cI$, ***εκτείνει*** κάθε διάνυσμα κατά τον ίδιο παράγοντα c. Διαστέλλεται ή συστέλλεται (ή με κάποιον τρόπο περνάει μέσω της αρχής των αξόνων στην αντίθετη πλευρά, όταν το c είναι αρνητικό) ολόκληρος ο χώρος.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Ένας πίνακας ***στροφής*** στρέφει ολόκληρο τον χώρο γύρω από την αρχή των αξόνων. Το συγκεκριμένο παράδειγμα στρέφει όλα τα διανύσματα κατά 90°, μετασχηματίζοντας κάθε σημείο (x, y) στο $(-y, x)$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

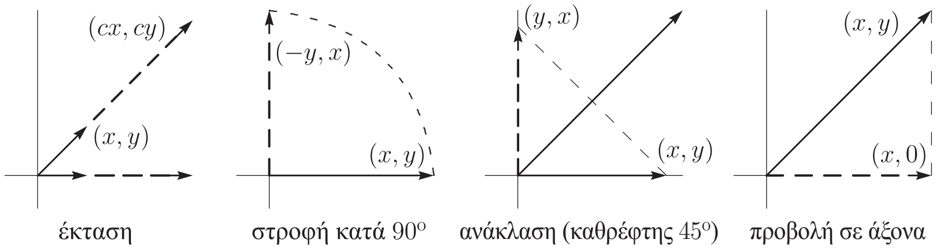
3. Ένας πίνακας ***ανάκλασης*** μετασχηματίζει κάθε διάνυσμα στην εικόνα του, στην άλλη πλευρά ενός καθρέφτη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο καθρέφτης είναι η ευθεία $y = x$ γωνίας 45°, και σημεία σαν το $(2, 2)$ παραμένουν αμετάβλητα. Ένα σημείο σαν το $(2, -2)$ αναστρέφεται στο $(-2, 2)$. Στην περίπτωση συνδυασμών όπως ο $v = (2, 2) + (2, -2) = (4, 0)$, ο πίνακας αφήνει αμετάβλητο το ένα μέρος και αντιστρέφει το άλλο. Η έξοδος είναι $Av = (2, 2) + (-2, 2) = (0, 4)$.

Ο συγκεκριμένος πίνακας ανάκλασης είναι και πίνακας μετάθεσης! Είναι αλγεβρικά τόσο απλός, στέλνοντας το (x, y) στο (y, x), με αποτέλεσμα η γεωμετρική εικόνα να μην γίνεται αμέσως αντιληπτή.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Ένας πίνακας ***προβολής*** απεικονίζει ολόκληρο τον χώρο σε έναν υπόχωρο μικρότερης διάστασης (μη αντιστρέψιμος). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, κάθε διάνυσμα (x, y) του επίπεδου μετασχηματίζεται στο πλησιέστερο σημείο $(x, 0)$ του οριζόντιου άξονα. Ο άξονας αυτός είναι ο χώρος στηλών του A. Ο άξονας y, που προβάλλεται στο $(0, 0)$, είναι ο μηδενόχωρος.

Θα μπορούσαμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω παραδείγματα στις τρεις διαστάσεις. Υπάρχουν πίνακες που εκτείνουν τη Γη ή που τη στρέφουν ή την ανακλούν ως προς το επί-



Σχήμα 2.9 Μετασχηματισμοί του επιπέδου από τέσσερις πίνακες.

πεδο του ισημερινού (μετασχηματίζοντας τον βόρειο πόλο στον νότιο πόλο). Υπάρχει ένας πίνακας που προβάλλει τα πάντα πάνω σε αυτό το επίπεδο (και τους δύο πόλους στο κέντρο). Είναι επίσης σημαντικό να αναγνωρίσουμε ότι οι πίνακες δεν μπορούν να κάνουν τα πάντα· μερικοί μετασχηματισμοί $T(x)$ είναι *αδύνατο να γίνουν* μέσω του πολλαπλασιασμού Ax:

(i) Είναι αδύνατο να μετακινήσουμε την αρχή των αξόνων, αφού $A0 = 0$ για οποιονδήποτε πίνακα.

(ii) Αν το διάνυσμα x μετασχηματίζεται στο x', τότε το $2x$ πρέπει να μετασχηματίζεται στο $2x'$. Εν γένει, το cx πρέπει να μετασχηματίζεται στο cx', αφού $A(cx) = c(Ax)$.

(iii) Αν τα διανύσματα x και y μετασχηματίζονται στα x' και y', τότε το άθροισμά τους $x+y$ πρέπει να μετασχηματίζεται στο $x' + y'$ —αφού $A(x + y) = Ax + Ay$.

Οι κανόνες αυτοί επιβάλλονται στον μετασχηματισμό από τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Ο δεύτερος κανόνας περιέχει τον πρώτο (θέτοντας $c = 0$ παίρνουμε $A0 = 0$). Είδαμε τον κανόνα (iii) εν δράσει όταν το $(4, 0)$ ανακλάστηκε ως προς την ευθεία των $45°$. Διασπάστηκε στα $(2, 2)+(2, -2)$, και καθένα από τα δύο τμήματα ανακλάστηκε ξεχωριστά. Το ίδιο θα μπορούσαμε να κάνουμε με τις προβολές: να διασπάσουμε σε τμήματα, να προβάλουμε ξεχωριστά κάθε τμήμα και να προσθέσουμε τις προβολές. Οι κανόνες αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν σε ***κάθε μετασχηματισμό που προκύπτει από πίνακα***.

Λόγω της σημασίας τους, οι μετασχηματισμοί αυτοί έχουν αποκτήσει και όνομα: Οι μετασχηματισμοί που ικανοποιούν τους κανόνες (i)–(iii) καλούνται ***γραμμικοί μετασχηματισμοί***. Οι κανόνες μπορούν να συνδυαστούν σε έναν:

2K Για οποιουσδήποτε αριθμούς c και d, και οποιαδήποτε διανύσματα x και y, ο πολλαπλασιασμός πινάκων ικανοποιεί τον κανόνα της γραμμικότητας:

$$A(cx + dy) = c(Ax) + d(Ay). \tag{1}$$

Κάθε μετασχηματισμός $T(x)$ που ικανοποιεί αυτή τη σχέση είναι ***γραμμικός μετασχηματισμός***.

Κάθε πίνακας οδηγεί αμέσως σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό. Το πιο ενδιαφέρον ερώτημα είναι το αντίστροφο: *Οδηγεί κάθε γραμμικός μετασχηματισμός σε έναν πίνακα*; Το αντικείμενο αυτής της ενότητας είναι η εύρεση της απάντησης, η οποία είναι *ναι*. Η προσέγγιση αυτή είναι ένας τρόπος θεμελίωσης της γραμμικής άλγεβρας —εκκίνηση από την ιδιότητα (1) και ανάπτυξη των συνεπειών της— η οποία είναι πολύ πιο αφηρημένη από τη βασική προσέγγιση που ακολουθούμε σε αυτό βιβλίο. Προτιμήσαμε να ξεκινήσουμε κατευθείαν με τους πίνακες, και τώρα θα δούμε πώς αναπαριστούν γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Ένας μετασχηματισμός δεν χρειάζεται να απεικονίζει τον $\mathbf{R}^n$ στον ίδιο χώρο $\mathbf{R}^n$. Είναι απολύτως επιτρεπτό να μετασχηματίζει διανύσματα του $\mathbf{R}^n$ σε διανύσματα ενός διαφορετικού χώρου $\mathbf{R}^m$. Αυτό ακριβώς κάνει ένας m επί n πίνακας! Το αρχικό διάνυσμα x έχει n συνιστώσες, ενώ το μετασχηματισμένο διάνυσμα Ax έχει m συνιστώσες. Οι παραλληλόγραμμοι πίνακες ικανοποιούν εξ ίσου καλά τον κανόνα της γραμμικότητας, άρα δίνουν και αυτοί γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Έχοντας φτάσει ώς εδώ, δεν υπάρχει λόγος να σταματήσουμε. Η συνθήκη γραμμικότητας (1) αφορά τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, αλλά τα x και y δεν χρειάζεται να είναι διανύσματα στήλες του $\mathbf{R}^n$. Δεν είναι αυτοί οι μόνοι χώροι. Εξ ορισμού, *κάθε διανυσματικός χώρος επιτρέπει τους συνδυασμούς* $cx + dy$ —τα x και y είναι τα «διανύσματα», αλλά στην πραγματικότητα μπορεί να είναι πολυώνυμα, πίνακες ή συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$. Εφόσον ο μετασχηματισμός ικανοποιεί την εξίσωση (1), είναι γραμμικός.

