ΜΕΡΟΣ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το να έχεις συνείδηση της άγνοιάς σου
είναι ένα μεγάλο βήμα προς τη γνώση.

BENJAMIN DISRAELI

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο τίτλος του κεφαλαίου εκφράζει με λίγα λόγια τις μαθηματικές γνώσεις που απαιτούνται για να διαβάσει κάποιος αυτό το βιβλίο. Πραγματικά, σε αυτό το σύντομο κεφάλαιο απλώς εξηγούμε τι εννοούμε με τον όρο «βασικές ιδιότητες των αριθμών»· όλες τους —πρόσθεση και πολλαπλασιασμός, αφαίρεση και διαίρεση, λύσεις εξισώσεων και ανισοτήτων, παραγοντοποίηση και άλλοι αλγεβρικοί μετασχηματισμοί— μας είναι ήδη γνωστές. Όμως, το κεφάλαιο αυτό δεν είναι μια ανασκόπηση. Παρ' όλο που το θέμα είναι οικείο, η παρουσίαση που πρόκειται να κάνουμε πιθανότατα θα φανεί αρκετά πρωτότυπη· δεν είναι σκοπός μας να δώσουμε μια εκτεταμένη ανασκόπηση παλιού υλικού, αλλά να συμπυκνώσουμε αυτές τις γνώσεις σε μερικές απλές και προφανείς ιδιότητες των αριθμών. Ορισμένες μπορεί να φανούν τελείως προφανείς, όμως ένας εντυπωσιακά μεγάλος αριθμός από ποικίλα και σημαντικά αποτελέσματα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων που θα τονίσουμε.

Από τις δώδεκα ιδιότητες που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο, οι πρώτες εννιά σχετίζονται με τις βασικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Προς το παρόν, θα ασχοληθούμε μόνο με την πρόσθεση: η πράξη αυτή εκτελείται πάνω σε ένα ζεύγος αριθμών —το άθροισμα $a + b$ υπάρχει οποτεδήποτε μας δοθούν δύο αριθμοί a και b (που βέβαια δεν αποκλείεται να είναι ο ίδιος αριθμός). Φαίνεται ίσως λογικό να θεωρήσει κανείς την πρόσθεση σαν μια πράξη που μπορεί να εκτελεστεί με τη μία για πολλούς αριθμούς, και να πάρει ως βασική έννοια το άθροισμα $a_1 + \cdots + a_n$ των n αριθμών $a_1, \ldots, a_n$. Είναι όμως πιο βολικό να εξετάσουμε την πρόσθεση μόνο για ζεύγη αριθμών, και να ορίσουμε τα άλλα αθροίσματα συναρτήσει των αθροισμάτων αυτού του τύπου. Για το άθροισμα τριών αριθμών a, b και c, μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους. Μπορούμε να προσθέσουμε πρώτα τους b και c, παίρνοντας τον $b+c$ και έπειτα να προσθέσουμε τον a σε αυτόν τον αριθμό, παίρνοντας τον $a+(b+c)$· ή να προσθέσουμε πρώτα τους a και b, και έπειτα το άθροισμα $a+b$ στον c, παίρνοντας τον $(a+b)+c$. Τα δύο σύνθετα αθροίσματα που θα πάρουμε είναι βέβαια ίσα, και αυτή είναι η πρώτη ιδιότητα που θα καταγράψουμε:

(Ι1) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Είναι σαφές ότι η ιδιότητα αυτή μας απαλλάσσει από το να ορίσουμε ξεχωριστά την έννοια του αθροίσματος τριών αριθμών: απλώς συμφωνούμε ότι το $a + b + c$ συμβολίζει τον αριθμό $a + (b + c) = (a + b) + c$. Για την πρόσθεση τεσσάρων αριθμών απαιτούνται παρόμοιοι, αν και κάπως περισσότερο πολύπλοκοι, συλλογισμοί. Ο συμβολισμός $a + b + c + d$ ορίζεται να σημαίνει

$$\begin{aligned} &(1)\quad ((a+b)+c)+d,\\ \text{ή}\ &(2)\quad (a+(b+c))+d,\\ \text{ή}\ &(3)\quad a+((b+c)+d),\\ \text{ή}\ &(4)\quad a+(b+(c+d)),\\ \text{ή}\ &(5)\quad (a+b)+(c+d). \end{aligned}$$

Αυτός ο ορισμός είναι σαφής γιατί οι παραπάνω αριθμοί είναι όλοι ίσοι. Ευτυχώς, *αυτό* το γεγονός δεν χρειάζεται να καταγραφεί ως ξεχωριστή ιδιότητα, γιατί μπορεί να αποδειχθεί από την ιδιότητα Ι1 που έχουμε ήδη αναφέρει. Για παράδειγμα, ξέρουμε από την Ι1 ότι

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

από όπου έπεται αμέσως ότι οι (1) και (2) είναι ίσοι. Η ισότητα των (2) και (3) είναι άμεση συνέπεια της Ι1, αν και ίσως δεν φαίνεται με την πρώτη ματιά (πρέπει να αφήσουμε τον $b + c$ να παίξει τον ρόλο του b στην Ι1, και τον d τον ρόλο του c). Οι ισότητες (3) = (4) = (5) αποδεικνύονται επίσης εύκολα.

Είναι ίσως προφανές ότι αρκεί να καταφύγουμε στην Ι1 για να αποδείξουμε την ισότητα των 14 διαφορετικών τρόπων με τους οποίους αθροίζονται πέντε αριθμοί, αλλά δεν είναι και τόσο φανερό πώς γίνεται να δοθεί μια λογική απόδειξη αυτού του πράγματος χωρίς να καταγράψουμε και τα 14 αυτά αθροίσματα. Μια τέτοια διαδικασία είναι εφικτή, αλλά θα γινόταν ιδιαίτερα επίπονη αν εξετάζαμε συλλογές από έξι, επτά, ή περισσότερους αριθμούς· θα ήταν τελείως ανεπαρκής για την απόδειξη της ισότητας όλων των δυνατών αθροισμάτων μιας τυχαίας πεπερασμένης συλλογής από αριθμούς $a_1, \ldots, a_n$. Αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε δεδομένο, αλλά για αυτούς που θα ήθελαν να καταπιαστούν με την απόδειξη (και αξίζει τον κόπο να το κάνει κανείς τουλάχιστον μία φορά), μια προσέγγιση περιγράφεται στο Πρόβλημα 24. Από δω και πέρα, θα υποθέτουμε πάντοτε, χωρίς να το αναφέρουμε, ότι είναι γνωστά τα αποτελέσματα αυτού του προβλήματος και θα γράφουμε αθροίσματα της μορφής $a_1 + \cdots + a_n$ αδιαφορώντας για τη διάταξη των παρενθέσεων.

Ο αριθμός 0 έχει μια ιδιότητα τόσο σημαντική που θα την καταγράψουμε ως δεύτερη:

(Ι2) Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τότε

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Ο αριθμός 0 παίζει έναν επίσης σπουδαίο ρόλο στην τρίτη ιδιότητα του καταλόγου μας:

(Ι3) Για κάθε αριθμό a, υπάρχει ένας αριθμός, ο $-a$, τέτοιος ώστε

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Η ιδιότητα Ι2 θα έπρεπε να μας δίνει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα του αριθμού 0, και είμαστε στην ευχάριστη θέση να αποδείξουμε κάτι τέτοιο, και μάλιστα αμέσως: Πραγματικά, αν ένας αριθμός x ικανοποιεί την

$$a + x = a$$

για οποιονδήποτε αριθμό a, τότε $x = 0$ (και επομένως αυτή η ισότητα ισχύει για όλους τους αριθμούς a). Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δεν απαιτεί τίποτα περισσότερο από το να αφαιρέσουμε το a και από τα δύο μέλη της ισότητας· με άλλα λόγια, να προσθέσουμε το $-a$ και στα δύο μέλη. Όπως δείχνει και η λεπτομερής απόδειξη που ακολουθεί, χρειάζονται και οι τρεις ιδιότητες Ι1–Ι3 για να δικαιολογηθεί αυτή η πράξη:

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} & a + x = a, \\ \text{τότε} & (-a) + (a + x) = (-a) + a = 0\cdot \\ \text{άρα} & ((-a) + a) + x = 0\cdot \\ \text{άρα} & 0 + x = 0\cdot \\ \text{άρα} & x = 0. \end{array}$$

Όπως διαφαίνεται, είναι βολικό να θεωρούμε την αφαίρεση ως μια πράξη παράγωγη της πρόσθεσης: θεωρούμε το $a - b$ ως μια σύντμηση για το $a + (-b)$. Μπορούμε τότε να βρούμε τη λύση μερικών απλών εξισώσεων κάνοντας μια σειρά από βήματα (καθένα αιτιολογημένο από τις Ι1, Ι2 ή Ι3), όμοια με αυτά που εμφανίστηκαν για την εξίσωση

$a + x = a$. Για παράδειγμα:

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} & x + 3 = 5, \\ \text{τότε} & (x+3) + (-3) = 5 + (-3)^{\cdot} \\ \text{άρα} & x + (3 + (-3)) = 5 - 3 = 2^{\cdot} \\ \text{άρα} & x + 0 = 2^{\cdot} \\ \text{άρα} & x = 2. \end{array}$$

Αυτές οι λεπτομερείς λύσεις έχουν βέβαια ενδιαφέρον μόνο μέχρι να πεισθείτε ότι είναι πάντοτε δυνατές. Στην πράξη, συνήθως είναι χάσιμο χρόνου να προσπαθεί κανείς να λύσει μια εξίσωση δείχνοντας με τόσο αναλυτικό τρόπο την εξάρτηση από τις ιδιότητες Ι1, Ι2 και Ι3 (ή και από τις επόμενες ιδιότητες που θα αναφέρουμε).

Μένει μια ακόμα ιδιότητα της πρόσθεσης που πρέπει να αναφερθεί. Όταν εξετάζαμε τα αθροίσματα τριών αριθμών a, b και c, μόνο δύο αθροίσματα καταγράφηκαν: το $(a + b) + c$ και το $a + (b + c)$. Ασφαλώς μπορούμε να πάρουμε και άλλες πολλές περιπτώσεις αν μεταβάλλουμε τη διάταξη των a, b και c. Το ότι όλα αυτά τα αθροίσματα είναι ίσα, βασίζεται στην

(Ι4) Αν a και b είναι δύο αριθμοί, τότε

$$a + b = b + a.$$

Η διατύπωση της Ι4 έχει σκοπό να τονίσει το γεγονός ότι, αν και η πράξη της πρόσθεσης ενός ζεύγους αριθμών θα μπορούσε, ενδεχομένως, να εξαρτάται από τη σειρά των δύο αριθμών, στην πραγματικότητα είναι ανεξάρτητη από αυτήν. Είναι χρήσιμο να θυμόμαστε ότι δεν συμπεριφέρονται όλες οι πράξεις το ίδιο καλά. Για παράδειγμα, η αφαίρεση δεν έχει αυτήν την ιδιότητα: συνήθως $a - b \neq b - a$. Παρεμπιπτόντως, θα μπορούσαμε να ρωτήσουμε πότε το $a - b$ είναι ίσο με το $b - a$, και είναι ενδιαφέρον το ότι θα ανακαλύψουμε πόσο αδύναμοι είμαστε αν βασιστούμε στις ιδιότητες Ι1–Ι4 για να δικαιολογήσουμε τα βήματά μας. Με τελείως στοιχειώδη άλγεβρα μπορούμε να δείξουμε ότι $a - b = b - a$ μόνο αν $a = b$. Και όμως, είναι αδύνατο να το αποδείξουμε μόνο από τις ιδιότητες Ι1–Ι4· είναι διδακτικό να εξετάσετε προσεκτικά τη στοιχειώδη αλγεβρική απόδειξη και να προσδιορίσετε το βήμα ή τα βήματα που δεν μπορούν να δικαιολογηθούν από τις Ι1–Ι4. Βέβαια, όταν θα έχουμε αναφέρει μερικές ακόμα ιδιότητες, θα είμαστε σε θέση να αιτιολογήσουμε όλα τα βήματα με λεπτομέρειες. Κατά έναν περίεργο όμως τρόπο, η επίμαχη ιδιότητα έχει να κάνει με τον πολλαπλασιασμό.

Οι βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού μοιάζουν ευτυχώς τόσο πολύ με αυτές της πρόσθεσης, που θα χρειαστούν πολύ λίγα σχόλια· τόσο η έννοια όσο και οι συνέπειές τους θα είναι προφανείς. (Όπως και στη στοιχειώδη άλγεβρα, το γινόμενο των a και b θα συμβολίζεται με $a \cdot b$, ή πιο απλά με ab.)

(Ι5) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(Ι6) Αν a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, τότε

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Επίσης $1 \neq 0$.

(Φαίνεται ίσως παράξενο το να καταγράφουμε τον ισχυρισμό $1 \neq 0$, αλλά είμαστε υποχρεωμένοι να το κάνουμε, γιατί δεν υπάρχει τρόπος να τον αποδείξουμε με βάση τις υπόλοιπες ιδιότητες —αυτές οι ιδιότητες θα ίσχυαν όλες και αν υπήρχε ένας μόνο αριθμός, ο 0.)