Θα πάρουμε σαν παράδειγμα τους χώρους $\mathbf{P}_n$, όπου τα διανύσματα είναι πολυώνυμα $p(t)$ βαθμού n. Έχουν τη μορφή $p = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, και η διάσταση του διανυσματικού χώρου είναι $n+1$ (διότι, μαζί με τον σταθερό όρο, υπάρχουν $n+1$ συντελεστές).

Παράδειγμα 1 Η πράξη της ***παραγώγισης***, $A = d/dt$, είναι γραμμική:

$$Ap(t) = \frac{d}{dt}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_1 + \cdots + n a_n t^{n-1}. \tag{2}$$

Ο μηδενόχωρος αυτού του A είναι ο μονοδιάστατος χώρος των σταθερών: $da_0/dt = 0$. Ο χώρος στηλών είναι ο n-διάστατος χώρος $\mathbf{P}_{n-1}$· το δεξί μέλος της εξίσωσης (2) ανήκει πάντα σε αυτόν τον χώρο. Το άθροισμα της μηδενικότητας ($= 1$) και της τάξης ($= n$) είναι η διάσταση του αρχικού χώρου $\mathbf{P}_n$.

Παράδειγμα 2 Η ***ολοκλήρωση*** από το 0 ώς το t είναι επίσης γραμμική (*απεικονίζει τον* $\mathbf{P}_n$ *στον* $\mathbf{P}_{n+1}$):

$$Ap(t) = \int_0^t (a_0 + \cdots + a_n t^n)\,dt = a_0 t + \cdots + \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}. \tag{3}$$

Αυτή τη φορά δεν υπάρχει μηδενόχωρος (εκτός από το μηδενικό διάνυσμα, όπως πάντα!), αλλά η ολοκλήρωση δεν παράγει όλα τα πολυώνυμα του $\mathbf{P}_{n+1}$. Το δεξί μέλος της εξίσωσης (3) δεν περιέχει σταθερό όρο. Τα σταθερά πολυώνυμα ίσως αποτελέσουν τον αριστερό μηδενόχωρο.

Παράδειγμα 3 Ο ***πολλαπλασιασμός*** με ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο, όπως το $2+3t$, είναι γραμμικός:

$$Ap(t) = (2+3t)(a_0 + \cdots + a_n t^n) = 2a_0 + \cdots + 3a_n t^{n+1}.$$

Και πάλι, αυτό μετασχηματίζει τον $\mathbf{P}_n$ στον $\mathbf{P}_{n+1}$, χωρίς μηδενόχωρο εκτός του $p = 0$.

Στα παραδείγματα αυτά (και σχεδόν σε όλα τα παραδείγματα), δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε τη γραμμικότητα. Δεν φαίνεται καν ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Αν υπάρχει, είναι πρακτικά αδύνατο να μην τη δούμε. Παρόλα αυτά, είναι η σημαντικότερη ιδιότητα που μπορεί να έχει ένας μετασχηματισμός.* Ασφαλώς, οι περισσότεροι μετασχηματισμοί δεν είναι γραμμικοί —για παράδειγμα, ο υπολογισμός του τετραγώνου ενός πολυωνύμου ($Ap = p^2$), η πρόσθεση του 1 ($Ap = p + 1$) και η διατήρηση των θετικών συντελεστών ($A(t - t^2) = t$). Οι γραμμικοί μετασχηματισμοί, και *μόνο αυτοί*, θα μας οδηγήσουν ξανά στους πίνακες.

Μετασχηματισμοί που αναπαριστώνται με πίνακες

Η γραμμικότητα έχει μια κρίσιμη συνέπεια: ***Αν γνωρίζουμε το Ax για κάθε διάνυσμα μιας βάσης, τότε γνωρίζουμε το Ax για κάθε διάνυσμα ολόκληρου του χώρου.*** Ας υποθέσουμε

* Η αντιστρεψιμότητα είναι ίσως η δεύτερη σημαντικότερη ιδιότητα.

ότι η βάση αποτελείται από τα n διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Κάθε άλλο διάνυσμα x είναι ένας συνδυασμός των συγκεκριμένων αυτών διανυσμάτων (παράγουν τον χώρο), και το Ax καθορίζεται από τη γραμμικότητα:

$$\textbf{Γραμμικότητα} \qquad \begin{array}{ll} \text{Αν} & x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ \text{τότε} & Ax = c_1(Ax_1) + \cdots + c_n(Ax_n). \end{array} \tag{4}$$

Άπαξ και καθοριστεί τι θα κάνει με τα διανύσματα βάσης ο μετασχηματισμός $T(x) = Ax$, δεν του απομένει καμία ελευθερία. Τα υπόλοιπα καθορίζονται από τη γραμμικότητα. Η απαίτηση (1) για δύο διανύσματα x και y οδηγεί στη συνθήκη (4) για n διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$. Ο μετασχηματισμός μπορεί να χειριστεί ελεύθερα τα διανύσματα της βάσης (είναι ανεξάρτητα). Μόλις καθοριστεί τι θα κάνει με αυτά, έχει καθοριστεί και ο μετασχηματισμός κάθε διανύσματος.

Παράδειγμα 4 Ποιος γραμμικός μετασχηματισμός μετασχηματίζει τα x_1 και x_2 στα Ax_1 και Ax_2;

$$\text{Το} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{απεικονίζεται στο} \quad Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$\text{το} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{απεικονίζεται στο} \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Πρέπει να έχουμε τον πολλαπλασιασμό $T(x) = Ax$ με τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Αν ξεκινήσουμε με μια διαφορετική βάση $(1, 1)$ και $(2, -1)$, ο ίδιος A είναι επίσης ο μόνος γραμμικός μετασχηματισμός για τον οποίο

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα βρούμε πίνακες που αναπαριστούν την παραγώγιση και την ολοκλήρωση. ***Αρχικά πρέπει να αποφασίσουμε ποια θα είναι η βάση***. Για τα πολυώνυμα βαθμού 3, η φυσική επιλογή για τα τέσσερα διανύσματα βάσης είναι η εξής:

$$\textbf{Βάση του } \mathbf{P_3} \qquad p_1 = 1, \;\; p_2 = t, \;\; p_3 = t^2, \;\; p_4 = t^3.$$

Η βάση αυτή δεν είναι μοναδική (ποτέ δεν είναι), αλλά πρέπει να κάνουμε κάποια επιλογή και αυτή είναι η πιο βολική. Οι παράγωγοι των τεσσάρων αυτών διανυσμάτων βάσης είναι $0, 1, 2t, 3t^2$:

$$\textbf{Δράση του } \boldsymbol{d/dt} \qquad Ap_1 = 0, \quad Ap_2 = p_1, \quad Ap_3 = 2p_2, \quad Ap_4 = 3p_3. \tag{5}$$

Το «d/dt» δρα ακριβώς όπως ένας πίνακας, αλλά ποιος πίνακας; Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στον συνήθη τετραδιάστατο χώρο με τη συνήθη βάση —τα διανύσματα συντεταγμένων $p_1 = (1,0,0,0)$, $p_2 = (0,1,0,0)$, $p_3 = (0,0,1,0)$ και $p_4 = (0,0,0,1)$. Ο πίνακας καθορίζεται από την εξίσωση (5):

$$\textbf{Πίνακας παραγώγισης} \qquad A_{\text{diff}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Το Ap_1 είναι η πρώτη του στήλη, η οποία είναι μηδέν. Το Ap_2 είναι η δεύτερη στήλη, η οποία είναι το p_1. Το Ap_3 είναι το $2p_2$ και το Ap_4 είναι το $3p_3$. Ο μηδενόχωρος περιέχει το p_1 (η παράγωγος μιας σταθεράς είναι μηδέν). Ο χώρος στηλών περιέχει τα p_1, p_2, p_3 (η παράγωγος ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού). Η παράγωγος ενός συνδυασμού, όπως του $p = 2+t-t^2-t^3$, καθορίζεται από τη γραμμικότητα. Αυτό δεν είναι κάτι καινούργιο —είναι ο τρόπος με τον οποίο παραγωγίζουμε όλοι. Θα ήταν παράλογο να απομνημονεύαμε την παράγωγο κάθε πολυωνύμου.