(Ι7) Για κάθε αριθμό $a \neq 0$, υπάρχει ένας αριθμός a^{-1} τέτοιος ώστε

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

(I8) Αν a και b είναι τυχαίοι αριθμοί, τότε

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Μια λεπτομέρεια που αξίζει να υπογραμμίσουμε είναι η εμφάνιση της συνθήκης $a \neq 0$ στην I7. Αυτή η συνθήκη είναι εντελώς απαραίτητη: αφού $0 \cdot b = 0$ για όλους τους αριθμούς b, *δεν* υπάρχει αριθμός 0^{-1} που να ικανοποιεί την $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Αυτός ο περιορισμός έχει μια σημαντική συνέπεια σε σχέση με τη διαίρεση. Ακριβώς όπως η αφαίρεση ορίστηκε μέσω της πρόσθεσης, έτσι και η διαίρεση ορίζεται με βάση τον πολλαπλασιασμό: ο συμβολισμός a/b σημαίνει $a \cdot b^{-1}$. Αφού το 0^{-1} δεν έχει έννοια, το $a/0$ επίσης δεν έχει έννοια —η διαίρεση με 0 είναι *πάντα* αόριστη.

Η ιδιότητα I7 έχει δύο σημαντικές συνέπειες. Αν $a \cdot b = a \cdot c$, δεν έπεται αναγκαστικά ότι $b = c$, γιατί αν $a = 0$, τότε και το $a \cdot b$ και το $a \cdot c$ είναι 0, ανεξάρτητα από το ποια είναι τα b και c. Όμως, αν $a \neq 0$, τότε $b = c$. Αυτό αποδεικνύεται από την I7 ως εξής:

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} & a \cdot b = a \cdot c \text{ και } a \neq 0, \\ \text{τότε} & a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)\cdot \\ \text{άρα} & (a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c\cdot \\ \text{άρα} & 1 \cdot b = 1 \cdot c\cdot \\ \text{άρα} & b = c. \end{array}$$

Συνέπεια της I7 είναι και το γεγονός ότι, αν $a \cdot b = 0$, τότε $a = 0$ ή $b = 0$. Πράγματι,

$$\begin{array}{ll} \text{αν} & a \cdot b = 0 \text{ και } a \neq 0, \\ \text{τότε} & a^{-1} \cdot (a \cdot b) = 0\cdot \\ \text{άρα} & (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 0\cdot \\ \text{άρα} & 1 \cdot b = 0\cdot \\ \text{άρα} & b = 0. \end{array}$$

(Μπορεί να συμβεί να ισχύει και η $a = 0$ και η $b = 0$. Αυτό το ενδεχόμενο δεν αποκλείεται όταν λέμε «$a = 0$ ή $b = 0$»· στα μαθηματικά το «ή» χρησιμοποιείται πάντοτε με την έννοια του «το ένα ή το άλλο, ή και τα δύο»).

Η τελευταία αυτή συνέπεια της I7 χρησιμοποιείται συνεχώς για τη λύση εξισώσεων. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι για έναν αριθμό x είναι γνωστό πως επαληθεύει την

$$(x - 1)(x - 2) = 0.$$

Τότε θα είναι $x - 1 = 0$ ή $x - 2 = 0$. Άρα $x = 1$ ή $x = 2$.

Με βάση τις οκτώ ιδιότητες που έχουμε αναφέρει ώς τώρα, δεν είμαστε ακόμα σε θέση να αποδείξουμε και πολλά πράγματα. Η επόμενη ιδιότητα, που συνδυάζει τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, θα μεταβάλλει ουσιαστικά αυτήν την κατάσταση.

(I9) Αν a, b και c είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

(Παρατηρήστε ότι από την I8 ισχύει και η ισότητα $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.)

Ως παράδειγμα της χρησιμότητας της I9, θα προσδιορίσουμε τώρα πότε ακριβώς $a - b = b - a$:

$$\begin{array}{ll} \text{Αν} & a - b = b - a, \\ \text{τότε} & (a - b) + b = (b - a) + b = b + (b - a)\cdot \\ \text{άρα} & a = b + b - a\cdot \\ \text{άρα} & a + a = (b + b - a) + a = b + b. \\ \text{Επομένως} & a \cdot (1 + 1) = b \cdot (1 + 1), \\ \text{και άρα} & a = b. \end{array}$$

Μια δεύτερη εφαρμογή της Ι9 συναντάμε στην αιτιολόγηση του ισχυρισμού $a \cdot 0 = 0$, που έχουμε ήδη διατυπώσει, και τον οποίο χρησιμοποιήσαμε κιόλας λίγο νωρίτερα σε μια απόδειξη στη σελίδα 6 (μπορείτε να εντοπίσετε πού;). Αυτό το γεγονός δεν αναφέρθηκε ως μια από τις βασικές ιδιότητες, αν και δεν το αποδείξαμε όταν το αναφέραμε για πρώτη φορά. Με τις Ι1–Ι8 μόνο δεν ήταν δυνατόν να δώσουμε μια απόδειξη, γιατί ο αριθμός 0 εμφανίζεται μόνο στις Ι2 και Ι3, που αφορούν την πρόσθεση, ενώ ο ισχυρισμός για τον οποίο μιλάμε έχει σχέση με τον πολλαπλασιασμό. Με την Ι9 η απόδειξη είναι απλή, αν και μπορεί να μην είναι τελείως προφανής. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a \cdot 0 &= a \cdot (0 + 0) \\ &= a \cdot 0. \end{aligned}$$

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, αυτό σημαίνει αυτομάτως (αν προσθέσουμε το $-(a \cdot 0)$ και στα δύο μέλη) ότι $a \cdot 0 = 0$.

Μια σειρά από άλλες συνέπειες της Ι9 ίσως μας βοηθήσουν να εξηγήσουμε τον κάπως περίεργο κανόνα που μας βεβαιώνει ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικός αριθμός. Για να ξεκινήσουμε, θα αποδείξουμε τον πιο εύλογο ισχυρισμό ότι $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Για να τον αποδείξουμε, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} (-a) \cdot b + a \cdot b &= [(-a) + a] \cdot b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0. \end{aligned}$$

Έπεται αμέσως (προσθέτοντας το $-(a \cdot b)$ και στα δύο μέλη) ότι $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) + [-(a \cdot b)] &= (-a) \cdot (-b) + (-a) \cdot b \\ &= (-a) \cdot [(-b) + b] \\ &= (-a) \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, αν προσθέσουμε το $(a \cdot b)$ και στα δύο μέλη, παίρνουμε

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Το γεγονός ότι το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι θετικό, είναι επομένως συνέπεια των Ι1–Ι9. Με άλλα λόγια, *αν θέλουμε να ισχύουν οι Ι1 έως και Ι9, τότε ο κανόνας για το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών μάς επιβάλλεται.*

Οι διάφορες συνέπειες της Ι9 που εξετάσαμε ώς τώρα, αν και είναι ενδιαφέρουσες και σημαντικές, δεν δείχνουν την πραγματική της σημασία· στο κάτω-κάτω θα μπορούσαμε να έχουμε αναφέρει όλες αυτές τις ιδιότητες χωριστά. Στην πραγματικότητα, η Ι9 δικαιολογεί σχεδόν όλους τους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς. Για παράδειγμα, ενώ έχουμε δει πώς να λύνουμε την εξίσωση

$$(x - 1)(x - 2) = 0,$$

δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι μας δίνονται οι εξισώσεις σε αυτή τη μορφή. Πιο πιθανό είναι να συναντήσουμε την ίδια εξίσωση στη μορφή

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Η «παραγοντοποίηση» $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ είναι ουσιαστικά μια τριπλή χρήση της Ι9:

$$\begin{aligned} (x - 1) \cdot (x - 2) &= x \cdot (x - 2) + (-1) \cdot (x - 2) \\ &= x \cdot x + x \cdot (-2) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-2) \\ &= x^2 + x[(-2) + (-1)] + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Ένα τελευταίο παράδειγμα για τη σημασία της Ι9 είναι το γεγονός ότι αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται ουσιαστικά κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε αραβικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, ο υπολογισμός

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 24 \\ \hline 52 \\ 26 \\ \hline 312 \end{array}$$

είναι ένας συνοπτικός τρόπος γραφής των εξής ισοτήτων:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 24 &= 13 \cdot (2 \cdot 10 + 4) \\ &= 13 \cdot 2 \cdot 10 + 13 \cdot 4 \\ &= 26 \cdot 10 + 52. \end{aligned}$$

(Σημειώστε πως, το ότι μετακινήσαμε το 26 μια θέση αριστερά στον παραπάνω υπολογισμό, είναι το ίδιο με το να γράφουμε $26 \cdot 10$). Ο πολλαπλασιασμός $13 \cdot 4 = 52$ χρησιμοποιεί και αυτός την Ι9:

$$\begin{aligned} 13 \cdot 4 &= (1 \cdot 10 + 3) \cdot 4 \\ &= 1 \cdot 10 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \\ &= 4 \cdot 10 + 12 \\ &= 4 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \\ &= (4 + 1) \cdot 10 + 2 \\ &= 5 \cdot 10 + 2 \\ &= 52. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες Ι1–Ι9 έχουν συγκεκριμένα ονόματα που δεν είναι απαραίτητο να τα θυμόμαστε, αλλά συχνά είναι βολικά όταν αναφερόμαστε σε αυτές. Με αυτήν την ευκαιρία θα κάνουμε έναν κατάλογο των ιδιοτήτων Ι1–Ι9 αναφέροντας ταυτόχρονα και τα ονόματα που τους αποδίδονται συνήθως.

(Ι1)	(Προσεταιριστικός νόμος της πρόσθεσης)	$a + (b + c) = (a + b) + c.$
(Ι2)	(Ύπαρξη προσθετικού ταυτοτικού στοιχείου)	$a + 0 = 0 + a = a.$
(Ι3)	(Ύπαρξη προσθετικού αντίστροφου)	$a + (-a) = (-a) + a = 0.$
(Ι4)	(Αντιμεταθετικός νόμος της πρόσθεσης)	$a + b = b + a.$
(Ι5)	(Προσεταιριστικός νόμος του πολλαπλασιασμού)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
(Ι6)	(Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού ταυτοτικού στοιχείου)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \cdot \quad 1 \neq 0.$
(Ι7)	(Ύπαρξη πολλαπλασιαστικού αντίστροφου)	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, για $a \neq 0$.
(Ι8)	(Αντιμεταθετικός νόμος του πολλαπλασιασμού)	$a \cdot b = b \cdot a.$
(Ι9)	(Επιμεριστικός νόμος)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Οι τρεις βασικές ιδιότητες των αριθμών που απομένουν αφορούν στις ανισότητες. Αν και οι ανισότητες σπάνια εμφανίζονται στα στοιχειώδη Μαθηματικά, παίζουν εξέχοντα ρόλο στο Λογισμό. Οι δύο μορφές ανισότητας, $a < b$ (ο a είναι μικρότερος από τον b) και $a > b$ (ο a είναι μεγαλύτερος από τον b), συνδέονται στενά: η $a < b$ σημαίνει το ίδιο ακριβώς πράγμα με την $b > a$ (έτσι, η $1 < 3$ και η $3 > 1$ είναι απλώς δύο τρόποι για να γράψουμε την ίδια πρόταση). Οι αριθμοί a για τους οποίους $a > 0$ λέγονται

θετικοί, ενώ εκείνοι οι αριθμοί a για τους οποίους $a < 0$ λέγονται **αρνητικοί**. Ενώ λοιπόν η θετικότητα γίνεται να οριστεί με βάση την $<$, είναι δυνατόν να αντιστρέψουμε τη διαδικασία: μπορούμε να ορίσουμε την $a < b$ έτσι ώστε να σημαίνει ότι ο $b - a$ είναι θετικός. Και μάλιστα, είναι πιο βολικό να πάρουμε ως βασική έννοια το σύνολο όλων των θετικών αριθμών, που συμβολίζεται με P, και να διατυπώσουμε όλες τις άλλες ιδιότητες με τη βοήθεια του P:

(Ι10) (Νόμος της Τριχοτόμησης) Για κάθε αριθμό a ισχύει μία και μόνο μία από τις:
(i) $a = 0$
(ii) ο a ανήκει στο σύνολο P,
(iii) ο $-a$ ανήκει στο σύνολο P.

(Ι11) (Κλειστότητα ως προς την πρόσθεση) Αν ο a και ο b είναι στο P, τότε και ο $a + b$ είναι στο P.

(Ι12) (Κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό) Αν ο a και ο b είναι στο P, τότε και ο $a \cdot b$ είναι στο P.