Ο πίνακας μπορεί να παραγωγίσει το $p(t)$, διότι οι πίνακες στηρίζονται στη γραμμικότητα!

$$\frac{dp}{dt} = Ap \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \to 1 - 2t - 3t^2.$$

Εν συντομία, *ο πίνακας περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία*. Αν γνωρίζουμε τη βάση και τον πίνακα, γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό κάθε διανύσματος.

Η πληροφορία κωδικοποιείται απλά. Για να μετασχηματίσουμε έναν χώρο στον εαυτό του, αρκεί μία βάση. Για να μετασχηματίσουμε έναν χώρο σε κάποιον άλλο χρειαζόμαστε μία βάση για κάθε χώρο.

2ΚΑ Έστω ότι τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbf{V}$ και ότι τα διανύσματα $y_1, \ldots, y_m$ είναι μια βάση του $\mathbf{W}$. Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbf{V}$ στον $\mathbf{W}$ αναπαριστάται από έναν πίνακα A. Βρίσκουμε την j-οστή στήλη εφαρμόζοντας τον T στο j-οστό διάνυσμα βάσης x_j και γράφοντας το $T(x_j)$ σαν συνδυασμό των y:

$$\textbf{Στήλη } \boldsymbol{j} \textbf{ του } \boldsymbol{A} \qquad T(x_j) = Ax_j = a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m. \tag{6}$$

Για τον πίνακα παραγώγισης, η στήλη 1 προήλθε από το πρώτο διάνυσμα βάσης $p_1 = 1$. Η παράγωγός του είναι μηδέν, οπότε η στήλη 1 ήταν μηδέν. Η τελευταία στήλη προήλθε από το $(d/dt)t^3 = 3t^2$. Αφού $3t^2 = 0p_1 + 0p_2 + 3p_3 + 0p_4$, η τελευταία στήλη περιείχε $0, 0, 3, 0$. Σύμφωνα με τον κανόνα (6), ο πίνακας κατασκευάζεται στήλη προς στήλη.

Το ίδιο κάνουμε για την ολοκλήρωση. Η ολοκλήρωση μας μεταφέρει από την τρίτη στην τέταρτη δύναμη, μετασχηματίζοντας τον $\mathbf{V} = \mathbf{P}_3$ στον $\mathbf{W} = \mathbf{P}_4$. Άρα χρειαζόμαστε μια βάση για τον $\mathbf{W}$. Η φυσική επιλογή είναι τα $y_1 = 1$, $y_2 = t$, $y_3 = t^2$, $y_4 = t^3$, $y_5 = t^4$, που παράγουν τα πολυώνυμα βαθμού 4. Ο πίνακας A θα είναι m επί n, ή 5 επί 4. Προκύπτει με εφαρμογή της ολοκλήρωσης σε κάθε διάνυσμα βάσης του $\mathbf{V}$:

$$\int_0^t 1\,dt = t \quad ή \quad Ax_1 = y_2, \quad \ldots, \quad \int_0^t t^3\,dt = \frac{1}{4}t^4 \quad ή \quad Ax_4 = \frac{1}{4}y_5.$$

$$\textbf{Πίνακας ολοκλήρωσης} \qquad A_{ολοκ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Η παραγώγιση και η ολοκλήρωση είναι *αντίστροφες πράξεις*. Ή τουλάχιστον, η ολοκλήρωση *ακολουθούμενη* από την παραγώγιση μας επαναφέρει στην αρχική συνάρτηση. Για να επιτύχουμε το ίδιο με τους πίνακες, χρειαζόμαστε τον πίνακα παραγώγισης που μας μεταφέρει από την τέταρτη στην τρίτη δύναμη, ο οποίος είναι 4 επί 5:

$$A_{παραγ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad A_{παραγ}A_{ολοκ} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Η παραγώγιση είναι ένας ***αριστερός αντίστροφος*** της ολοκλήρωσης. Οι παραλληλόγραμμοι πίνακες δεν μπορούν να έχουν αμφίπλευρους αντιστρόφους! Με την αντίστροφη σειρά, δεν μπορεί να ισχύει $A_{ολοκ}A_{παραγ} = I$. Το 5 επί 5 γινόμενο έχει μηδενικά στη στήλη 1. Η παράγωγος μια σταθεράς είναι το μηδέν. Οι υπόλοιπες στήλες του $A_{ολοκ}A_{παραγ}$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας και το ολοκλήρωμα της παραγώγου του t^n είναι το t^n.

Στροφές Q, προβολές P και ανακλάσεις H

Ξεκινήσαμε αυτή την ενότητα μιλώντας για στροφές κατά $90°$, προβολές επί του άξονα x και ανακλάσεις ως προς την ευθεία των $45°$. Οι αντίστοιχοι πίνακες είναι εξαιρετικά απλοί:

$$\underset{\text{(στροφή)}}{Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{(προβολή)}}{P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{(ανάκλαση)}}{H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Οι αντίστοιχοι γραμμικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου x-y είναι και αυτοί απλοί. Οι στροφές κατά άλλες γωνίες, οι προβολές επί άλλων ευθειών και οι ανακλάσεις ως προς άλλους καθρέφτες μπορούν να οπτικοποιηθούν σχεδόν εξίσου εύκολα. Είναι και αυτοί γραμμικοί μετασχηματισμοί, υπό τον όρο η αρχή των αξόνων να παραμένει σταθερή: $A0 = 0$. *Πρέπει* να μπορούν να αναπαρασταθούν με πίνακες. Χρησιμοποιώντας τη φυσική βάση $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, θέλουμε να ανακαλύψουμε αυτούς τους πίνακες.

1. Στροφή Στο Σχήμα 2.10 παρουσιάζεται μια στροφή κατά γωνία θ. Παρουσιάζεται επίσης η επίδρασή της στα δύο διανύσματα βάσης. Το πρώτο απεικονίζεται στο $(\cos\theta, \sin\theta)$, το οποίο έχει και αυτό μήκος 1· περιέχεται στην «θ-ευθεία». Το δεύτερο διάνυσμα βάσης $(0,1)$ στρέφεται στο $(-\sin\theta, \cos\theta)$. Σύμφωνα με τον κανόνα (6), οι αριθμοί αυτοί τοποθετούνται στις στήλες του πίνακα (χρησιμοποιούμε τα c και s αντί των $\cos\theta$ και $\sin\theta$). Η οικογένεια στροφών Q_θ είναι μια ιδανική ευκαιρία να ελέγξουμε την αντιστοιχία μεταξύ μετασχηματισμών και πινάκων:

*Ισούται ο **αντίστροφος** του Q_θ με $Q_{-\theta}$* (στροφή κατά την αντίθετη κατεύθυνση κατά θ); *Ναι.*

$$Q_\theta Q_{-\theta} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Ισούται το **τετράγωνο** του Q_θ με $Q_{2\theta}$* (στροφή κατά τη διπλάσια γωνία); *Ναι.*

$$Q_\theta^2 = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2-s^2 & -2cs \\ 2cs & c^2-s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