Αυτές οι τρεις ιδιότητες πρέπει να συμπληρωθούν με τους εξής ορισμούς:

$$\begin{aligned}
a > b &\quad \text{αν} \quad a - b \text{ ανήκει στο } P^{\cdot} \\
a < b &\quad \text{αν} \quad b > a^{\cdot} \\
a \geq b &\quad \text{αν} \quad a > b \text{ ή } a = b^{\cdot} \\
a \leq b &\quad \text{αν} \quad a < b \text{ ή } a = b.^{*}
\end{aligned}$$

Σημειώστε, ειδικότερα, ότι $a > 0$ αν και μόνο αν ο a ανήκει στο P.

Όλες οι γνωστές ιδιότητες των ανισοτήτων, όσο στοιχειώδεις και αν φαίνονται, είναι συνέπειες των Ι10–Ι12. Για παράδειγμα, αν a και b είναι οποιοιδήποτε αριθμοί, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις:

i. $a - b = 0$,
ii. ο $a - b$ ανήκει στο σύνολο P,
iii. ο $-(a - b) = b - a$ ανήκει στο σύνολο P.

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς που μόλις δώσαμε, παίρνουμε ότι ισχύει ακριβώς μία από τις:

i. $a = b$,
ii. $a > b$,
iii. $b > a$.

Ένα κάπως πιο ενδιαφέρον στοιχείο προκύπτει από τις εξής πράξεις: αν $a < b$, οπότε ο $b - a$ είναι στο P, τότε σίγουρα ο $(b + c) - (a + c)$ είναι στο P, άρα αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$. Ομοίως, έστω ότι $a < b$ και $b < c$. Τότε

$$\begin{aligned}
&\text{ο } b - a \text{ είναι στο } P, \\
\text{και} \quad &\text{ο } c - b \text{ είναι στο } P, \\
\text{άρα} \quad &\text{ο } c - a = (c - b) + (b - a) \text{ είναι στο } P.
\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$. (Οι δύο ανισότητες $a < b$ και $b < c$ γράφονται συνήθως πιο σύντομα στη μορφή $a < b < c$, που ουσιαστικά περιέχει και την τρίτη ανισότητα $a < c$.)

---

*Υπάρχει ένα κάπως σκοτεινό σημείο σε σχέση με τα σύμβολα $\geq$ και $\leq$. Οι προτάσεις

$$1 + 1 \leq 3$$
$$1 + 1 \leq 2$$

είναι και οι δύο αληθείς, αν και ξέρουμε ότι το $\leq$ θα μπορούσε να αντικατασταθεί με $<$ στην πρώτη, και με $=$ στη δεύτερη. Τέτοιες καταστάσεις είναι αναπόφευκτες όταν το $\leq$ χρησιμοποιείται με συγκεκριμένους αριθμούς· η χρησιμότητα του συμβόλου αποκαλύπτεται από μια πρόταση σαν το Θεώρημα 1 —εδώ έχουμε ισότητα για κάποιες τιμές των a και b, και ανισότητα για κάποιες άλλες.

Ο επόμενος ισχυρισμός είναι λιγότερο προφανής. Αν $a < 0$ και $b < 0$, τότε $ab > 0$. Η μόνη δυσκολία που παρουσιάζει η απόδειξη είναι ότι απαιτεί μια ευχέρεια στη χρήση των ορισμών. Το σύμβολο $a < 0$ σημαίνει, εξ ορισμού, $0 > a$, το οποίο σημαίνει ότι ο $0 - a = -a$ ανήκει στο P. Ομοίως ο $-b$ είναι στο P, επομένως, από την Ι12, ο $(-a)(-b) = ab$ ανήκει στο P. Άρα $ab > 0$.

Το γεγονός ότι $ab > 0$ αν $a > 0$, $b > 0$ καθώς και αν $a < 0$, $b < 0$, έχει μια ξεχωριστή συνέπεια: $a^2 > 0$ αν $a \neq 0$. Έτσι, τα τετράγωνα μη μηδενικών αριθμών είναι πάντα θετικά, και ειδικότερα έχουμε αποδείξει ένα αποτέλεσμα που θα μπορούσε να είχε συμπεριληφθεί στον κατάλογο των ιδιοτήτων μας, ως αρκετά στοιχειώδες: $1 > 0$ (αφού $1 = 1^2$).

Το γεγονός ότι $-a > 0$ αν $a < 0$ είναι η βάση για μια έννοια που θα παίξει εξαιρετικά σπουδαίο ρόλο σε αυτό το βιβλίο. Για κάθε αριθμό a, ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** $|a|$ του a ως εξής:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι το $|a|$ είναι πάντα θετικό, εκτός αν $a = 0$. Για παράδειγμα, έχουμε $|-3| = 3$, $|7| = 7$, $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}| = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ και $|1 + \sqrt{2} - \sqrt{10}| = \sqrt{10} - \sqrt{2} - 1$. Γενικά, η πιο άμεση προσέγγιση σε οποιοδήποτε πρόβλημα που έχει να κάνει με απόλυτες τιμές απαιτεί να διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις χωριστά, γιατί οι απόλυτες τιμές ορίζονται και αυτές με περιπτώσεις. Χρησιμοποιούμε αυτήν την προσέγγιση για να αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ιδιότητα των απολύτων τιμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Για τυχαίους αριθμούς a και b, έχουμε

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θα εξετάσουμε 4 περιπτώσεις:

$$\begin{aligned} &(1) \qquad a \geq 0, \quad b \geq 0\cdot \\ &(2) \qquad a \geq 0, \quad b \leq 0\cdot \\ &(3) \qquad a \leq 0, \quad b \geq 0\cdot \\ &(4) \qquad a \leq 0, \quad b \leq 0. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση (1) είναι και $a + b \geq 0$, και το θεώρημα είναι προφανές. Μάλιστα έχουμε

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|,$$

δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ισότητα.

Στην περίπτωση (4) έχουμε $a + b \leq 0$, και πάλι ισχύει ισότητα:

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|.$$

Στην περίπτωση (2), όπου $a \geq 0$ και $b \leq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$|a + b| \leq a - b.$$

Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε αυτήν την περίπτωση σε δύο υποπεριπτώσεις. Αν $a + b \geq 0$, τότε πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} &a + b \leq a - b, \\ \text{δηλαδή,} \qquad &b \leq -b, \end{aligned}$$

που προφανώς ισχύει, αφού $b \leq 0$ και επομένως $-b \geq 0$. Από την άλλη πλευρά, αν $a + b \leq 0$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} &-a - b \leq a - b, \\ \text{δηλαδή,} \qquad &-a \leq a, \end{aligned}$$

η οποία προφανώς ισχύει, αφού $a \geq 0$ και επομένως $-a \leq 0$.

Σημειώστε, τέλος, ότι η απόδειξη της περίπτωσης (3) είναι άμεση, αν εναλλάξουμε τα a και b και εφαρμόσουμε την περίπτωση (2). ∎

Αν και η παραπάνω μέθοδος για να εργαζόμαστε με απόλυτες τιμές (να εξετάζουμε δηλαδή χωριστά διάφορες περιπτώσεις) είναι μερικές φορές η μόνη δυνατή, συχνά υπάρχουν απλούστερες μέθοδοι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Μπορούμε, συγκεκριμένα, να δώσουμε μια πολύ πιο σύντομη απόδειξη του Θεωρήματος 1· αυτή η απόδειξη πηγάζει από την παρατήρηση ότι

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

(Εδώ, και στο υπόλοιπο βιβλίο, όταν γράφουμε $\sqrt{x}$ εννοούμε τη *θετική* τετραγωνική ρίζα του x. Αυτό το σύμβολο έχει έννοια μόνο όταν $x \geq 0$.) Μπορούμε τώρα να δούμε ότι

$$\begin{aligned}(|a+b|)^2 = (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \\ &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2.\end{aligned}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $|a+b| \leq |a| + |b|$ γιατί από την $x^2 < y^2$ έπεται η $x < y$, αρκεί τα x και y να είναι και τα δύο μη αρνητικά· η απόδειξη *αυτού* του γεγονότος αφήνεται στον αναγνώστη (Πρόβλημα 5).

Ας κάνουμε και μια τελευταία παρατήρηση για το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε: αν εξετάσουμε προσεκτικά οποιαδήποτε από τις δύο αποδείξεις, βλέπουμε ότι

$$|a+b| = |a| + |b|$$

αν οι a και b έχουν το ίδιο πρόσημο (δηλαδή είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί), ή αν ο ένας από τους δύο είναι 0, ενώ

$$|a+b| < |a| + |b|$$

αν οι a και b έχουν αντίθετα πρόσημα.

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα λεπτό σημείο που παραμελήσαμε ώς τώρα, και το οποίο πρέπει να περιλαμβάνεται σε μια σοβαρή παρουσίαση των ιδιοτήτων των αριθμών. Αφού διατυπώσαμε την ιδιότητα Ι9, αποδείξαμε ότι από την $a - b = b - a$ έπεται η $a = b$. Η απόδειξη άρχιζε με την επαλήθευση της

$$a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1),$$

από όπου συμπεράναμε ότι $a = b$. Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγουμε από την ισότητα $a \cdot (1+1) = b \cdot (1+1)$ διαιρώντας και τα δύο μέλη με $1+1$. Όντας ευσυνείδητοι, θα πρέπει να αποφεύγουμε τη διαίρεση με 0. Πρέπει επομένως να παραδεχθούμε ότι, η ισχύς του συλλογισμού μας εξαρτάται από το αν ισχύει η $1 + 1 \neq 0$. Το Πρόβλημα 25 έχει σχεδιαστεί για να σας πείσει ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποδειχθεί από τις ιδιότητες Ι1–Ι9 μόνο! Αφού όμως έχουμε στη διάθεσή μας τις Ι10, Ι11, και Ι12, η απόδειξη είναι πολύ απλή: Έχουμε ήδη δει ότι $1 > 0$· έπεται ότι $1 + 1 > 0$, ειδικότερα ότι $1 + 1 \neq 0$.

Αυτή η τελευταία απόδειξη ίσως ενισχύει την άποψη ότι είναι παράλογο να προσπαθούμε να αποδείξουμε τόσο προφανή πράγματα· μια πιο προσεκτική όμως εκτίμηση της τωρινής μας κατάστασης θα δικαιολογήσει το γιατί ασχολούμαστε τόσο σοβαρά με τέτοιες λεπτομέρειες. Σε αυτό το κεφάλαιο έχουμε υποθέσει ότι οι αριθμοί είναι γνώριμα αντικείμενα, και ότι οι Ι1–Ι12 δεν είναι τίποτα παραπάνω από σαφώς διατυπωμένες προφανείς, πολύ γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Θα ήταν όμως δύσκολο να δικαιολογήσουμε αυτήν την υπόθεση. Αν και όλοι μαθαίνουμε πώς να «δουλεύουμε με» τους αριθμούς στο σχολείο, το τι *είναι* οι αριθμοί ακριβώς παραμένει μάλλον απροσδιόριστο. Ένα μεγάλο μέρος αυτού του βιβλίου αφιερώνεται στο ξεκαθάρισμα της έννοιας του αριθμού, και μέχρι το τέλος θα έχουμε εξοικειωθεί πολύ μαζί τους. Αλλά, εν τω μεταξύ, θα χρειαστεί να εργαστούμε με αριθμούς. Είναι λοιπόν λογικό να παραδεχθούμε με ειλικρίνεια ότι δεν καταλαβαίνουμε ακόμα πλήρως τους αριθμούς· μπορούμε, ωστόσο, να λέμε ότι, όπως και αν οριστούν τελικά οι αριθμοί, θα πρέπει σίγουρα να έχουν τις ιδιότητες Ι1–Ι12.

Το μεγαλύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου ήταν μια προσπάθεια να δοθούν πειστικά στοιχεία για το ότι οι Ι1–Ι12 είναι πράγματι βασικές ιδιότητες που θα πρέπει να τις υποθέσουμε για να πάρουμε τις άλλες γνωστές ιδιότητες των αριθμών. Μερικά από τα προβλήματα (που περιγράφουν πώς παίρνουμε άλλες ιδιότητες των αριθμών από τις Ι1–Ι12) προσφέρονται ως πρόσθετη μαρτυρία. Ένα κρίσιμο ερώτημα που παραμένει είναι αν οι Ι1–Ι12 ισοδυναμούν τελικά με *όλες* τις ιδιότητες των αριθμών. Σύντομα θα δούμε ότι *δεν* είναι έτσι. Στο επόμενο κεφάλαιο οι αδυναμίες των ιδιοτήτων Ι1–Ι12 θα γίνουν τελείως φανερές, αλλά το κατάλληλο μέσο με το οποίο διορθώνονται αυτές οι αδυναμίες δεν ανακαλύπτεται και τόσο εύκολα. Η κρίσιμη πρόσθετη βασική ιδιότητα των αριθμών που ζητάμε είναι βαθιά και λεπτή, σε αντίθεση με τις Ι1–Ι12. Η ανακάλυψη αυτής της κρίσιμης ιδιότητας θα απαιτήσει όλη την εργασία που κάνουμε στο 2ο Μέρος αυτού του βιβλίου. Στο υπόλοιπο του 1ου Μέρους θα αρχίσουμε να βλέπουμε γιατί χρειάζεται κάποια πρόσθετη ιδιότητα. Για να μελετήσουμε κάτι τέτοιο, θα πρέπει να εξετάσουμε λίγο πιο προσεκτικά τι εννοούμε λέγοντας «αριθμοί».

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $ax = a$ για κάποιον αριθμό $a \neq 0$, τότε $x = 1$.

(ii) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

(iii) Αν $x^2 = y^2$, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

(iv) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

(v) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$.

(vi) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. (Υπάρχει ένας πολύ εύκολος τρόπος για να το κάνετε αυτό, χρησιμοποιώντας το (iv), και θα σας δείξει πώς να παραγοντοποιήσετε το $x^n + y^n$ όταν ο n είναι περιττός.)

2. Πού είναι το λάθος στην «απόδειξη» που ακολουθεί; Έστω $x = y$. Τότε

$$\begin{aligned} x^2 &= xy, \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2, \\ (x + y)(x - y) &= y(x - y), \\ x + y &= y, \\ 2y &= y, \\ 2 &= 1. \end{aligned}$$

3. Αποδείξτε τα εξής:

(i) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ac}{bc}$, αν $b, c \neq 0$.

(ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$, αν $b, d \neq 0$.

(iii) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, αν $a, b \neq 0$. (Για να το κάνετε αυτό, πρέπει να θυμηθείτε την ιδιότητα που ορίζει τον $(ab)^{-1}$.)

(iv) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{db}$, αν $b, d \neq 0$.

(v) $\dfrac{a}{b} \Big/ \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$, αν $b, c, d \neq 0$.

(vi) Αν $b, d \neq 0$, τότε $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ αν και μόνο αν $ad = bc$. Εξετάστε επίσης πότε $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$.

4. Βρείτε όλους τους αριθμούς x για τους οποίους

(i) $4 - x < 3 - 2x$.

(ii) $5 - x^2 < 8$.

(iii) $5 - x^2 < -2$.

(iv) $(x-1)(x-3) > 0$. (Πότε είναι θετικό το γινόμενο δύο αριθμών;)

(v) $x^2 - 2x + 2 > 0$.

(vi) $x^2 + x + 1 > 2$.

(vii) $x^2 - x + 10 > 16$.

(viii) $x^2 + x + 1 > 0$.

(ix) $(x - \pi)(x + 5)(x - 3) > 0$.

(x) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$.

(xi) $2^x < 8$.

(xii) $x + 3^x < 4$.

(xiii) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$.

(xiv) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$.

5. Αποδείξτε τα εξής:

(i) Αν $a < b$ και $c < d$, τότε $a + c < b + d$.

(ii) Αν $a < b$, τότε $-b < -a$.

(iii) Αν $a < b$ και $c > d$, τότε $a - c < b - d$.

(iv) Αν $a < b$ και $c > 0$, τότε $ac < bc$.

(v) Αν $a < b$ και $c < 0$, τότε $ac > bc$.

(vi) Αν $a > 1$, τότε $a^2 > a$.

(vii) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^2 < a$.

(viii) Αν $0 \le a < b$ και $0 \le c < d$, τότε $ac < bd$.

(ix) Αν $0 \le a < b$, τότε $a^2 < b^2$. (Χρησιμοποιήστε την (viii).)

(x) Αν $a, b \ge 0$ και $a^2 < b^2$, τότε $a < b$. (Χρησιμοποιήστε την (ix), αντιστρόφως.)

6. (α) Αποδείξτε ότι αν $0 \le x < y$, τότε $x^n < y^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(β) Αποδείξτε ότι αν $x < y$ και ο n είναι περιττός, τότε $x^n < y^n$.

(γ) Αποδείξτε ότι αν $x^n = y^n$ και ο n είναι περιττός, τότε $x = y$.

(δ) Αποδείξετε ότι αν $x^n = y^n$ και ο n είναι άρτιος, τότε $x = y$ ή $x = -y$.

7. Αποδείξτε ότι, αν $0 < a < b$, τότε

$$a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b.$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα $\sqrt{ab} \le (a+b)/2$ ισχύει για κάθε $a, b \ge 0$. Μια γενίκευση αυτού του γεγονότος εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-22.

$*$8. Αν και οι βασικές ιδιότητες των ανισοτήτων διατυπώθηκαν με βάση το σύνολο P όλων των θετικών αριθμών, και η $<$ ορίστηκε με τη βοήθεια του P, μπορούμε να αντιστρέψουμε τη διαδικασία. Έστω ότι αντικαθιστούμε τις Ι10–Ι12 με τις

(Ι$'$10) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a και b, ισχύει μία, και μόνο μία, από τις:
i. $a = b$,
ii. $a < b$,
iii. $b < a$.

(Ι$'$11) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$ και $b < c$, τότε $a < c$.

(Ι$'$12) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$, τότε $a + c < b + c$.

(Ι$'$13) Για οποιουσδήποτε αριθμούς a, b και c, αν $a < b$ και $0 < c$, τότε $ac < bc$.

Δείξτε ότι τότε οι Ι10–Ι12 αποδεικνύονται σαν θεωρήματα.

9. Εκφράστε καθένα από τα επόμενα, με τουλάχιστον ένα ζεύγος απόλυτης τιμής λιγότερο.

(i) $|\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{7}|$.

(ii) $|(|a + b| - |a| - |b|)|$.

(iii) $|(|a + b| + |c| - |a + b + c|)|$.

(iv) $|x^2 - 2xy + y^2|$.

(v) $|(|\sqrt{2} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} - \sqrt{7}|)|$.

10. Εκφράστε καθένα από τα επόμενα χωρίς απόλυτες τιμές, διακρίνοντας περιπτώσεις όπου χρειάζεται.

(i) $|a + b| - |b|$.

(ii) $|(|x| - 1)|$.

(iii) $|x| - |x^2|$.

(iv) $a - |(a - |a|)|$.

11. Βρείτε όλους τους αριθμούς x για τους οποίους

(i) $|x - 3| = 8$.

(ii) $|x - 3| < 8$.

(iii) $|x + 4| < 2$.

(iv) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.

(v) $|x - 1| + |x + 1| < 2$.

(vi) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.

(vii) $|x - 1| \cdot |x + 1| = 0$.

(viii) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 3$.

12. Αποδείξτε τα εξής:

(i) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

(ii) $\left|\dfrac{1}{x}\right| = \dfrac{1}{|x|}$, αν $x \neq 0$. (Ο καλύτερος τρόπος για να το κάνετε αυτό είναι να θυμηθείτε τι είναι το $|x|^{-1}$.)

(iii) $\dfrac{|x|}{|y|} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$, αν $y \neq 0$.

(iv) $|x - y| \leq |x| + |y|$. (Δώστε μια πολύ σύντομη απόδειξη.)

(v) $|x| - |y| \leq |x - y|$. (Μπορείτε να κάνετε μια πολύ σύντομη απόδειξη, αν γράψετε τα πράγματα με τον σωστό τρόπο.)

(vi) $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$. (Γιατί αυτό είναι άμεση συνέπεια του (v);)

(vii) $|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$. Υποδείξτε πότε ισχύει ισότητα, και αποδείξτε τον ισχυρισμό σας.

13. Ο μεγαλύτερος από τους δύο αριθμούς x και y συμβολίζεται με $\max(x, y)$. Έτσι, $\max(-1, 3) = \max(3, 3) = 3$ και $\max(-1, -4) = \max(-4, -1) = -1$. Ο μικρότερος από τους x και y συμβολίζεται με $\min(x, y)$. Αποδείξτε ότι

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |y - x|}{2},$$
$$\min(x, y) = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Εξαγάγετε έναν τύπο για το $\max(x, y, z)$ και το $\min(x, y, z)$, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την

$$\max(x, y, z) = \max(x, \max(y, z)).$$

14. (α) Αποδείξτε ότι $|a| = |-a|$. (Το θέμα είναι να μην μπερδευτείτε με πάρα πολλές περιπτώσεις. Πρώτα αποδείξτε τον ισχυρισμό για $a \geq 0$. Γιατί τότε είναι προφανής για $a \leq 0$;)

(β) Αποδείξτε ότι $-b \leq a \leq b$ αν και μόνο αν $|a| \leq b$. Ειδικότερα, έπεται ότι $-|a| \leq a \leq |a|$.

(γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το γεγονός για να δώσετε μια νέα απόδειξη της $|a + b| \leq |a| + |b|$.

∗**15.** Αποδείξτε ότι αν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0, τότε

$$x^2 + xy + y^2 > 0,$$
$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Πρόβλημα 1.

∗**16.** (α) Δείξτε ότι

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 \quad \text{μόνο όταν } x = 0 \text{ ή } y = 0,$$
$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 \quad \text{μόνο όταν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \text{ ή } x = -y.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \geq 0,$$

αποδείξτε ότι $4x^2 + 6xy + 4y^2 > 0$ εκτός και αν ο x και ο y είναι και οι δύο 0.

(γ) Χρησιμοποιήστε το μέρος (β) για να βρείτε πότε $(x + y)^4 = x^4 + y^4$.

(δ) Βρείτε πότε $(x + y)^5 = x^5 + y^5$. Υπόδειξη: Από την υπόθεση $(x + y)^5 = x^5 + y^5$ πρέπει να είστε σε θέση να αποδείξετε την ισότητα $x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3 = 0$, αν $xy \neq 0$. Από αυτό έπεται ότι $(x + y)^3 = x^2y + xy^2 = xy(x + y)$.

Θα πρέπει τώρα να μπορείτε να κάνετε μια καλή πρόβλεψη για το πότε $(x + y)^n = x^n + y^n$· η απόδειξη περιέχεται στο Πρόβλημα 11-63.

17. (α) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $2x^2 - 3x + 4$. Υπόδειξη: «Συμπληρώστε το τετράγωνο», δηλαδή γράψτε $2x^2 - 3x + 4 = 2(x - 3/4)^2 +$;

(β) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 - 3x + 2y^2 + 4y + 2$.

(γ) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 6y + 7$.

18. (α) Έστω ότι $b^2 - 4c \geq 0$. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \qquad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

ικανοποιούν και οι δύο την εξίσωση $x^2 + bx + c = 0$.

(β) Έστω ότι $b^2 - 4c < 0$. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν αριθμοί x που να ικανοποιούν την $x^2 + bx + c = 0$· και μάλιστα ισχύει $x^2 + bx + c > 0$ για κάθε x. Υπόδειξη: «Συμπληρώστε το τετράγωνο».

(γ) Χρησιμοποιήστε το παραπάνω για να δώσετε μια άλλη απόδειξη του ότι, αν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0, τότε $x^2 + xy + y^2 > 0$.

(δ) Για ποιους αριθμούς a είναι αλήθεια ότι $x^2 + axy + y^2 > 0$ όταν ο x και ο y δεν είναι και οι δύο 0;

(ε) Βρείτε τη μικρότερη δυνατή τιμή του $x^2 + bx + c$ και του $ax^2 + bx + c$, για $a > 0$.

19. Το γεγονός ότι $a^2 \geq 0$ για κάθε αριθμό a, αν και μοιάζει στοιχειώδες, είναι ωστόσο η θεμελιώδης ιδέα που βρίσκεται τελικά πίσω από τις πιο σημαντικές ανισότητες. Ο πρόγονος όλων των ανισοτήτων είναι η *ανισότητα του Schwarz*:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}\,\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}.$$

(Μια πιο γενική μορφή εμφανίζεται στο Πρόβλημα 2-21.) Οι τρεις αποδείξεις της ανισότητας Schwarz που σκιαγραφούνται παρακάτω έχουν ένα μόνο κοινό σημείο —το ότι βασίζονται στο γεγονός πως $a^2 \geq 0$ για κάθε a.

(α) Αποδείξτε ότι, αν $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$ για κάποιον αριθμό $\lambda \geq 0$, τότε ισχύει ισότητα στην ανισότητα του Schwarz. Αποδείξτε το ίδιο πράγμα αν $y_1 = y_2 = 0$. Έστω τώρα ότι ο y_1 και ο y_2 δεν είναι και οι δύο 0, και ότι δεν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &< (\lambda y_1 - x_1)^2 + (\lambda y_2 - x_2)^2 \\ &= \lambda^2(y_1{}^2 + y_2{}^2) - 2\lambda(x_1 y_1 + x_2 y_2) + (x_1{}^2 + x_2{}^2). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 18, ολοκληρώστε την απόδειξη της ανισότητας του Schwarz.

(β) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz χρησιμοποιώντας την $2xy \leq x^2 + y^2$ (πώς βγαίνει αυτή;) με

$$x = \frac{x_i}{\sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2}}, \qquad y = \frac{y_i}{\sqrt{y_1{}^2 + y_2{}^2}},$$

πρώτα για $i = 1$ και μετά για $i = 2$.