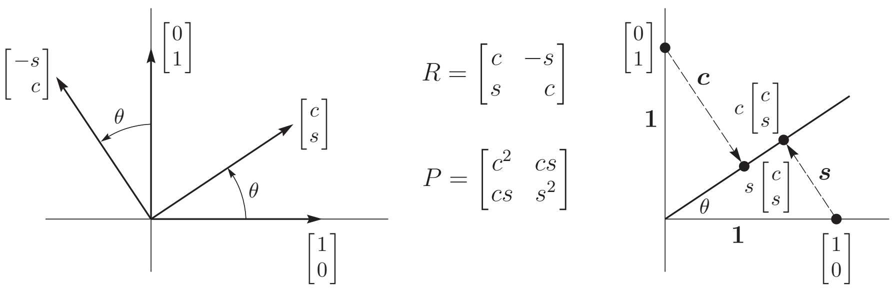
*Ισούται το **γινόμενο** των Q_θ και Q_φ με $Q_{\theta+\varphi}$* (στροφή κατά θ και κατόπιν κατά φ); *Ναι.*

$$Q_\theta Q_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi & \cdots \\ \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \cdots \\ \sin(\theta+\varphi) & \cdots \end{bmatrix}.$$

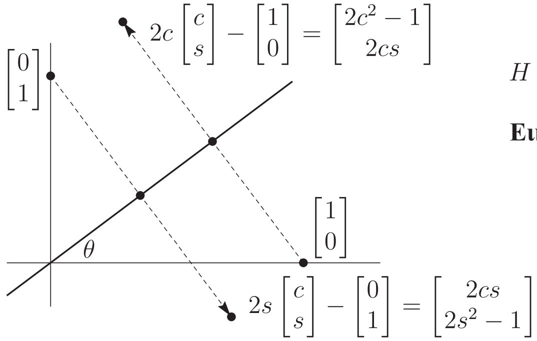
Η τελευταία περίπτωση περιλαμβάνει τις δύο πρώτες. Ο αντίστροφος εμφανίζεται όταν η φ είναι $-\theta$, και το τετράγωνο εμφανίζεται όταν η φ είναι $+\theta$. Οι απαντήσεις και στα τρία ερωτήματα προκύπτουν μέσω των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων (και μας προσφέρουν έναν νέο τρόπο να θυμόμαστε αυτές τις ταυτότητες). Δεν είναι τυχαίο ότι όλα τα ερωτήματα είχαν καταφατική απάντηση. Ο *πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται ακριβώς έτσι ώστε* ***το γινόμενο των πινάκων να αντιστοιχεί στο γινόμενο των μετασχηματισμών***.

2ΚΒ Έστω A και B γραμμικοί μετασχηματισμοί από τον $\mathbf{V}$ στον $\mathbf{W}$ και από τον $\mathbf{U}$ στον $\mathbf{V}$. Το γινόμενό τους AB ξεκινάει από ένα διάνυσμα u του $\mathbf{U}$, πηγαίνει στο Bu του $\mathbf{V}$ και ολοκληρώνεται με το ABu του $\mathbf{W}$. Η «σύνθεση» AB είναι και αυτή ένας γραμμικός μετασχηματισμός (από τον $\mathbf{U}$ στον $\mathbf{W}$). Ο πίνακάς της είναι το γινόμενο των επιμέρους πινάκων που αναπαριστούν τους A και B.

Για τον $A_{\text{παραγ}}A_{\text{ολοκ}}$, ο σύνθετος μετασχηματισμός ήταν ο ταυτοτικός (και ο $A_{\text{ολοκ}}A_{\text{παραγ}}$ εξαφάνισε όλες τις σταθερές). Για τις στροφές, η σειρά του πολλαπλασιασμού δεν παίζει ρόλο. Σε αυτή την περίπτωση, ο $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{W}$ είναι το επίπεδο x-y και ο $Q_\theta Q_\varphi$ είναι ίδιος με τον



Σχήμα 2.10 Στροφή κατά θ (αριστερά). Προβολή επί της θ-ευθείας (δεξιά).



$$H = 2P - I = \begin{bmatrix} 2c^2-1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2-1 \end{bmatrix}$$

Εικόνα + αρχικό = 2 × προβολή

$$Hx + x = 2Px$$

Σχήμα 2.11 Ανάκλαση ως προς την θ-ευθεία: η γεωμετρία και ο πίνακας.

$Q_\varphi Q_\theta$. Στην περίπτωση μιας στροφής που ακολουθείται από ανάκλαση, η σειρά παίζει ρόλο.

Τεχνική σημείωση: Για να κατασκευάσουμε τους πίνακες, χρειαζόμαστε βάσεις για τους **V** και **W**, και κατόπιν για τους **U** και **V**. Αν κρατήσουμε την ίδια βάση για τον **V**, ο πίνακας γινομένου μεταβαίνει σωστά από τη βάση του **U** στη βάση του **W**. Αν διακρίνουμε τον μετασχηματισμό A από τον πίνακά του (και τον συμβολίσουμε με $[A]$), τότε ο κανόνας γινόμενου 2ΚΒ γίνεται εξαιρετικά σύντομος: $[AB] = [A][B]$. Ο κανόνας πολλαπλασιασμού πινάκων του Κεφαλαίου 1 καθορίστηκε πλήρως από αυτή την απαίτηση—πρέπει να συμφωνεί με το γινόμενο των γραμμικών μετασχηματισμών.

2. Προβολή Στο Σχήμα 2.10 παρουσιάζεται επίσης η προβολή του $(1,0)$ επί της θ-ευθείας. Το μήκος της προβολής είναι $c = \cos\theta$. Προσέξτε ότι το *σημείο* της προβολής δεν είναι το (c,s), όπως εσφαλμένα μπορεί να νομίσει κανείς· το διάνυσμα αυτό έχει μήκος 1 (είναι η στροφή), άρα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε με c. Με αντίστοιχο τρόπο, η προβολή του $(0,1)$ έχει μήκος s και πέφτει στο $s(c,s) = (cs, s^2)$. Αυτό μας δίνει τη δεύτερη στήλη του πίνακα προβολής P:

$$\textbf{Προβολή επί της } \boldsymbol{\theta}\textbf{-ευθείας} \qquad P = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας αυτός δεν έχει αντίστροφο, διότι ο μετασχηματισμός δεν έχει αντίστροφο. Τα σημεία της κατακόρυφης ευθείας προβάλλονται στην αρχή των αξόνων· η ευθεία αυτή είναι ο μηδενόχωρος του P. Τα σημεία της θ-ευθείας προβάλλονται στον εαυτό τους! Είτε προβάλλουμε μία είτε δύο φορές, το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, άρα $P^2 = P$:

$$P^2 = \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} c^2(c^2+s^2) & cs(c^2+s^2) \\ cs(c^2+s^2) & s^2(c^2+s^2) \end{bmatrix} = P.$$

Ασφαλώς, $c^2 + s^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. ***Ένας πίνακας προβολής ισούται με το τετράγωνό του.***

3. Ανάκλαση Στο Σχήμα 2.11 παρουσιάζεται η ανάκλαση του $(1,0)$ ως προς την θ-ευθεία. Το μήκος της ανάκλασης ισούται με το αρχικό μήκος, όπως και στην περίπτωση της στροφής—σε αυτή την περίπτωση όμως η θ-ευθεία παραμένει εκεί όπου βρίσκεται. Η κάθετη ευθεία αντιστρέφει την κατεύθυνση· όλα τα σημεία διέρχονται μέσα από τον καθρέφτη. Τα υπόλοιπα καθορίζονται από τη γραμμικότητα.

$$\textbf{Πίνακας ανάκλασης} \qquad H = \begin{bmatrix} 2c^2-1 & 2cs \\ 2cs & 2s^2-1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας H έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα ότι $H^2 = I$. ***Δύο ανακλάσεις μάς επαναφέρουν στο σημείο από όπου ξεκινήσαμε***. Κάθε ανάκλαση είναι ο αντίστροφος του εαυτού της, $H = H^{-1}$, το οποίο είναι προφανές από τη γεωμετρία αλλά λιγότερο προφανές από τον πίνακα. Ένας τρόπος να το αποδείξουμε είναι μέσω της σχέσης μεταξύ ανάκλασης και προβολής: $H = 2P - I$. Αυτό σημαίνει ότι $Hx + x = 2Px$ —η εικόνα συν το αρχικό διάνυσμα ισούται με το διπλάσιο της προβολής. Επιβεβαιώνεται επίσης ότι $H^2 = I$:

$$H^2 = (2P-I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I, \qquad \text{αφού } P^2 = P.$$