(γ) Αποδείξτε την ανισότητα του Schwarz αποδεικνύοντας πρώτα ότι

$$(x_1{}^2 + x_2{}^2)(y_1{}^2 + y_2{}^2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2.$$

(δ) Συμπεράνετε, από καθεμιά από αυτές τις τρεις αποδείξεις, ότι η ισότητα ισχύει μόνο όταν $y_1 = y_2 = 0$ ή όταν υπάρχει ένας αριθμός $\lambda \geq 0$ τέτοιος ώστε $x_1 = \lambda y_1$ και $x_2 = \lambda y_2$.

Αργότερα, θα μας φανούν πολύ χρήσιμα τρία πράγματα που έχουν σχέση με τις ανισότητες. Αν και θα δώσουμε τις αποδείξεις μέσα στο κείμενο όταν έρθει η ώρα, η προσωπική τριβή με αυτά τα προβλήματα είναι απείρως πιο διαφωτιστική από την ανάγνωση μιας τέλεια επεξεργασμένης απόδειξης. Στη διατύπωση αυτών των προτάσεων αναμιγνύονται κάποιοι αλλόκοτοι αριθμοί, το βασικό τους όμως μήνυμα είναι πολύ απλό: αν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0, και το y είναι αρκετά κοντά στο y_0, τότε το $x + y$ θα είναι κοντά στο $x_0 + y_0$, το xy κοντά στο $x_0 y_0$, και το $1/y$ κοντά στο $1/y_0$. Το σύμβολο «ε» που εμφανίζεται σε αυτές τις προτάσεις θα μπορούσε θαυμάσια να αντικατασταθεί με ένα οποιοδήποτε άλλο γράμμα. Όμως, η παράδοση έχει καταστήσει τη χρήση του ε σχεδόν ιερή (ακόμη και στην ξένη βιβλιογραφία) στις περιπτώσεις που εφαρμόζονται αυτά τα θεωρήματα.

20. Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2},$$

τότε

$$\begin{aligned} |(x + y) - (x_0 + y_0)| &< \varepsilon, \\ |(x - y) - (x_0 - y_0)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

***21.** Αποδείξτε ότι, αν

$$|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \quad \text{και} \quad |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)},$$

τότε $|xy - x_0 y_0| < \varepsilon$.

(Το σύμβολο «min» ορίστηκε στο Πρόβλημα 13, αλλά ο τύπος που δίνεται σε εκείνο το πρόβλημα δεν μας βοηθά στην προκειμένη περίπτωση. Η πρώτη ανισότητα στην υπόθεση σημαίνει απλούστατα ότι

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \quad \text{και} \quad |x - x_0| < 1.$$

Σε ένα σημείο της απόδειξης θα χρειαστείτε την πρώτη ανισότητα, και σε ένα άλλο σημείο θα χρειαστείτε τη δεύτερη. Μια τελευταία συμβουλή: αφού οι υποθέσεις δίνουν πληροφορίες μόνο για το $x - x_0$ και το $y - y_0$, είναι προφανές ότι για την απόδειξη θα χρειαστεί να γράψετε το $xy - x_0 y_0$ με τέτοιο τρόπο ώστε να εμφανιστούν τα $x - x_0$ και $y - y_0$.)

***22.** Αποδείξτε ότι, αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < \min\left(\frac{|y_0|}{2}, \frac{\varepsilon |y_0|^2}{2}\right),$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left|\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

***23.** Αντικαταστήστε τα ερωτηματικά στην πρόταση που ακολουθεί με εκφράσεις που περιέχουν τα ε, x_0 και y_0 έτσι ώστε το συμπέρασμα να ισχύει:

Αν $y_0 \neq 0$ και

$$|y - y_0| < \ ; \quad \text{και} \quad |x - x_0| < \ ;$$

τότε $y \neq 0$ και

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x_0}{y_0}\right| < \varepsilon.$$

Αυτό το πρόβλημα είναι τετριμμένο, με την έννοια ότι η λύση του έπεται από τα Προβλήματα 21 και 22 σχεδόν χωρίς κόπο (παρατηρήστε ότι $x/y = x \cdot 1/y$). Το κρίσιμο σημείο είναι να μην τα χάσετε· αποφασίστε ποιο από τα δύο προβλήματα πρέπει να χρησιμοποιήσετε πρώτο και μην πανικοβληθείτε αν η απάντησή σας δεν μοιάζει και πολύ πιθανή.

$*$**24.** Αυτό το πρόβλημα δείχνει ότι το να τοποθετούμε παρενθέσεις σε ένα άθροισμα δεν έχει επιπτώσεις. Οι αποδείξεις χρησιμοποιούν «μαθηματική επαγωγή»· αν δεν είστε εξοικειωμένοι με τέτοιες αποδείξεις αλλά θέλετε να ασχοληθείτε με αυτό το πρόβλημα, αναβάλλετέ το για μετά το Κεφάλαιο 2, όπου θα εξηγηθούν οι αποδείξεις με επαγωγή.

Ας συμφωνήσουμε, για να είμαστε σαφείς, ότι με $a_1 + \cdots + a_n$ θα συμβολίζουμε το

$$a_1 + (a_2 + (a_3 + \cdots + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n))) \cdots).$$

Έτσι, με $a_1 + a_2 + a_3$ συμβολίζουμε το $a_1 + (a_2 + a_3)$, με $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ το $a_1 + (a_2 + (a_3 + a_4))$, κτλ.

(α) Αποδείξτε ότι

$$(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = a_1 + \cdots + a_{k+1}.$$

Υπόδειξη: Κάντε επαγωγή στο k.

(β) Αποδείξτε ότι, αν $n \geq k$, τότε

$$(a_1 + \cdots + a_k) + (a_{k+1} + \cdots + a_n) = a_1 + \cdots + a_n.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να δώσετε μια απόδειξη με επαγωγή στο k.

(γ) Έστω $s(a_1, \ldots, a_k)$ κάποιο άθροισμα που σχηματίζεται από τα $a_1, \ldots, a_k$. Δείξτε ότι

$$s(a_1, \ldots, a_k) = a_1 + \cdots + a_k.$$

Υπόδειξη: Πρέπει να υπάρχουν δύο αθροίσματα

$$s'(a_1, \ldots, a_l) \quad \text{και} \quad s''(a_{l+1}, \ldots, a_k)$$

τέτοια ώστε

$$s(a_1, \ldots, a_k) = s'(a_1, \ldots, a_l) + s''(a_{l+1}, \ldots, a_k).$$

25. Ας υποθέσουμε ότι με τη λέξη «αριθμός» εννοούμε το 0 ή το 1, και ότι ορίζουμε δύο πράξεις $+$ και $\cdot$ με τους εξής δύο πίνακες

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ελέγξτε ότι οι ιδιότητες Ι1–Ι9 ισχύουν όλες, αν και $1 + 1 = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΙΔΩΝ

Στο Κεφάλαιο 1 χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «αριθμός» πολύ χαλαρά, αν και ασχοληθήκαμε με τις βασικές ιδιότητες των αριθμών. Θα χρειαστεί τώρα να διακρίνουμε προσεκτικά διάφορα είδη αριθμών.

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι «αριθμοί μέτρησης»

$$1, 2, 3, \ldots .$$

Η θεμελιώδης σημασία αυτού του συνόλου αριθμών τονίζεται από το σύμβολό του $\mathbf{N}$ (που προέρχεται από το natural numbers = **φυσικοί αριθμοί**. Μια σύντομη ματιά στις Ι1–Ι12 δείχνει ότι οι βασικές για μας ιδιότητες των «αριθμών» δεν ισχύουν στο $\mathbf{N}$ —για παράδειγμα, οι Ι2 και Ι3 δεν έχουν έννοια στο $\mathbf{N}$. Από αυτήν την άποψη, το σύστημα $\mathbf{N}$ έχει πολλές αδυναμίες. Είναι όμως και αρκετά σημαντικό ώστε να του αξίζουν κάποια σχόλια, πριν μελετήσουμε μεγαλύτερα σύνολα αριθμών.

Η πιο βασική ιδιότητα του $\mathbf{N}$ είναι η αρχή της «μαθηματικής επαγωγής». Υποθέτουμε ότι $P(x)$ σημαίνει ότι η ιδιότητα P ισχύει για τον αριθμό x. Τότε η αρχή της μαθηματικής επαγωγής είναι ο ισχυρισμός ότι η $P(x)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό x, αν

(1) Η $P(1)$ ισχύει.

(2) Όποτε ισχύει η $P(k)$, ισχύει και η $P(k+1)$.

Παρατηρήστε ότι η συνθήκη (2) ισχυρίζεται την ισχύ της $P(k+1)$ με την υπόθεση ότι ισχύει η $P(k)$· αν ισχύει και η συνθήκη (1) αυτό αρκεί για να εξασφαλίσει την ισχύ της $P(x)$ για κάθε x. Πραγματικά, αν η $P(1)$ ισχύει, έπεται ότι και η $P(2)$ ισχύει (χρησιμοποιούμε την (2) στην ειδική περίπτωση $k = 1$). Τώρα, αφού η $P(2)$ ισχύει, έπεται ότι και η $P(3)$ ισχύει (χρησιμοποιούμε την (2) στην ειδική περίπτωση $k = 2$). Είναι φανερό ότι, με κατάλληλο πλήθος βημάτων αυτού του είδους, μπορούμε να φτάσουμε οποιονδήποτε αριθμό, άρα η $P(k)$ ισχύει για όλους τους αριθμούς k.

Μπορεί να δώσει κανείς μια ωραία εικόνα της λογικής που βρίσκεται πίσω από τη μαθηματική επαγωγή, με μια άπειρη γραμμή από ανθρώπους

άνθρωπος Νο. 1, άνθρωπος Νο. 2, άνθρωπος Νο. 3, ...

Αν σε κάθε άνθρωπο έχει δοθεί η οδηγία να λέει κάθε μυστικό που ακούει στον μπροστινό του (αυτόν με τον αμέσως μεγαλύτερο αριθμό) και πούμε ένα μυστικό στον άνθρωπο Νο. 1, είναι σαφές ότι τελικά όλοι οι άνθρωποι θα μάθουν το μυστικό. Αν $P(x)$ είναι ο ισχυρισμός ότι ο άνθρωπος Νο. x θα μάθει το μυστικό, τότε οι οδηγίες που δώσαμε (ο καθένας να λέει τα μυστικά που μαθαίνει στον επόμενο) μας εξασφαλίζουν ότι η συνθήκη (2) ισχύει, και το ότι είπαμε το μυστικό στον άνθρωπο Νο. 1 κάνει και την (1) αληθή. Το επόμενο παράδειγμα είναι μια ουσιαστικότερη εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής. Υπάρχει ένας χρήσιμος και εντυπωσιακός τύπος που εκφράζει το άθροισμα των πρώτων n αριθμών με έναν απλό τρόπο:

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Για να αποδείξουμε αυτόν τον τύπο, παρατηρούμε πρώτα ότι προφανώς ισχύει για $n = 1$. *Υποθέτουμε* τώρα ότι για κάποιον ακέραιο k έχουμε

$$1 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1) + 2k + 2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

άρα ο τύπος ισχύει και για $k+1$. Με βάση την αρχή της επαγωγής, αποδεικνύει ότι ο τύπος ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n. Το συγκεκριμένο παράδειγμα παρουσιάζει ένα φαινόμενο που συμβαίνει συχνά, ιδιαίτερα σε σχέση με τύπους σαν και αυτόν που ήδη αποδείξαμε. Αν και η απόδειξη με επαγωγή είναι συχνά πολύ απλή και άμεση, η μέθοδος με την οποία ανακαλύφθηκε ο τύπος παραμένει μυστήριο. Τα Προβλήματα 5 και 6 δείχνουν με ποιον τρόπο βρίσκονται μερικοί τύποι αυτού του είδους.

Η αρχή της μαθηματικής επαγωγής μπορεί να διατυπωθεί με έναν ισοδύναμο τρόπο χωρίς να μιλάμε για «ιδιότητες» ενός αριθμού, έναν όρο που είναι αρκετά αόριστος για να σταθεί σε μια μαθηματική συζήτηση. Μια πιο ακριβής διατύπωση μας λέει ότι αν A είναι ένα σύνολο από φυσικούς αριθμούς και

(1) ο 1 ανήκει στο A,

(2) ο $k+1$ ανήκει στο A, όποτε ο k ανήκει στο A,

τότε A είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών. Πρέπει να έγινε φανερό ότι αυτή η διατύπωση αντικαθιστά τη λιγότερο τυπική που δώσαμε πιο πριν, και είναι ισοδύναμη με αυτήν —απλώς θεωρούμε το σύνολο A των φυσικών αριθμών x που ικανοποιούν την $P(x)$. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι A είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών n για τους οποίους ισχύει ότι

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Η απόδειξη που δώσαμε πιο πάνω για αυτόν τον τύπο έδειξε ότι το A περιέχει τον 1, και ότι και ο $k+1$ είναι στο A, αν ο k είναι στο A. Έπεται ότι A είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών, δηλαδή, ότι ο τύπος ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.

Υπάρχει όμως και άλλη μια αυστηρή μορφή της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, που μοιάζει πολύ διαφορετική. Αν A είναι ένα σύνολο από φυσικούς αριθμούς, βρισκόμαστε σε πειρασμό να πούμε ότι το A πρέπει να έχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Στην πραγματικότητα, αυτός ο ισχυρισμός μπορεί να μην είναι σωστός μόνο σε μια περίπτωση, μάλλον ειδική όμως. Ένα εξαιρετικά σημαντικό σύνολο φυσικών αριθμών είναι το σύνολο A που δεν περιέχει κανέναν φυσικό αριθμό, η «κενή συλλογή» ή το «κενό σύνολο»* που συμβολίζεται με $\emptyset$. Το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών που δεν έχει ελάχιστο στοιχείο —αφού δεν έχει κανένα στοιχείο. Αυτή όμως είναι και η μόνη δυνατή εξαίρεση· αν A είναι ένα μη κενό σύνολο φυσικών αριθμών, τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Αυτή η «διαισθητικά προφανής» πρόταση, γνωστή ως «αρχή της καλής διάταξης» αποδεικνύεται από την αρχή της επαγωγής ως εξής: Υποθέτουμε ότι το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο. Έστω B το σύνολο των φυσικών αριθμών n με την ιδιότητα οι $1, \ldots, n$ όλοι να *μην* βρίσκονται στο A. Προφανώς, ο 1 ανήκει στο B (γιατί αν ο 1 ήταν στο A, τότε το A θα είχε τον αριθμό 1 ως ελάχιστο στοιχείο). Ακόμα, αν οι $1, \ldots, k$ δεν ανήκουν στο A, σίγουρα και ο $k+1$ δεν ανήκει στο A (αλλιώς ο $k+1$ θα ήταν ελάχιστο στοιχείο του A), άρα οι $1, \ldots, k+1$ όλοι δεν ανήκουν στο A. Αυτό αποδεικνύει ότι αν ο k ανήκει στο B, τότε και ο $k+1$ ανήκει στο B. Έπεται ότι κάθε αριθμός n ανήκει στο B,

*Αν και δεν θα σας κάνει εντύπωση ως σύνολο, με τη συνηθισμένη έννοια της λέξης, το κενό σύνολο εμφανίζεται πολύ φυσικά σε πολλές περιπτώσεις. Συχνά θεωρούμε το σύνολο A, που αποτελείται από όλα τα x που ικανοποιούν κάποια ιδιότητα P· συχνά, τίποτε δεν μας εγγυάται ότι η P ικανοποιείται από *κάποιον* αριθμό, άρα το A μπορεί να είναι το $\emptyset$ —και μάλιστα συχνά αποδεικνύουμε ότι η P δεν ισχύει ποτέ, αποδεικνύοντας ότι $A = \emptyset$.

δηλαδή, οι αριθμοί $1, \ldots, n$ *δεν* ανήκουν στο A για κάθε φυσικό αριθμό n. Άρα $A = \emptyset$, που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Μπορούμε ακόμα να αποδείξουμε την αρχή της επαγωγής από την αρχή της καλής διάταξης (Πρόβλημα 10). Οποιαδήποτε από τις δύο αρχές μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως μια βασική υπόθεση για τους φυσικούς αριθμούς.

Υπάρχει και άλλη μια μορφή επαγωγής που θα έπρεπε να αναφερθεί. Μερικές φορές προσπαθώντας να αποδείξουμε την $P(k+1)$ δεν αρκεί να υποθέσουμε μόνο την $P(k)$, αλλά και την $P(l)$ για όλους τους φυσικούς αριθμούς $l \leq k$. Σε αυτήν την περίπτωση μιλάμε για την «αρχή της πλήρους επαγωγής». Συγκεκριμένα, αν A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών και

(1) ο 1 ανήκει στο A,

(2) ο $k+1$ ανήκει στο A, αν οι $1, \ldots, k$ ανήκουν στο A,

τότε το A είναι το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών.

Αν και η αρχή της πλήρους επαγωγής μοιάζει πολύ πιο ισχυρή από τη συνηθισμένη αρχή της επαγωγής, δεν είναι παρά συνέπειά της. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος αφήνεται στον αναγνώστη, με μια υπόδειξη (Πρόβλημα 11). Εφαρμογές δίνονται στα Προβλήματα 7, 17, 20 και 22.

Στενά συνδεδεμένοι με τις αποδείξεις με επαγωγή είναι οι «αναδρομικοί ορισμοί». Για παράδειγμα, ο αριθμός $n!$ (διαβάζεται «n παραγοντικό») ορίζεται ως το γινόμενο όλων των φυσικών αριθμών που είναι μικρότεροι ή ίσοι του n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Αυτό το εκφράζουμε αυστηρότερα ως εξής:

$$\begin{aligned} &(1) \quad 1! = 1 \\ &(2) \quad n! = n \cdot (n-1)!. \end{aligned}$$

Αυτή η μορφή του ορισμού εμφανίζει τη σχέση ανάμεσα στο $n!$ και στο $(n-1)!$ με έναν σαφή τρόπο, ιδανικό για αποδείξεις με επαγωγή. Το Πρόβλημα 23 ανακεφαλαιώνει έναν ορισμό που σας είναι ήδη γνωστός, αλλά που μπορεί να δοθεί πιο σύντομα ως αναδρομικός ορισμός· όπως δείχνει αυτό το πρόβλημα, ο αναδρομικός ορισμός είναι στην πραγματικότητα απαραίτητος για μια αυστηρή απόδειξη των βασικών ιδιοτήτων του ορισμού.

Ένας ορισμός που ίσως δεν είναι γνωστός εισάγει και έναν εύχρηστο συμβολισμό που θα τον χρησιμοποιούμε συνεχώς. Αντί να γράφουμε

$$a_1 + \cdots + a_n,$$

χρησιμοποιούμε συνήθως το γράμμα Σ και γράφουμε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Με άλλα λόγια, με $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ συμβολίζουμε το άθροισμα των αριθμών που παίρνουμε θέτοντας $i = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι,

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Σημειώνουμε ότι το γράμμα i δεν έχει στην ουσία τίποτα να κάνει με τον αριθμό $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$, και μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε κατάλληλο σύμβολο (εκτός από το n φυσικά!):

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{j=1}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{j} n = \frac{j(j+1)}{2}.$$

Για να ορίσουμε το $\sum_{i=1}^{n} a_i$ αυστηρά, χρειαζόμαστε έναν αναδρομικό ορισμό:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1,$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n.$$

Αλλά μόνο οι θαυμαστές της μαθηματικής αυστηρότητας θα επέμεναν τόσο πολύ σε τόση ακρίβεια. Στην πράξη, χρησιμοποιούνται διάφορες παραλλαγές αυτού του συμβολισμού και κανένας δεν αισθάνεται την ανάγκη να δώσει κάποιες εξηγήσεις. Το σύμβολο

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 4}}^{n} a_i,$$

για παράδειγμα, είναι ένας προφανής τρόπος γραφής του

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + \cdots + a_n,$$

ή ακριβέστερα του

$$\sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=5}^{n} a_i.$$

Οι αδυναμίες των φυσικών αριθμών που ανακαλύψαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου θεραπεύονται εν μέρει αν επεκτείνουμε αυτό το σύστημα στο σύνολο των **ακεραίων**

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots.$$

Αυτό το σύνολο συμβολίζεται με **Z** (από τη Γερμανική λέξη «Zahl», αριθμός). Από τις ιδιότητες Ι1–Ι12, μόνο η Ι7 δεν ισχύει στο **Z**.

Παίρνουμε ένα ακόμα μεγαλύτερο σύστημα αριθμών, αν θεωρήσουμε τα πηλίκα m/n ακεραίων (με $n \neq 0$). Αυτοί οι αριθμοί λέγονται **ρητοί αριθμοί**, και το σύνολο όλων των ρητών αριθμών συμβολίζεται με **Q** (από το «quotients» = πηλίκα). Σε αυτό το σύστημα αριθμών όλες οι Ι1–Ι12 ισχύουν. Μπαίνουμε στον πειρασμό να συμπεράνουμε ότι οι «ιδιότητες των αριθμών», που μελετήσαμε με αρκετές λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 1, αναφέρονται ακριβώς σε αυτό το σύνολο, το **Q**. Υπάρχει όμως ένα ακόμα μεγαλύτερο σύνολο αριθμών στο οποίο εφαρμόζονται οι ιδιότητες Ι1–Ι12 —το σύνολο όλων των **πραγματικών αριθμών**, που συμβολίζεται με **R**. Οι πραγματικοί αριθμοί περιέχουν εκτός από τους ρητούς αριθμούς και άλλους αριθμούς (τους **άρρητους αριθμούς**) που παριστάνονται με άπειρα δεκαδικά ψηφία· ο π και ο $\sqrt{2}$ είναι και οι δύο παραδείγματα άρρητων αριθμών. Η απόδειξη ότι ο π είναι άρρητος δεν είναι εύκολη —θα αφιερώσουμε ολόκληρο το Κεφάλαιο 16 του 3ου Μέρους σε μια απόδειξη αυτού του γεγονότος. Το ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, βέβαια, είναι πολύ απλό, και ήταν γνωστό στους αρχαίους Έλληνες. (Αφού το Πυθαγόρειο θεώρημα αποδεικνύει ότι ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο, με πλευρές μήκους 1, έχει υποτείνουσα μήκους $\sqrt{2}$, δεν είναι έκπληξη το ότι οι αρχαίοι είχαν εξετάσει αυτό το πρόβλημα.) Η απόδειξη βασίζεται σε μερικές παρατηρήσεις για τους φυσικούς αριθμούς. Κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται είτε στη μορφή $2k$ για κάποιον ακέραιο k, ή αλλιώς στη μορφή $2k+1$ για κάποιον ακέραιο k (αυτό το «προφανές» αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή (Πρόβλημα 8)). Οι φυσικοί αριθμοί της μορφής $2k$ λέγονται **άρτιοι**· αυτοί της μορφής $2k+1$ λέγονται **περιττοί**. Παρατηρούμε ότι άρτιοι αριθμοί έχουν άρτια τετράγωνα, και περιττοί αριθμοί έχουν περιττά τετράγωνα:

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2),$$
$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1.$$

Έπεται ότι ισχύει και το αντίστροφο: αν ο n^2 είναι άρτιος, τότε ο n είναι άρτιος· αν ο n^2 είναι περιττός, τότε ο n είναι περιττός. Η απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος είναι τώρα πολύ απλή. Υποθέτουμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός· δηλαδή, υποθέτουμε ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί p και q τέτοιοι ώστε

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι p και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη (γιατί θα μπορούσαμε να διαιρέσουμε με όλους τους κοινούς διαιρέτες πριν αρχίσουμε). Τώρα έχουμε

$$p^2 = 2q^2.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο p^2 είναι άρτιος, επομένως ο p πρέπει να είναι άρτιος· δηλαδή, $p = 2k$ για κάποιον φυσικό αριθμό k. Τότε

$$p^2 = 4k^2 = 2q^2,$$

άρα

$$2k^2 = q^2.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο q^2 είναι άρτιος, άρα και ο q είναι άρτιος. Επομένως οι p και q είναι και οι δύο άρτιοι, πράγμα που αντιφάσκει με το ότι οι p και q δεν έχουν κοινό διαιρέτη. Αυτή η αντίφαση ολοκληρώνει την απόδειξη.

Έχει σημασία να καταλάβουμε ακριβώς τι μας δείχνει αυτή η απόδειξη. Αποδείξαμε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός x τέτοιος ώστε $x^2 = 2$. Αυτός ο ισχυρισμός εκφράζεται πιο σύντομα με το να πούμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Παρατηρήστε όμως ότι η χρήση του συμβόλου $\sqrt{2}$ προϋποθέτει την ύπαρξη *κάποιου* αριθμού (οπωσδήποτε άρρητου) του οποίου το τετράγωνο είναι 2. Δεν έχουμε αποδείξει ότι υπάρχει τέτοιος αριθμός και μπορούμε να σας διαβεβαιώσουμε ότι, προς το παρόν, μια τέτοια απόδειξη μας είναι *αδύνατη*. Κάθε απόδειξη σε αυτό το στάδιο θα πρέπει να βασίζεται στις Ι1–Ι12 (τις μόνες ιδιότητες του $\mathbf{R}$ που έχουμε αναφέρει)· αφού οι Ι1–Ι12 ισχύουν και για το $\mathbf{Q}$, ο ίδιος ακριβώς ισχυρισμός θα έδειχνε ότι υπάρχει ένας ρητός αριθμός με τετράγωνο 2, και αυτό όπως ξέρουμε δεν ισχύει. (Σημειώνουμε ότι ο αντίστροφος συλλογισμός δεν λειτουργεί —η απόδειξή μας ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός με τετράγωνο 2 δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός με τετράγωνο 2, γιατί η απόδειξη χρησιμοποίησε εκτός από τις Ι1–Ι12 και μια ακόμα ιδιότητα χαρακτηριστική του $\mathbf{Q}$, ότι κάθε αριθμός στο $\mathbf{Q}$ γράφεται p/q για ακεραίους p και q.)