Άλλοι μετασχηματισμοί Ax μπορούν να αυξήσουν το μήκος του x· με την έκταση και τη στρέβλωση θα ασχοληθούμε στις ασκήσεις. Για κάθε παράδειγμα, υπάρχει ένας πίνακας που το αναπαριστά —αυτό είναι το βασικό συμπέρασμα αυτής της ενότητας. Υπάρχει όμως και το ζήτημα της επιλογής μιας βάσης· τονίζουμε ότι *ο πίνακας εξαρτάται από την επιλογή βάσης*. Ας υποθέσουμε ότι το πρώτο διάνυσμα βάσης ανήκει ***στην θ-ευθεία*** και ότι το δεύτερο διάνυσμα βάσης είναι ***κάθετο*** σε αυτό:

(i) Ο πίνακας προβολής είναι πάλι ο $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ο πίνακας αυτός κατασκευάζεται όπως πάντα: η πρώτη στήλη του προκύπτει από το πρώτο διάνυσμα βάσης (προβεβλημένο στον εαυτό του). Η δεύτερη στήλη προκύπτει από το διάνυσμα βάσης που προβάλλεται στο μηδέν.

(ii) Για τις ανακλάσεις, η ίδια βάση δίνει $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Το δεύτερο διάνυσμα βάσης ανακλάται στο αρνητικό του, και έτσι προκύπτει η δεύτερη στήλη. Όταν χρησιμοποιούμε την ίδια βάση για τους H και P, ο πίνακας H παραμένει ίσος με $2P - I$.

(iii) Για τις στροφές, ο πίνακας δεν αλλάζει. Οι ευθείες αυτές στρέφονται και πάλι κατά θ, και $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$ όπως προηγουμένως.

Το ζήτημα της επιλογής της καλύτερης βάσης είναι πολύ σημαντικό· θα επανέλθουμε σε αυτό το ζήτημα στο Κεφάλαιο 5. Στόχος είναι να κάνουμε τον πίνακα διαγώνιο, όπως το πετύχαμε για τους P και H. Για να κάνουμε τον Q διαγώνιο χρειαζόμαστε μιγαδικά διανύσματα, αφού όλα τα πραγματικά διανύσματα στρέφονται.

Σε αυτό το σημείο θα αναφέρουμε την επίδραση που έχει στον πίνακα μια *αλλαγή βάσης* όταν ο γραμμικός μετασχηματισμός παραμένει ο ίδιος. ***Ο πίνακας*** $\boldsymbol{A}$ (ή Q ή P ή H) ***μετατρέπεται στον*** $\boldsymbol{S^{-1}AS}$. Επομένως, ο ίδιος μετασχηματισμός αναπαριστάται από διαφορετικούς πίνακες (μέσω διαφορετικών βάσεων, τις οποίες λαμβάνει υπόψη ο S). Στον τύπο $S^{-1}AS$, και στην καλύτερη βάση, θα μας οδηγήσει η θεωρία ιδιοδιανυσμάτων.

Προβλήματα 2.6

1. Ποιος πίνακας στρέφει κάθε διάνυσμα κατά 90° και κατόπιν προβάλλει το αποτέλεσμα στον άξονα x; Ποιος πίνακας αναπαριστά την προβολή επί του άξονα x ακολουθούμενη από την προβολή επί του άξονα y;

2. Το γινόμενο 5 ανακλάσεων και 8 στροφών του επιπέδου x-y είναι στροφή ή ανάκλαση;

3. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ προκαλεί ***έκταση*** κατά τη διεύθυνση x. Σχεδιάστε τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, και κατόπιν τα σημεία $(2x, y)$ που προκύπτουν ως αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού με τον A. Τι σχήμα έχει αυτή η καμπύλη;

4. Κάθε ευθεία παραμένει ευθεία μετά την εφαρμογή ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Αν το z βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των x και y, δείξτε ότι το Az βρίσκεται στο μέσο μεταξύ των Ax και Ay.

5. Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ δίνει έναν μετασχηματισμό ***στρέβλωσης***, ο οποίος αφήνει τον άξονα y αμετάβλητο. Σχεδιάστε την επίδρασή του στον άξονα x, δείχνοντας τι συμβαίνει στα $(1, 0)$ και $(2, 0)$ και $(-1, 0)$ —και πώς μετασχηματίζεται ολόκληρος ο άξονας.

6. Ποιοι 3 επί 3 πίνακες αναπαριστούν τους μετασχηματισμούς που

(α) προβάλλουν κάθε διάνυσμα επί του επιπέδου x-y;
(β) ανακλούν κάθε διάνυσμα ως προς το επίπεδο x-y;
(γ) στρέφουν το επίπεδο x-y κατά $90°$, αφήνοντας σταθερό τον άξονα z;
(δ) στρέφουν το επίπεδο x-y, κατόπιν το x-z και κατόπιν το y-z, κατά $90°$;
(ε) εκτελούν τις παραπάνω τρεις στροφές, αλλά καθεμία κατά $180°$;

7. Ποιος πίνακας αναπαριστά την d^2/dt^2 στον χώρο $\mathbf{P}_3$ των πολυωνύμων τρίτου βαθμού; Κατασκευάστε τον 4 επί 4 πίνακα χρησιμοποιώντας τη συνήθη βάση 1, t, t^2, t^3. Βρείτε τον μηδενόχωρο και τον χώρο στηλών του. Ποια πολυώνυμα ανήκουν σε αυτούς τους χώρους;

8. Ποιος πίνακας αναπαριστά τον πολλαπλασιασμό με $2+3t$, που απεικονίζει τα πολυώνυμα τρίτου βαθμού $\mathbf{P}_3$ στα πολυώνυμα τετάρτου βαθμού $\mathbf{P}_4$; Οι στήλες του 5 επί 4 πίνακα A προκύπτουν με εφαρμογή του μετασχηματισμού στα 1, t, t^2, t^3.

9. Οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης $d^2u/dt^2 = u$ σχηματίζουν έναν διανυσματικό χώρο (αφού οι συνδυασμοί των λύσεων είναι και αυτοί λύσεις). Βρείτε δύο ανεξάρτητες λύσεις, βρίσκοντας έτσι μια βάση του συγκεκριμένου χώρου λύσεων.

10. Ποιος συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης του Προβλήματος 9 αποτελεί λύση της $u'' = u$, με αρχικές τιμές $u = x$ και $du/dt = y$ για $t = 0$; Αυτός ο μετασχηματισμός από τις αρχικές τιμές στις λύσεις είναι γραμμικός. Ποιος είναι ο αντίστοιχος 2 επί 2 πίνακας (χρησιμοποιήστε τα $x = 1, y = 0$ και $x = 0, y = 1$ σαν βάση του $\mathbf{V}$, και τη βάση του $\mathbf{W}$ που βρήκατε);

11. Επαληθεύστε απευθείας από την $c^2 + s^2 = 1$ ότι οι πίνακες ανάκλασης ικανοποιούν την $H^2 = I$.

12. Υποθέστε ότι A είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το επίπεδο x-y στον εαυτό του. Γιατί ισχύει η σχέση $A^{-1}(x+y) = A^{-1}x + A^{-1}y$; Αν ο A αναπαριστάται από τον πίνακα M, εξηγήστε γιατί ο A^{-1} αναπαριστάται από τον M^{-1}.

13. Το γινόμενο γραμμικών μετασχηματισμών $(AB)C$ ξεκινάει με ένα διάνυσμα x και παράγει το $u = Cx$. Κατόπιν, ο κανόνας 2ΚΒ εφαρμόζει τον AB στον u δίνοντας το $(AB)Cx$.

(α) Προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμοστούν ξεχωριστά ο C, κατόπιν ο B και κατόπιν ο A;

(β) Προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμοστεί ο BC και κατόπιν ο A; Οι παρενθέσεις δεν είναι απαραίτητες, διότι η προσεταιριστική ιδιότητα $(AB)C = A(BC)$ ισχύει για τους γραμμικούς μετασχηματισμούς. Αυτή είναι η καλύτερη απόδειξη του ίδιου κανόνα για τους πίνακες.

14. Αποδείξτε ότι αν ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός (από τον $\mathbf{R}^3$ στον $\mathbf{R}^3$), ο T^2 είναι επίσης γραμμικός.

15. Ο χώρος όλων των 2 επί 2 πινάκων έχει τα εξής τέσσερα «διανύσματα» βάσης:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον πίνακα A του γραμμικού μετασχηματισμού *αναστροφής* ως προς αυτή τη βάση. Γιατί ισχύει $A^2 = I$;

16. Βρείτε τον 4 επί 4 κυκλικό πίνακα μετάθεσης: Το (x_1, x_2, x_3, x_4) μετασχηματίζεται στο $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. Ποια είναι η επίδραση του A^2; Δείξτε ότι $A^3 = A^{-1}$.

17. Βρείτε τον 4 επί 3 πίνακα A που αναπαριστά μια *δεξιά ολίσθηση*: Το (x_1, x_2, x_3) μετασχηματίζεται στο $(0, x_1, x_2, x_3)$. Βρείτε επίσης τον πίνακα *αριστερής ολίσθησης* B, από τον $\mathbf{R}^4$ ξανά στον $\mathbf{R}^3$, που μετασχηματίζει το (x_1, x_2, x_3, x_4) στο (x_2, x_3, x_4). Ποια είναι τα γινόμενα AB και BA;

18. Στον διανυσματικό χώρο P_3 όλων των $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, έστω $\mathbf{S}$ το υποσύνολο των πολυωνύμων με $\int_0^1 p(x)\,dx = 0$. Επαληθεύστε ότι ο $\mathbf{S}$ είναι υπόχωρος και βρείτε μια βάση.

19. Ένας *μη γραμμικός* μετασχηματισμός είναι αντιστρέψιμος αν το $T(x) = b$ έχει ακριβώς μία λύση για κάθε b. Το παράδειγμα $T(x) = x^2$ δεν είναι αντιστρέψιμο, διότι η $x^2 = b$ έχει δύο λύσεις για θετικό b και καμία λύση για αρνητικό b. Ποιος από τους παρακάτω μετασχηματισμούς (από τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbf{R}^1$ στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbf{R}^1$) είναι αντιστρέψιμος; Κανένας δεν είναι γραμμικός, ούτε ο (γ).

(α) $T(x) = x^3$. (β) $T(x) = e^x$.
(γ) $T(x) = x + 11$. (δ) $T(x) = \cos x$.

20. Ποιος είναι ο άξονας και η γωνία στροφής του μετασχηματισμού που απεικονίζει το (x_1, x_2, x_3) στο (x_2, x_3, x_1);

21. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός πρέπει να αφήνει το μηδενικό διάνυσμα σταθερό: $T(0) = 0$. Αποδείξτε το από την $T(v + w) = T(v) + T(w)$, επιλέγοντας $w =$ ______. Αποδείξτε το επίσης από την απαίτηση $T(cv) = cT(v)$, επιλέγοντας $c =$ ______.

22. Ποιος από τους παρακάτω μετασχηματισμούς δεν είναι γραμμικός; Η είσοδος είναι $v = (v_1, v_2)$.

(α) $T(v) = (v_2, v_1)$. (β) $T(v) = (v_1, v_1)$.
(γ) $T(v) = (0, v_1)$. (δ) $T(v) = (0, 1)$.

23. Αν οι S και T είναι γραμμικοί με $S(v) = T(v) = v$, τότε $S(T(v)) = v$ ή v^2;

24. Υποθέστε ότι $T(v) = v$, με τη διαφορά ότι $T(0, v_2) = (0, 0)$. Δείξτε ότι ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός ικανοποιεί την $T(cv) = cT(v)$ αλλά όχι την $T(v+w) = T(v)+T(w)$.

25. Ποιοι από τους παρακάτω μετασχηματισμούς ικανοποιούν την $T(v+w) = T(v)+T(w)$ και ποιοι ικανοποιούν την $T(cv) = cT(v)$;

(α) $T(v) = v/\|v\|$. (β) $T(v) = v_1 + v_2 + v_3$.
(γ) $T(v) = (v_1, 2v_2, 3v_3)$. (δ) $T(v) =$ η μεγαλύτερη συνιστώσα του v.

26. Βρείτε τον $T(T(v))$ για τους παρακάτω μετασχηματισμούς του $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ στον $\mathbf{W} = \mathbf{R}^2$.

(α) $T(v) = -v$.
(β) $T(v) = v + (1, 1)$.
(γ) $T(v) =$ στροφή $90^\circ = (-v_2, v_1)$.
(δ) $T(v) =$ προβολή $= \left(\dfrac{v_1 + v_2}{2}, \dfrac{v_1 + v_2}{2}\right)$.

27. Ο «κυκλικός» μετασχηματισμός T ορίζεται από την $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_3, v_1)$. Ποιος είναι ο $T(T(T(v)))$; Ποιος είναι ο $T^{100}(v)$;

28. Βρείτε το *πεδίο τιμών* και τον *πυρήνα* (πρόκειται για νέες ονομασίες του χώρου στηλών και του μηδενόχωρου) του T.

(α) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. (β) $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2)$.
(γ) $T(v_1, v_2) = (0, 0)$. (δ) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_1)$.

29. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός από τον $\boldsymbol{V}$ στον $\boldsymbol{W}$ έχει *αντίστροφο* από τον $\boldsymbol{W}$ στον $\boldsymbol{V}$ όταν το πεδίο τιμών είναι ολόκληρος ο $\boldsymbol{W}$ και ο πυρήνας περιέχει μόνο το $v = 0$. Γιατί δεν είναι αντιστρέψιμοι οι παρακάτω μετασχηματισμοί;

(α) $T(v_1, v_2) = (v_2, v_2)$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^2$.
(β) $T(v_1, v_2) = (v_1, v_2, v_1 + v_2)$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^3$.
(γ) $T(v_1, v_2) = v_1$ $\quad \mathbf{W} = \mathbf{R}^1$.

30. Υποθέστε ότι ένας γραμμικός T μετασχηματίζει το $(1, 1)$ στο $(2, 2)$ και το $(2, 0)$ στο $(0, 0)$. Βρείτε το $T(v)$ για

(α) $v = (2, 2)$. (β) $v = (3, 1)$. (γ) $v = (-1, 1)$. (δ) $v = (a, b)$.

Τα Προβλήματα 31–35 ενδέχεται να είναι δυσκολότερα. Ο χώρος εισόδου $\boldsymbol{V}$ περιέχει όλους τους 2 επί 2 πίνακες $\boldsymbol{M}$.

31. Ο M είναι ένας 2 επί 2 πίνακας και $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ο γραμμικός μετασχηματισμός T ορίζεται από την $T(M) = AM$. Από ποιους κανόνες πολλαπλασιασμού πινάκων προκύπτει ότι ο T είναι γραμμικός;

32. Υποθέστε ότι $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι ο ταυτοτικός πίνακας I δεν είναι ανήκει στο πεδίο τιμών του T. Βρείτε έναν μη μηδενικό πίνακα M για τον οποίο το $T(M) = AM$ να είναι μηδέν.

33. Υποθέστε ότι ο T αναστρέφει κάθε πίνακα M. Προσπαθήσετε να βρείτε έναν πίνακα A που να δίνει $AM = M^{\mathrm{T}}$ για κάθε M. Δείξτε ότι δεν υπάρχει τέτοιος πίνακας A. *Προς τους καθηγητές:* Πρόκειται για γραμμικό μετασχηματισμό που δεν προκύπτει από πίνακα;

34. Ο μετασχηματισμός T που αναστρέφει κάθε πίνακα είναι σίγουρα γραμμικός. Ποιες από τις παρακάτω επιπλέον ιδιότητες ισχύουν;

(α) $T^2 =$ ταυτοτικός μετασχηματισμός.
(β) Ο πυρήνας του T είναι ο μηδενικός πίνακας.
(γ) Κάθε πίνακας ανήκει στο πεδίο τιμών του T.
(δ) Η $T(M) = -M$ είναι αδύνατη.