Αυτή η συγκεκριμένη αδυναμία στον κατάλογό μας των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών θα μπορούσε βέβαια να διορθωθεί αν προσθέταμε μια καινούργια ιδιότητα που να ισχυρίζεται την ύπαρξη τετραγωνικών ριζών για τους θετικούς αριθμούς. Το να καταφύγουμε όμως σε ένα τέτοιο μέτρο δεν είναι ούτε αισθητικά ευχάριστο ούτε μαθηματικά ικανοποιητικό· θα συνεχίζαμε να μην ξέραμε ότι κάθε αριθμός έχει μια n-οστή ρίζα, αν ο n είναι περιττός, και ότι κάθε θετικός αριθμός έχει μια n-οστή ρίζα αν ο n είναι άρτιος. Ακόμα και αν υποθέταμε κάτι τέτοιο, δεν θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός αριθμού x που να ικανοποιεί την $x^5 + x + 1 = 0$ (ενώ πράγματι υπάρχει), γιατί δεν ξέρουμε πώς να γράψουμε τη λύση της εξίσωσης συναρτήσει των n-οστών ριζών (και μάλιστα, αποδεικνύεται ότι η λύση δεν μπορεί να γραφεί σε αυτήν τη μορφή). Και βέβαια, δεν θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι όλες οι εξισώσεις έχουν λύση, γιατί αυτό δεν ισχύει (για παράδειγμα, δεν υπάρχει αριθμός x που να ικανοποιεί την $x^2 + 1 = 0$). Στην πραγματικότητα, αυτή η κατεύθυνση δεν είναι και πολύ αποδοτική. Οι πιο χρήσιμες υποδείξεις για την ιδιότητα που διαχωρίζει το $\mathbf{R}$ από το $\mathbf{Q}$, η πιο πιεστική ένδειξη για να διευκρινιστεί αυτή η ιδιότητα, δεν έρχονται από τη μελέτη των αριθμών και μόνο. Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών βαθύτερα, πρέπει να μελετήσουμε κάτι παραπάνω από τους πραγματικούς αριθμούς. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αρχίσουμε με τα θεμέλια του ΑπειροστικούΛογισμού, συγκεκριμένα με τη βασική έννοια στην οποία στηρίζεται ο Απειροστικός Λογισμός – τις συναρτήσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Αποδείξτε με επαγωγή τους εξής τύπους.

(i) $$1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) $$1^3 + \cdots + n^3 = (1 + \cdots + n)^2.$$

2. Βρείτε έναν τύπο για το

(i) $$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2.$$

Υπόδειξη: Ποια σχέση έχουν αυτές οι παραστάσεις με το $1 + 2 + 3 + \cdots + 2n$ και με το $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2$;

3. Αν $0 \le k \le n$, ο «διωνυμικός συντελεστής» $\binom{n}{k}$ ορίζεται από την

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \quad \text{αν } k \neq 0, n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ (μια ειδική περίπτωση του πρώτου τύπου αν ορίσουμε } 0! = 1\text{)},$$

και για $k < 0$ ή $k > n$ ορίζουμε τον διωνυμικό συντελεστή να είναι 0.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

(Η απόδειξη δεν απαιτεί επιχείρημα επαγωγής.)

Αυτή η σχέση οδηγεί στο ακόλουθο σχήμα, γνωστό ως «τρίγωνο του Pascal» —ένας αριθμός που δεν βρίσκεται πάνω σε μια από τις πλευρές είναι το άθροισμα των δύο αριθμών από πάνω του· ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ είναι ο $(k+1)$-οστός αριθμός στην $(n+1)$-οστή σειρά.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

(β) Παρατηρήστε ότι όλοι οι αριθμοί στο τρίγωνο του Pascal είναι φυσικοί αριθμοί. Χρησιμοποιήστε το μέρος (α) για να αποδείξετε με επαγωγή ότι ο $\binom{n}{k}$ είναι πάντα φυσικός αριθμός. (Ολόκληρη η απόδειξή σας θα πρέπει, κατά κάποιον τρόπο, να συνοψίζεται σε μια ματιά στο τρίγωνο του Pascal.)

(γ) Δώστε μια άλλη απόδειξη του ότι ο $\binom{n}{k}$ είναι φυσικός αριθμός, δείχνοντας ότι $\binom{n}{k}$ είναι το πλήθος των συνόλων από k ακριβώς ακεραίους, που κάθε φορά τους διαλέγουμε από τους $1, \ldots, n$.

(δ) Αποδείξτε το «διωνυμικό θεώρημα»: Αν a και b είναι τυχαίοι αριθμοί και n είναι ένας φυσικός αριθμός, τότε

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j.\end{aligned}$$

(ε) Αποδείξτε ότι

(i) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(ii) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots \pm \binom{n}{n} = 0.$

(iii) $\displaystyle\sum_{l\ \text{περιττός}}\binom{n}{l} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}.$

(iv) $\displaystyle\sum_{l\ \text{άρτιος}}\binom{n}{l} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = 2^{n-1}.$

4. (α) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{l}\binom{n}{k}\binom{m}{l-k} = \binom{n+m}{l}.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το διωνυμικό θεώρημα στο $(1+x)^n(1+x)^m$.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

5. (α) Αποδείξτε με επαγωγή στο n ότι

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

αν $r \neq 1$ (αν $r = 1$, ο υπολογισμός του αθροίσματος προφανώς δεν παρουσιάζει κανένα πρόβλημα).

(β) Αποδείξτε αυτό το αποτέλεσμα θέτοντας $S = 1 + r + \cdots + r^n$, πολλαπλασιάζοντας αυτήν την εξίσωση με r, και λύνοντας τις δύο εξισώσεις ως προς S.

6. Ο τύπος για το $1^2 + \cdots + n^2$ λαμβάνεται και με τον εξής τρόπο. Ξεκινάμε από τον τύπο

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Αν γράψουμε αυτόν τον τύπο για $k = 1, \ldots, n$ και προσθέσουμε, παίρνουμε

$$\begin{array}{l}
2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
\quad \vdots \\
(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 \\
\hline
(n+1)^3 - 1 \ = 3[1^2 + \cdots + n^2] + 3[1 + \cdots + n] + n.
\end{array}$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε το $\sum_{k=1}^{n} k^2$ αν μας είναι ήδη γνωστό το $\sum_{k=1}^{n} k$ (το οποίο θα μπορούσαμε να το έχουμε βρει με παρόμοιο τρόπο). Χρησιμοποιήστε αυτήν τη μέθοδο για να βρείτε τα

(i) $1^3 + \cdots + n^3$.

(ii) $1^4 + \cdots + n^4$.

(iii) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

(iv) $\dfrac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

$*$**7.** Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Προβλήματος 6 για να δείξετε ότι το $\sum_{i=1}^{n} k^p$ γράφεται πάντα στη μορφή

$$\frac{n^{p+1}}{p+1} + An^p + Bn^{p-1} + Cn^{p-2} + \cdots.$$

(Οι δέκα πρώτες τέτοιες εκφράσεις είναι

$$\sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{3}{20}n^2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n.$$

Παρατηρήστε ότι οι συντελεστές στη δεύτερη στήλη είναι πάντοτε $\frac{1}{2}$, και ότι μετά την τρίτη στήλη οι δυνάμεις του n με μη μηδενικούς συντελεστές ελαττώνονται κατά 2 μέχρι να φτάσουμε το n^2 ή το n. Οι συντελεστές σε όλες, εκτός από τις δύο πρώτες στήλες μοιάζουν μάλλον τυχαίοι, υπάρχει όμως στην πραγματικότητα κάποιο είδος τύπου· το να τον βρείτε θα μπορούσε να θεωρηθεί ένδειξη πολύ ισχυρής διαίσθησης. Βλ. το Πρόβλημα 27-17 για τη συνέχεια και το τέλος της ιστορίας.)

8. Αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός είναι ή άρτιος ή περιττός.

9. Αποδείξτε ότι, αν ένα σύνολο A φυσικών αριθμών περιέχει το n_0 και περιέχει το $k+1$ όποτε περιέχει το k, τότε το A περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς που είναι $\geq n_0$.

10. Αποδείξτε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής από την αρχή της καλής διάταξης.

11. Αποδείξτε την αρχή της πλήρους επαγωγής από τη συνήθη αρχή της επαγωγής. Υπόδειξη: Αν το A περιέχει το 1 και το A περιέχει το $n+1$ όποτε περιέχει τα $1, \ldots, n$, θεωρήστε το σύνολο B όλων των k για τα οποία οι $1, \ldots, k$ βρίσκονται όλοι στο A.

12. (α) Αν ο a είναι ρητός και ο b άρρητος, είναι ο $a+b$ αναγκαστικά άρρητος; Τί γίνεται αν και ο a και ο b είναι άρρητοι;

(β) Αν ο a είναι ρητός και ο b είναι άρρητος, είναι ο ab αναγκαστικά άρρητος; (Προσοχή!)

(γ) Υπάρχει αριθμός a τέτοιος ώστε ο a^2 να είναι άρρητος, αλλά ο a^4 να είναι ρητός;

(δ) Υπάρχουν δύο άρρητοι αριθμοί των οποίων το άθροισμα και το γινόμενο να είναι και οι δύο ρητοί;

13. (α) Αποδείξτε ότι οι $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ και $\sqrt{6}$ είναι άρρητοι. Υπόδειξη: για να εργαστείτε με τον $\sqrt{3}$, για παράδειγμα, χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι κάθε ακέραιος είναι της μορφής $3n$ ή $3n+1$ ή $3n+2$. Γιατί δεν λειτουργεί αυτή η απόδειξη και για τον $\sqrt{4}$;

(β) Αποδείξτε ότι οι $\sqrt[3]{2}$ και $\sqrt[3]{3}$ είναι άρρητοι.

14. Αποδείξτε ότι

(α) ο $\sqrt{2}+\sqrt{6}$ είναι άρρητος.

(β) ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

15. (α) Αποδείξτε ότι, αν $x = p + \sqrt{q}$ όπου ο p και ο q είναι ρητοί, και m είναι φυσικός αριθμός, τότε $x^m = a + b\sqrt{q}$ για κάποιους ρητούς a και b.

(β) Αποδείξτε επίσης ότι $(p - \sqrt{q}\,)^m = a - b\sqrt{q}$.

16. (α) Αποδείξτε ότι, αν m και n είναι φυσικοί αριθμοί και $m^2/n^2 < 2$, τότε $(m + 2n)^2/(m+n)^2 > 2$· δείξτε, ακόμα, ότι

$$\frac{(m+2n)^2}{(m+n)^2} - 2 < 2 - \frac{m^2}{n^2}.$$

(β) Αποδείξτε τα ίδια αποτελέσματα με όλες τις ανισότητες αντεστραμμένες.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν $m/n < \sqrt{2}$, τότε υπάρχει ένας άλλος ρητός αριθμός m'/n' με $m/n < m'/n' < \sqrt{2}$.

$*$**17.** Φαίνεται σωστό ότι η $\sqrt{n}$ είναι άρρητος αριθμός όποτε ο φυσικός αριθμός n δεν είναι το τετράγωνο κάποιου άλλου φυσικού αριθμού. Αν και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Προβλήματος 13 σε οποιαδήποτε ειδική περίπτωση, δεν είναι φανερό εκ των προτέρων ότι λειτουργεί πάντα, και η απόδειξη για τη γενική περίπτωση απαιτεί κάποιες πρόσθετες πληροφορίες. Ένας φυσικός αριθμός p λέγεται **πρώτος αριθμός** αν είναι αδύνατο να γράψουμε $p = ab$ για φυσικούς αριθμούς a και b, εκτός αν ο ένας από αυτούς είναι p και ο άλλος 1· επίσης, θα συμφωνήσουμε για ευκολία ότι ο 1 *δεν* είναι πρώτος αριθμός. Μερικοί πρώτοι αριθμοί στη σειρά είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Αν ο $n > 1$ δεν είναι πρώτος, τότε $n = ab$, όπου οι a και b είναι και οι δύο $< n$· αν ο a ή ο b δεν είναι πρώτος, μπορούμε με τον ίδιο τρόπο να τον γράψουμε ως γινόμενο· συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύουμε ότι ο n γράφεται ως γινόμενο πρώτων. Για παράδειγμα, $28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.

(α) Μετατρέψτε αυτό το επιχείρημα σε αυστηρή απόδειξη με πλήρη επαγωγή. (Είναι σίγουρο ότι κάθε λογικός μαθηματικός θα δεχόταν το παράτυπο αυτό επιχείρημα, μάλλον όμως γιατί θα ήταν φανερό για αυτόν πώς να το διατυπώσει αυστηρά.)