35. Υποθέστε ότι $T(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Βρείτε έναν πίνακα για τον οποίο να ισχύει $T(M) \neq 0$. Περιγράψτε όλους τους πίνακες για τους οποίους $T(M) = 0$ (τον πυρήνα του T) και όλους τους πίνακες εξόδου $T(M)$ (το πεδίο τιμών του T).

Τα Προβλήματα 36–40 αφορούν την αλλαγή βάσης.

36. (α) Ποιος πίνακας μετασχηματίζει το $(1, 0)$ στο $(2, 5)$ και το $(0, 1)$ στο $(1, 3)$;
(β) Ποιος πίνακας μετασχηματίζει το $(2, 5)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$;
(γ) Γιατί δεν υπάρχει πίνακας που να μετασχηματίζει το $(2, 6)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$;

37. (α) Ποιος πίνακας M μετασχηματίζει τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα (r, t) και (s, u);
(β) Ποιος πίνακας N μετασχηματίζει τα (a, c) και (b, d) στα $(1, 0)$ και $(0, 1)$;
(γ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα a, b, c, d ώστε το (β) να είναι αδύνατο;

38. (α) Πώς προκύπτει από τους M και N του Προβλήματος 37 ο πίνακας που μετασχηματίζει το (a, c) στο (r, t) και το (b, d) στο (s, u);
(β) Ποιος πίνακας μετασχηματίζει το $(2, 5)$ στο $(1, 1)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 2)$;

39. Αν κρατήσουμε τα ίδια διανύσματα βάσης αλλά τα τοποθετήσουμε με διαφορετική σειρά, ο πίνακας αλλαγής βάσης M είναι ______ πίνακας. Αν κρατήσουμε τη σειρά των διανυσμάτων βάσης αλλά αλλάξουμε τα μήκη τους, ο M είναι ______ πίνακας.

40. Ο πίνακας που μετασχηματίζει τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$ στα $(1, 4)$ και $(1, 5)$ είναι ο $M =$ ______. Ο συνδυασμός $a(1, 4) + b(1, 5)$ που ισούται με $(1, 0)$ έχει $(a, b) = (\quad, \quad)$. Πώς σχετίζονται οι νέες αυτές συντεταγμένες του $(1, 0)$ με τον M ή τον M^{-1};

41. Ποιες είναι οι τρεις εξισώσεις για τα A, B, C, αν η παραβολή $Y = A + Bx + Cx^2$ ισούται με 4 στο $x = a$, με 5 στο $x = b$ και με 6 στο $x = c$; Βρείτε την ορίζουσα του 3 επί 3 πίνακα. Για ποιους αριθμούς a, b, c θα είναι αδύνατο να βρούμε τη συγκεκριμένη παραβολή Y;

42. Έστω ότι τα v_1, v_2, v_3 είναι ιδιοδιανύσματα του T. Αυτό σημαίνει ότι $T(v_i) = \lambda_i v_i$ για $i = 1, 2, 3$. Ποιος είναι ο πίνακας του T όταν η βάση εισόδου και εξόδου είναι τα v;

43. Κάθε αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός μπορεί να έχει ως πίνακά του τον I. Ως βάση εξόδου επιλέγουμε απλώς τα $w_i = T(v_i)$. Γιατί πρέπει να είναι αντιστρέψιμος ο T;

44. Υποθέστε ότι T είναι μια ανάκλαση ως προς τον άξονα x και S μια ανάκλαση ως προς τον άξονα y. Το πεδίο ορισμού $\mathbf{V}$ είναι το επίπεδο x-y. Αν $v = (x, y)$, ποιο είναι το $S(T(v))$; Βρείτε μια απλούστερη περιγραφή του γινομένου ST.

45. Υποθέστε ότι T είναι μια ανάκλαση ως προς την ευθεία των x-y και S μια ανάκλαση ως προς τον άξονα y. Αν $v = (2,1)$, τότε $T(v) = (1,2)$. Βρείτε τα $S(T(v))$ και $T(S(v))$. Αυτό δείχνει ότι εν γένει $ST \neq TS$.

46. Δείξτε ότι το γινόμενο ST δύο ανακλάσεων είναι μια στροφή. Βρείτε τη γωνία στροφής πολλαπλασιάζοντας τους παρακάτω πίνακες ανάκλασης:

$$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

47. Ο 4 επί 4 *πίνακας Hadamard* αποτελείται αποκλειστικά από $+1$ και -1:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τον H^{-1} και γράψτε το $v = (7,5,3,1)$ σαν συνδυασμό των στηλών του H.

48. Υποθέστε ότι έχουμε δύο βάσεις $v_1, \ldots, v_n$ και $w_1, \ldots, w_n$ του $\mathbf{R}^n$. Αν ένα διάνυσμα έχει συντελεστές b_i στη μία βάση και c_i στην άλλη βάση, ποιος είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης στην $b = Mc$; Ξεκινήστε από την

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = Vb = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n = Wc.$$

Η απάντησή σας αναπαριστά την $T(v) = v$ χρησιμοποιώντας ως βάση εισόδου τα v και ως βάση εξόδου τα w. Λόγω των διαφορετικών βάσεων, ο πίνακας δεν είναι ο I.

49. Σωστό ή λάθος: Αν γνωρίζουμε το $T(v)$ για n διαφορετικά μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbf{R}^n$, τότε γνωρίζουμε το $T(v)$ για κάθε διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$.

50. (Προτεινόμενο) Υποθέστε ότι όλα τα διανύσματα x που περιέχονται στο μοναδιαίο τετράγωνο $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$ μετασχηματίζονται στα Ax (ο A είναι 2 επί 2).

(α) Ποιο είναι το σχήμα του μετασχηματισμένου χωρίου (όλα τα Ax);
(β) Για ποιους πίνακες A είναι το χωρίο αυτό τετράγωνο;
(γ) Για ποιον A είναι ευθεία;
(δ) Για ποιον A παραμένει το νέο εμβαδόν ίσο με 1;

Επαναληπτικές ασκήσεις

2.1 Βρείτε μια βάση των παρακάτω υποχώρων του $\mathbf{R}^4$:

(α) Των διανυσμάτων για τα οποία $x_1 = 2x_4$.
(β) Των διανυσμάτων για τα οποία $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ και $x_3 + x_4 = 0$.
(γ) Του υποχώρου που παράγεται από τα $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ και $(2,3,4,5)$.

2.2 Δίνοντας μια βάση, περιγράψτε έναν διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbf{R}^3$ που δεν περιέχει κανένα από τα διανύσματα συντεταγμένων $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

2.3 Σωστό ή λάθος, με αντιπαράδειγμα αν είναι λάθος:

(α) Αν τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_m$ παράγουν έναν υπόχωρο S, τότε διάσταση$S = m$.
(β) Η τομή δύο υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου δεν μπορεί να είναι κενή.
(γ) Αν $Ax = Ay$, τότε $x = y$.
(δ) Ο χώρος γραμμών του A έχει μια μοναδική βάση που μπορεί να υπολογιστεί με αναγωγή του A σε κλιμακωτή μορφή.
(ε) Αν ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει ανεξάρτητες στήλες, το ίδιο ισχύει για τον A^2.