Ένα θεμελιώδες θεώρημα για τους ακεραίους, που δεν θα το αποδείξουμε εδώ, μας λέει ότι αυτή η παραγοντοποίηση είναι μοναδική, αν δεν λάβουμε υπόψη τη σειρά των παραγόντων. Έτσι, για παράδειγμα, ο 28 δεν μπορεί ποτέ να γραφεί ως γινόμενο πρώτων ο ένας από τους οποίους να είναι ο 3, ούτε μπορεί να γραφεί με έναν τρόπο που να περιέχει το 2 μόνο μία φορά (θα έπρεπε τώρα να εκτιμήσετε το ότι δεν επιτρέψαμε στον 1 να είναι πρώτος).

(β) Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, αποδείξτε ότι ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος, εκτός αν $n = m^2$ για κάποιον φυσικό αριθμό m.

(γ) Αποδείξτε πιο γενικά ότι ο $\sqrt[k]{n}$ είναι άρρητος, εκτός αν $n = m^k$.

(δ) Δεν μπορούμε να κλείσουμε τη συζήτηση για τους πρώτους αριθμούς χωρίς να συμπεριλάβουμε την όμορφη απόδειξη του Ευκλείδη για το ότι υπάρχουν άπειροι ως προς το πλήθος πρώτοι αριθμοί. Αποδείξτε ότι δεν μπορούν να υπάρχουν μόνο πεπερασμένοι το πλήθος πρώτοι αριθμοί $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ θεωρώντας τον $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$.

$*$**18.** (α) Αποδείξτε ότι, αν ο x ικανοποιεί την

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

για κάποιους ακέραιους $a_{n-1}, \ldots, a_0$, τότε ο x είναι άρρητος, εκτός αν ο x είναι ακέραιος (Γιατί αυτό γενικεύει το Πρόβλημα 17;)

(β) Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ είναι άρρητος.

(γ) Αποδείξτε ότι ο $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ είναι άρρητος. Υπόδειξη: Ξεκινήστε υπολογίζοντας τις πρώτες 6 δυνάμεις αυτού του αριθμού.

19. Αποδείξτε την ανισότητα του Bernoulli: Αν $h > -1$, τότε

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Γιατί αυτό είναι τετριμμένο αν $h > 0$;

20. Η ακολουθία του Fibonacci $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \qquad \text{για } n \geq 3. \end{aligned}$$

Αυτή η ακολουθία, που αρχίζει με τους 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, ανακαλύφθηκε από τον Fibonacci (περίπου 1175 - 1250), με αφορμή ένα πρόβλημα σχετικό με κουνέλια. Ο Fibonacci υπέθετε ότι ένα αρχικό ζευγάρι κουνελιών γεννούσε ένα καινούργιο ζευγάρι κουνελιών το μήνα, και ότι μετά από δύο μήνες κάθε καινούργιο ζευγάρι συμπεριφερόταν όμοια. Το πλήθος a_n των ζευγαριών που γεννιούνται το n-οστό μήνα είναι $a_{n-1} + a_{n-2}$, γιατί ένα ζευγάρι κουνελιών γεννιέται για κάθε ζευγάρι που γεννήθηκε τον προηγούμενο μήνα, και ακόμα κάθε ζευγάρι που γεννήθηκε πριν δύο μήνες δίνει τώρα ζωή σε ένα άλλο ζευγάρι. Το πλήθος των ενδιαφερόντων αποτελεσμάτων που αφορούν αυτήν την ακολουθία είναι πραγματικά απίστευτο — υπάρχει ακόμα και ένας Όμιλος Fibonacci που εκδίδει ένα έντυπο, το *The Fibonacci Quarterly*. Αποδείξτε ότι

$$a_n = \frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Ένας τρόπος απόδειξης του εκπληκτικού αυτού τύπου παρουσιάζεται στο Πρόβλημα 24-16.

21. Η ανισότητα του Schwarz (Πρόβλημα 1-19) έχει στην πραγματικότητα μια πιο γενική μορφή:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {y_i}^2}.$$

Δώστε τρεις αποδείξεις αυτής, ανάλογες προς τις τρεις αποδείξεις του Προβλήματος 1-19.

22. Το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1-7 έχει μια σημαντική γενίκευση: Αν

$$a_1, \ldots, a_n \geq 0$$

τότε ο «αριθμητικός μέσος»

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

και ο «γεωμετρικός μέσος»

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

ικανοποιούν την

$$G_n \leq A_n.$$

(α) Έστω ότι $a_1 < A_n$. Τότε κάποια a_i ικανοποιούν την $a_i > A_n$· για ευκολία ας θεωρήσουμε ότι $a_2 > A_n$. Έστω $\bar{a}_1 = A_n$ και $\bar{a}_2 = a_1 + a_2 - \bar{a}_1$. Αποδείξτε ότι

$$\bar{a}_1 \bar{a}_2 \geq a_1 a_2.$$

Γιατί αν επαναλάβουμε αυτήν τη διαδικασία αρκετές φορές τελικά αποδεικνύουμε ότι $G_n \le A_n$; (Να μια περίπτωση, όπου είναι καλή άσκηση το να δώσετε μια τυπική απόδειξη με επαγωγή, καθώς και ένα άτυπο επιχείρημα.) Πότε ισχύει η ισότητα στη σχέση $G_n \le A_n$;

Η αιτιολόγηση στην προηγούμενη απόδειξη συνδέεται στενά με μια άλλη ενδιαφέρουσα απόδειξη.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $G_n \le A_n$ για $n = 2$, αποδείξτε, με επαγωγή στο k, ότι $G_n \le A_n$ για $n = 2^k$.

(γ) Για τυχαίο n, έστω $2^m > n$. Εφαρμόστε το (β) μέρος στους 2^m αριθμούς

$$a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{2^m - n \text{ φορές}}$$

για να αποδείξετε ότι $G_n \le A_n$.

23. Δίνουμε έναν αναδρομικό ορισμό του a^n:

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^{n+1} &= a^n \cdot a. \end{aligned}$$

Αποδείξτε, με επαγωγή, ότι

$$\begin{aligned} a^{n+m} &= a^n \cdot a^m, \\ (a^n)^m &= a^{nm}. \end{aligned}$$

(Μην προσπαθήσετε να κάνετε ευφυολογήματα: χρησιμοποιήστε επαγωγή στο n ή επαγωγή στο m, όχι και στα δύο μαζί.)

24. Ας υποθέσουμε ότι οι ιδιότητες I1 και I4 είναι γνωστές για τους φυσικούς αριθμούς, αλλά ότι ο πολλαπλασιασμός δεν έχει ποτέ αναφερθεί. Τότε μπορούμε να δώσουμε έναν αναδρομικό ορισμό του πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$\begin{aligned} 1 \cdot b &= b, \\ (a+1) \cdot b &= a \cdot b + b. \end{aligned}$$

Αποδείξτε τα εξής (με τη σειρά που σας προτείνουμε!):

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (χρησιμοποιήστε επαγωγή στο a),
$a \cdot 1 = a$,
$a \cdot b = b \cdot a$ (μόλις αποδείξατε την περίπτωση $b = 1$).

25. Σε αυτό το κεφάλαιο αρχίσαμε με τους φυσικούς αριθμούς και σιγά-σιγά φτάσαμε έως τους πραγματικούς αριθμούς. Για να μελετήσουμε αυστηρά αυτήν τη διαδικασία θα χρειαζόμασταν ένα ολόκληρο μικρό βιβλίο (δείτε το 5ο Μέρος). Κανένας δεν έχει καταφέρει να βρει έναν τρόπο για να φτάσει στους πραγματικούς αριθμούς χωρίς να περάσει μέσα από αυτήν τη διαδικασία, αλλά αν δεχθούμε τους πραγματικούς αριθμούς ως δοθέντες, τότε μπορούμε να *ορίσουμε* τους φυσικούς αριθμούς σαν τους πραγματικούς αριθμούς της μορφής $1, 1+1, 1+1+1$, κτλ. Όλη η ουσία αυτού του προβλήματος είναι να δείξουμε ότι υπάρχει ένας αυστηρός μαθηματικός τρόπος για να πούμε το «κτλ.».

(α) Ένα σύνολο A πραγματικών αριθμών λέγεται **επαγωγικό** αν

(1) ο 1 ανήκει στο A,
(2) ο $k + 1$ ανήκει στο A, όποτε ο k ανήκει στο A.

Αποδείξτε ότι

(i) το **R** είναι επαγωγικό.

(ii) το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών είναι επαγωγικό.

(iii) το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών που δεν είναι ίσοι με $\frac{1}{2}$ είναι επαγωγικό.

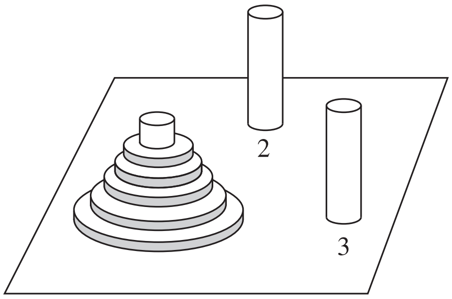
(iv) το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών που δεν είναι ίσοι με 5 δεν είναι επαγωγικό.

(v) αν το A και το B είναι επαγωγικά, τότε το σύνολο C των πραγματικών αριθμών που ανήκουν και στο A και στο B είναι επίσης επαγωγικό.

(β) Ένας πραγματικός αριθμός n θα λέγεται **φυσικός αριθμός** αν ο n ανήκει σε *κάθε* επαγωγικό σύνολο.

(i) Αποδείξτε ότι ο 1 είναι φυσικός αριθμός

(ii) Αποδείξτε ότι, αν ο k είναι φυσικός αριθμός, τότε και ο $k+1$ είναι φυσικός αριθμός.



ΣΧΗΜΑ 1

26. Υπάρχει μια «σπαζοκεφαλιά» που συνίσταται από τρεις πασσάλους με n ομόκεντρους κρίκους τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο κατά φθίνουσα διάμετρο, περασμένοι μέσα σε ένα πάσσαλο (Σχήμα 1). Ένας κρίκος επιτρέπεται από την κορυφή της στοίβας να περάσει σε άλλο πάσσαλο υπό τον όρο να μην τοποθετηθεί πάνω σε μικρότερο κρίκο. Για παράδειγμα, αν ο μικρότερος κρίκος μετακινηθεί στον 2ο πάσσαλο και ο αμέσως επόμενος στον 3ο, τότε ο μικρότερος κρίκος μπορεί να τοποθετηθεί επίσης στον 3ο, πάνω από τον άλλο κρίκο. Αποδείξτε ότι η όλη στοίβα των n κρίκων μπορεί να μετακινηθεί στον 3ο πάσσαλο σε $2^n - 1$ κινήσεις και όχι λιγότερες.

$*$**27.** Το πανεπιστήμιο Β ήταν υπερήφανο για τους 17 μόνιμους καθηγητές του στα μαθηματικά. Η παράδοση επέβαλλε, σε κάθε εβδομαδιαίο ομαδικό γεύμα όπου πιστά έδιναν το παρόν και οι 17, κάθε μέλος που είχε βρει λάθος σε κάποια δημοσίευσή του να το ανακοίνωνε και αμέσως να παραιτείτο. Τέτοιο πράγμα δεν είχε ποτέ συμβεί, μια και κανείς καθηγητής δεν είχε υπόψη του τα λάθη στη δουλειά του. Αυτό δεν σήμαινε ότι δεν υπήρχαν λάθη. Με το πέρασμα των ετών, στη δουλειά του κάθε μέλους του τμήματος είχε βρεθεί τουλάχιστον ένα λάθος από άλλους συναδέλφους του. Αυτό το λάθος είχε αναφερθεί σε όλους τους άλλους καθηγητές εκτός από τον αμέσως ενδιαφερόμενο, για να εμποδισθούν τυχόν παραιτήσεις.

Μια μοιραία χρονιά, το τμήμα ενισχύθηκε με έναν επισκέπτη καθηγητή από άλλο πανεπιστήμιο, κάποιον κ. Χ, ο οποίος ήλπιζε να μονιμοποιηθεί στο τέλος του ακαδημαϊκού έτους. Όπως είναι φυσικό, τα διάφορα μέλη του τμήματος τον πληροφόρησαν για τα δημοσιευμένα λάθη που είχαν ανακαλυφθεί. Όταν η μονιμοποίηση στην οποία ήλπιζε τελικά δεν πραγματοποιήθηκε, ο κ. Χ πήρε την εκδίκησή του στο τελευταίο γεύμα του έτους. «Ευχαριστήθηκα την επίσκεψη μου εδώ πάρα πολύ» είπε, «αλλά υπάρχει κάτι που θέλω να σας πω. Τουλάχιστον ένας από εσάς έχει δημοσιεύσει λάθος αποτέλεσμα το οποίο μερικοί άλλοι στο τμήμα το έχουν ανακαλύψει». Τί συνέβη την επόμενη χρονιά;

$**$**28.** Αφού βρείτε, ή δείτε, την απάντηση στο Πρόβλημα 27, εξετάστε το εξής: Κάθε μέλος του τμήματος ήδη γνώριζε αυτό που ισχυρίστηκε ο κ. Χ. Πώς, επομένως, η δήλωσή του μπορεί να άλλαξε κάτι;