2.4 Ποια είναι η κλιμακωτή μορφή U του A;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ποιες είναι οι διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του;

2.5 Βρείτε την τάξη και τον μηδενόχωρο των

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.6 Βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων που σχετίζονται με τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.7 Ποια είναι η πλέον γενική λύση του $u + v + w = 1$, $u - w = 2$;

2.8 (α) Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος να περιέχει το διάνυσμα $x = (1, 1, 2)$.
(β) Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο αριστερός μηδενόχωρος να περιέχει το $y = (1, 5)$.
(γ) Κατασκευάστε έναν πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών να παράγεται από το $(1, 1, 2)$ και του οποίου ο χώρος γραμμών να παράγεται από το $(1, 5)$.
(δ) Αν σας δίνονται οποιαδήποτε τρία διανύσματα του $\mathbf{R}^6$ και οποιαδήποτε τρία διανύσματα του $\mathbf{R}^5$, υπάρχει 6 επί 5 πίνακας του οποίου ο χώρος στηλών να παράγεται από τα τρία πρώτα και του οποίου ο χώρος γραμμών να παράγεται από τρία δεύτερα;

2.9 Στον διανυσματικό χώρο των 2 επί 2 πινάκων,

(α) είναι υπόχωρος το σύνολο των πινάκων τάξης 1;
(β) ποιος υπόχωρος παράγεται από τους πίνακες μετάθεσης;
(γ) ποιος υπόχωρος παράγεται από τους θετικούς πίνακες ($a_{ij} > 0$ για όλα τα στοιχεία);
(δ) ποιος υπόχωρος παράγεται από τους αντιστρέψιμος πίνακες;

2.10 Επινοήστε έναν διανυσματικό χώρο που να περιέχει όλους τους γραμμικούς μετασχηματισμούς από τον $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^n$. Πρέπει να ορίσετε έναν κανόνα για την πρόσθεση. Ποια είναι η διάσταση του;

2.11 (α) Βρείτε την τάξη του A και γράψτε μια βάση του μηδενόχωρού του.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Οι τρεις πρώτες γραμμές του U είναι βάση του χώρου γραμμών του A —σωστό ή λάθος;
Οι στήλες 1, 3, 6 του U είναι βάση του χώρου στηλών του A —σωστό ή λάθος;
Οι τέσσερις γραμμές του A είναι βάση του χώρου γραμμών του A —σωστό ή λάθος;

(γ) Βρείτε όσο το δυνατόν περισσότερα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα b για τα οποία το $Ax = b$ να έχει λύση.

(δ) Κατά την εφαρμογή της απαλοιφής στον A, ποιο πολλαπλάσιο της τρίτης γραμμής αφαιρείται ώστε να μηδενιστεί η τέταρτη γραμμή;

2.12 Αν A είναι ένας n επί $n-1$ πίνακας και η τάξη του είναι $n-2$, ποια είναι η διάσταση του μηδενόχωρού του;

2.13 Χρησιμοποιώντας απαλοιφή, βρείτε τους τριγωνικούς παράγοντες $A = LU$, αν

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί a, b, c, d ώστε οι στήλες να είναι γραμμικά ανεξάρτητες;

2.14 Αποτελούν τα διανύσματα $(1, 1, 3)$, $(2, 3, 6)$ και $(1, 4, 3)$ βάση του $\mathbf{R}^3$;

2.15 Τι γνωρίζουμε για τον $\boldsymbol{C}(A)$ όταν το πλήθος των λύσεων του $Ax = b$ είναι

(α) 0 ή 1, ανάλογα με το b.
(β) ∞, ανεξάρτητα από το b.
(γ) 0 ή ∞, ανάλογα με το b.
(δ) 1, ανεξάρτητα από το b.

2.16 Στην προηγούμενη άσκηση, πώς σχετίζεται το r με τα m και n σε κάθε παράδειγμα;

2.17 Αν x είναι ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$ και $x^{\mathrm{T}}y = 0$ για κάθε y, δείξτε ότι $x = 0$.

2.18 Αν A είναι ένας n επί n πίνακας για τον οποίο $A^2 = A$ και τάξη$(A) = n$, δείξτε ότι $A = I$.

2.19 Ποιος υπόχωρος των 3 επί 3 πινάκων παράγεται από τους στοιχειώδεις πίνακες E_{ij} με μονάδες στη διαγώνιο και το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο από κάτω;

2.20 Πόσοι 5 επί 5 πίνακες μετάθεσης υπάρχουν; Είναι γραμμικά ανεξάρτητοι; Παράγουν τον χώρο όλων των 5 επί 5 πινάκων; Δεν χρειάζεται να τους γράψετε όλους.

2.21 Ποια είναι η τάξη του n επί n πίνακα όλα τα στοιχεία του οποίου ισούνται με 1; Ποια είναι η τάξη του «πίνακα σκακιέρα», για τον οποίο $a_{ij} = 0$ όταν το $i + j$ είναι άρτιο και $a_{ij} = 1$ όταν το $i + j$ είναι περιττό;

2.22 (α) Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί το b ώστε το $Ax = b$ να έχει λύση για τα παρακάτω A και b;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

(β) Βρείτε μια βάση του μηδενόχωρου του A.
(γ) Βρείτε τη γενική λύση του $Ax = b$, όταν υπάρχει λύση.
(δ) Βρείτε μια βάση του χώρου στηλών του A.
(ε) Ποια είναι η τάξη του A^{T};

2.23 Πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα που να μετασχηματίζει τα διανύσματα συντεταγμένων e_1, e_2, e_3 σε τρία δεδομένα διανύσματα v_1, v_2, v_3; Πότε θα είναι ο πίνακας αυτός αντιστρέψιμος;

2.24 Αν τα e_1, e_2, e_3 ανήκουν στον χώρο στηλών ενός 3 επί 5 πίνακα, έχει αριστερό αντίστροφο; Έχει δεξιό αντίστροφο;

2.25 Υποθέστε ότι T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός επί του $\mathbf{R}^3$ που απεικονίζει κάθε σημείο (u, v, w) στο $(u + v + w, u + v, u)$. Περιγράψτε την επίδραση του T^{-1} στο σημείο (x, y, z).

2.26 *Σωστό ή λάθος*;

(α) Κάθε υπόχωρος του $\mathbf{R}^4$ είναι ο μηδενόχωρος κάποιου πίνακα.
(β) Αν ο A έχει τον ίδιο μηδενόχωρο με τον A^{T}, ο πίνακας πρέπει να είναι τετραγωνικός.
(γ) Ο μετασχηματισμός που απεικονίζει το x στο $mx + b$ είναι γραμμικός (από τον $\mathbf{R}^1$ στον $\mathbf{R}^1$).

2.27 Βρείτε βάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων των

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

2.28 (α) Αν οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες (ο A είναι m επί n) τότε η τάξη είναι ______, ο χώρος στηλών είναι ______ και ο αριστερός μηδενόχωρος είναι ______.

(β) Αν ο A είναι 8 επί 10 με διδιάστατο μηδενόχωρο, δείξτε ότι το $Ax = b$ έχει λύση για κάθε b.

2.29 Περιγράψτε τους γραμμικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου x-y που αναπαριστώνται με τη συνήθη βάση $(1, 0)$ και $(0, 1)$ από τους πίνακες

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.30 (α) Αν ο A είναι τετραγωνικός, δείξτε ότι ο μηδενόχωρος του A^2 περιέχει τον μηδενόχωρο του A.

(β) Δείξτε επίσης ότι ο χώρος στηλών του A^2 περιέχεται στον χώρο στηλών του A.

2.31 Πότε ισχύει $A^2 = 0$ για τον πίνακα τάξης 1 $A = uv^{\mathrm{T}}$;

2.32 (α) Βρείτε μια βάση του χώρου όλων των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^6$ με $x_1+x_2 = x_3+x_4 = x_5 + x_6$.

(β) Βρείτε έναν πίνακα με μηδενόχωρο τον συγκεκριμένο υπόχωρο.

(γ) Βρείτε έναν πίνακα με χώρο στηλών τον συγκεκριμένο υπόχωρο.

2.33 Υποθέστε ότι οι πίνακες της $PA = LU$ είναι οι εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(α) Ποια είναι η τάξη του A;

(β) Ποια είναι μια βάση του χώρου γραμμών του A;

(γ) *Σωστό ή λάθος*: Οι γραμμές 1, 2, 3 του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(δ) Ποια είναι μια βάση του χώρου στηλών του A;

(ε) Ποια είναι η διάσταση του αριστερού μηδενόχωρου του A;

(στ) Ποια είναι η γενική λύση του $Ax = 0$;